LUC ILLUSIE

Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré d'apres P. Deligne

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 161-172
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__161_0>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° VIII.

THÉORIE DE BRAUER ET CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

d'après P. Deligne,

par Luc ILLUSIE

Introduction.

Soit X/k une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos de car. p. Soient ℓ un nombre premier distinct de p, L_1, L_2 des faisceaux constructibles de $\mathbb{F}_\ell$- modules sur X. Il résulte de la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch ([3], SGA 5 X) que, si L_1 et L_2 sont localement isomorphes pour la topologie étale, on a $\chi(L_1) = \chi(L_2)$, où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(X,-)$. La même conclusion est encore valable si l'on suppose seulement que L_1 et L_2 ont même fonction rang et, en chacun de ses points de discontinuité, "même ramification sauvage" i.e. même conducteur de Swan. L'objet de l'exposé est de montrer que ce phénomène se généralise en dimension supérieure. Le résultat principal (2.1) est dû à Deligne. La démonstration, inspirée de Deligne-Lusztig [2, §3], combine la formule des traces et des éléments de la théorie de Brauer.

1. Rappels sur la théorie de Brauer (cf. [4, III]).

Soient p et ℓ des nombres premiers distincts, et G un groupe fini.

1.1. On note $K^{\cdot}(\mathbb{F}_\ell[G])$, ou $P_\ell(G)$, le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules projectifs de type fini (*). C'est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des complexes parfaits de $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules (SGA 5 VIII). Si l'on désigne par $K^{\cdot}(\mathbb{Z}_\ell[G])$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell[G]$-

(*) Sauf mention du contraire, les G-modules sont des G-modules à gauche.

modules projectifs de type fini (qui est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des complexes parfaits de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules (loc. cit.)), la flèche naturelle de réduction modulo ℓ

(1.1.1) $\quad K^\cdot(\mathbb{Z}_\ell[G]) \longrightarrow K^\cdot(\mathbb{F}_\ell[G])$

est un isomorphisme [4, 14.4.].

On note d'autre part $K.(\mathbb{F}_\ell[G])$, ou $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules de type fini ; c'est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des complexes pseudo-cohérents (par rapport à $\mathbb{F}_\ell[G]$ ou $\mathbb{F}_\ell$ au choix) de $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules (loc. cit.). Enfin, on note $R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell[G]$-modules de type fini (ou, ce qui revient au même, projectifs de type fini).

Le produit tensoriel munit $P_\ell(G)$, $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, $R_{Q_\ell}(G)$ de structures d'anneaux, et $P_\ell(G)$ d'une structure de $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$-module [4, 14.] . L'extension des scalaires de $\mathbb{Z}_\ell$ à $\mathbb{Q}_\ell$ définit un homomorphisme d'anneaux

(1.1.2) $\quad e : P_\ell(G) \longrightarrow R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$,

où $P_\ell(G)$ est identifié à $K^\cdot(\mathbb{Z}_\ell(G))$ par 1.1.1 . D'autre part, l'oubli de la condition de projectivité définit un homomorphisme d'anneaux dit <u>homomorphisme de Cartan</u> ,

(1.1.3) $\quad c : P_\ell(G) \longrightarrow R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$.

Cet homomorphisme vérifie les formules

(1.1.4) $\quad (cx)y = xy = x(cy)$ si $x , y \in P_\ell(G)$,

(1.1.5) $\quad c(xy) = (cx)y$ si $x \in P_\ell(G)$, $y \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$.

Un résultat essentiel de la théorie de Brauer est que e <u>est injectif</u> [4, 16.1.]

1.2 Pour $x \in R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$, on note

(1.2.1) $\quad Tr_x : G \longrightarrow Q_\ell$

la fonction <u>trace</u> correspondante (dite encore <u>caractère</u>). C'est une fonction centrale sur G , qui caractérise x : deux éléments de $R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ qui ont même caractère sont égaux. Pour $x \in P_\ell(G)$, on pose

(1.2.2) $\quad \mathrm{Tr}_x = \mathrm{Tr}_{ex}$;

c'est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, qui, en vertu de l'injectivité de e , caractérise x .

Rappelons qu'un élément de G est dit ℓ-régulier si son ordre est premier à ℓ , ℓ-singulier dans le cas contraire. On note

(1.2.3) $\quad G_{\ell\text{-reg}}$ (resp. $G_{\ell\text{-sing}}$)

(ou simplement G_{reg} (resp. G_{sing}) s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'ensemble des éléments ℓ-réguliers (resp. ℓ-singuliers) de G . La théorie de Brauer fournit la caractérisation suivante de l'image de e [4, 16.2.]

(1.2.4) $\quad \mathrm{Im}(e) = \{ x \in R_{\mathbb{Q}_\ell}(G) \mid \mathrm{Tr}_x(g) = 0 \text{ pour tout } g \in G_{\ell\text{-sing}} \}$.

Dans la suite de l'exposé, nous n'aurons besoin en fait, que de l'inclusion, facile, du premier membre dans le second.

1.3. Pour $x \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, on définit la trace (ou caractère) de Brauer de x [4, 18.] ·

(1.3.1) $\quad \mathrm{Tr}_x^{\mathrm{Br}} : G_{\ell\text{-reg}} \longrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$

(où $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell$) par la formule

$$\mathrm{Tr}_x^{\mathrm{Br}}(g) = \Sigma(\lambda, 0, \dots, 0, \dots) \quad ,$$

où λ parcourt les valeurs propres de g dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, si x est une représentation effective, et en prolongeant par linéarité dans le cas général. Le caractère de Brauer de x est une fonction centrale sur G_{reg} à valeurs dans l'anneau des entiers d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$. Il est multiplicatif en x : pour x , $y \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, on a

(1.3.2) $\quad \mathrm{Tr}_{xy}^{\mathrm{Br}}(g) = \mathrm{Tr}_x^{\mathrm{Br}}(g)\mathrm{Tr}_y^{\mathrm{Br}}(g)$ pour tout $g \in G_{\mathrm{reg}}$.

De plus, pour $x \in P_\ell(G)$, on a

(1.3.3) $\quad \mathrm{Tr}_x(g) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{cx}(g)$ pour tout $g \in G_{\mathrm{reg}}$

(et $\mathrm{Tr}_x(g) = 0$ pour $g \notin G_{\mathrm{reg}}$ d'après 1.2.4). La vérification de 1.3.2 et 1.3.3 est immédiate. Compte-tenu de 1.1.5, on en déduit notamment que, pour $x \in P_\ell(G)$, $y \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, on a

(1.3.4) $$\mathrm{Tr}_{xy}(g) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_x(g)\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_y(g) & \text{si } g \in G_{\mathrm{reg}} \\ 0 & \text{si } g \notin G_{\mathrm{reg}} \end{cases}$$

1.4. En associant à chaque $\mathbb{Z}_\ell[G]$- (resp. $\mathbb{F}_\ell[G]$-, resp. $\mathbb{Q}_\ell[G]$-) module projectif de type fini E le rang du sous- module des invariants E^G, qui est aussi le rang du module des co-invariants E_G grâce à l'isomorphisme norme $E_G \xrightarrow{\sim} E^G$, on définit une fonction additive

(1.4.1) $\quad K \longrightarrow \mathbb{Z} \;,\quad x \longmapsto x^G \;,$

où K désigne l'un des groupes $K^\cdot(\mathbb{Z}_\ell[G])$, $K^\cdot(\mathbb{F}_\ell[G])$, $R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$. Si E est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module projectif de type fini, les isomorphismes

(1.4.2) $\quad E_G \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} (E \otimes \mathbb{Q}_\ell)_G \;,\quad E_G \otimes \mathbb{F}_\ell \xrightarrow{\sim} (E \otimes \mathbb{F}_\ell)_G$

montrent que l'on a des triangles commutatifs

(1.4.3)
$$\begin{tikzcd} K^\cdot(\mathbb{F}_\ell[G]) \arrow[dr, "1.4.1"'] & K^\cdot(\mathbb{Z}_\ell[G]) \arrow[l, "1.1.1"', "\sim"] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1.4.1"] & R_{\mathbb{Q}_\ell}(G) \arrow[dl, "1.4.1"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$
,

en d'autres termes la fonction $x \longmapsto x^G$ est compatible à l'identification 1.1.1 et, pour $x \in P_\ell(G)$, on a

(1.4.4) $\quad x^G = (ex)^G \;.$

Notons que, si L est un complexe parfait de $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules, alors $R\Gamma^G(L)$, où $R\Gamma^G$ est le foncteur dérivé du foncteur "invariants sous G ", est un complexe parfait de $\mathbb{F}_\ell$-modules, de rang

(1.4.5) $\quad \mathrm{rg}\, R\Gamma^G(L) = c\ell(L)^G \;,$

où $c\ell(L)$ est la classe de L dans $P_\ell(G)$.

Pour $x \in R_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$, on a $x^G = < x,1 >$, où $< , >$ est le produit scalaire habituel [4, 14 5] , défini par linéarité à partir de $\dim \mathrm{Hom}^G(-,-)$, d'où l'on déduit aussitôt

(1.4.6) $$x^G = (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g\in G} \mathrm{Tr}_x(g) \quad .$$

Compte-tenu de 1.4.4 et 1.3.4 , il en résulte que, pour $x \in P_\ell(G)$, $y \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$, on a

(1.4.7) $$(xy)^G = (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g\in G_{\ell\text{-reg}}}' \mathrm{Tr}_x(g)\mathrm{Tr}_y^{Br}(g) \quad .$$

Cette formule jouera un rôle-clé au n° 2 .

1.5. Si G désigne maintenant un groupe profini, on note $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules continus de type fini. Si l'on écrit G comme limite projective de ses quotients finis G_i , il est immédiat que l'on a

(1.5.1) $$R_{\mathbb{F}_\ell}(G) = \varinjlim R_{\mathbb{F}_\ell}(G_i) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les flèches de restriction.

2. Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré.

On désigne par k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p , et ℓ un nombre premier distinct de p . Les schémas considérés sont des k-schémas.

THÉORÈME 2.1.(Deligne).- Soient X un sous-schéma ouvert d'un schéma $\bar{X}$, connexe, normal, propre sur k , et M_1 , M_2 des $\mathbb{F}_\ell$-modules constructibles localement constants sur X . On suppose que M_1 et M_2 ont même rang, et que, pour tout point fermé x de $\bar{X} - X$, si $\bar{X}_x$ désigne le localisé strict de $\bar{X}$ en x et y un point géométrique de $\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X$, alors, pour tout p-groupe de Sylow I de $\pi_1(\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X , y)$, les éléments de $R_{\mathbb{F}_\ell}(I)$ (1.5) définis par les fibres de M_1 et M_2 en y sont identiques. Alors on a

$$\chi_c(X,M_1) = \chi_c(X,M_2) \quad ,$$

où $\chi_c(X,-) = \Sigma(-1)^i \dim H^i_c(X,-)$.

Notons que, $\bar{X}$ étant normal, $\bar{X}_x$ est intègre. D'autre part, la condition sur M_1 et M_2 en x peut encore s'exprimer de la manière suivante : il existe un voisinage étale $V \longrightarrow \bar{X}$ de x dans $\bar{X}$ et un revêtement étale galoisien connexe W de $V \times_{\bar{X}} X$, d'ordre premier à p , tel que les images inverses de M_1 et M_2 sur W définissent le même élément de $R_{\mathbb{F}_\ell}(\pi_1(W,w))$, où w est un point géométrique de w .

La première étape de la démonstration de 2.1 va consister à calculer $\chi_c(M_i)$ en termes de caractères.

LEMME 2.2.- Soient $\bar{\eta}$ un point géométrique générique du schéma X de 2.1 , et M un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible localement constant sur X . On suppose que M est trivialisé par un revêtement étale galoisien connexe $X' \longrightarrow X$ de groupe G , de sorte que la représentation de $\pi_1(X,\bar{\eta})$ sur $M_{\bar{\eta}}$ se factorise à travers G . Alors $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell)$, considéré comme objet de $D(\mathbb{F}_\ell[G])$ grâce à l'action de G sur X' , est un complexe parfait, et l'on a un isomorphisme canonique

$$(2.2.1) \qquad R\Gamma_c(X,M) \xrightarrow{\sim} R\Gamma^G(R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell) \otimes_{\mathbb{F}_\ell} M_{\bar{\eta}}) \quad ,$$

où $R\Gamma^G$ est le foncteur considéré en 1.4.5, et $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell) \otimes_{\mathbb{F}_\ell} M_{\bar{\eta}}$ est regardé comme objet de $D(\mathbb{F}_\ell[G])$ grâce à l'action diagonale de G .

C'est standard, cf. (SGA 5 X 7.7). Rappelons rapidement la démonstration. Soit $f : X' \longrightarrow X$ la projection. Le $\mathbb{F}_\ell[G]$-module $f_*\mathbb{F}_\ell$ est localement libre de rang 1 , donc, par le théorème de finitude (SGA 4 XIV) et (SGA 4 XVII 5.2.10), $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X,f_*\mathbb{F}_\ell)$ est un complexe parfait de $\mathbb{F}_\ell[G]$-modules. D'autre part f^*M s'identifie, comme G-faisceau sur X' , au faisceau constant de valeur $M_{\bar\eta}$ muni de l'action canonique de G . Donc f_*f^*M s'identifie à $f_*\mathbb{F}_\ell \otimes M_{\bar\eta}$, où G agit diagonalement, et par suite on a canoniquement

$$M \simeq \underline{\Gamma}^G(f_*\mathbb{F}_\ell \otimes M_{\bar\eta}) \simeq R\underline{\Gamma}^G(f_*\mathbb{F}_\ell \otimes M_{\bar\eta}) ,$$

où $\underline{\Gamma}^G$ désigne le faisceau des invariants sous G . On en déduit

$$R\Gamma_c(X,M) \simeq R\Gamma_c(X,R\underline{\Gamma}^G(f_*\mathbb{F}_\ell \otimes M_{\bar\eta})) ,$$

d'où 2.2.1 par la formule de Künneth et l'isomorphisme $R\Gamma_c(X,R\underline{\Gamma}^G(-)) \simeq R\Gamma^G R\Gamma_c(X,-)$.

LEMME 2.3.- <u>Sous les hypothèses de</u> 2.2 , <u>soient</u> a <u>la classe de</u> $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell)$ <u>dans</u> $P_\ell(G)$, <u>et</u> b <u>celle de</u> $M_{\bar\eta}$ <u>dans</u> $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$. <u>Avec les notations de</u> 1.3 , <u>on a</u>

$$(2.3.1)\qquad \chi_c(X,M) = (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g\in G_{\ell\text{-reg}}} \mathrm{Tr}_a(g)\mathrm{Tr}_b^{Br}(g) .$$

Compte-tenu de 2.2.1 , cela résulte de 1.4.7 .

<u>Remarque</u> 2.4.- Pour tout $n \geqslant 1$, $R\Gamma_c(X',\mathbb{Z}/\ell^n)$ est un complexe parfait de $\mathbb{Z}/\ell^n[G]$-modules, et l'on sait (SGA 5 XIV 3.3) (cf. aussi [2, 3.8], [1, B 11]) que le système projectif des $R\Gamma_c(X',\mathbb{Z}/\ell^n)$ permet de définir un complexe parfait de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules, $R\Gamma_c(X',\mathbb{Z}_\ell)$, induisant $R\Gamma_c(X',\mathbb{Z}/\ell^n)$ par réduction mod ℓ^n pour tout n . Avec la notation 1.1.2, ea est la classe de $R\Gamma_c(X',\mathbb{Z}_\ell)\otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $R_{\mathbb{Q}_\ell}[G]$, donc (1.2.2) on a, pour tout $g \in G$,

$$(2.4.1)\qquad \mathrm{Tr}_a(g) = \sum(-1)^i\mathrm{Tr}(g,H^i_c(X',\mathbb{Q}_\ell)) .$$

Voici maintenant le point-clé de la démonstration de 2.1.

LEMME 2.5.- <u>Sous les hypothèses de</u> 2.2 , <u>soit</u> $\overline{X}'$ <u>le normalisé de</u> $\overline{X}$ <u>dans</u> X' , <u>muni de l'action naturelle de</u> G . <u>Le support de la fonction</u> Tr_a , <u>où</u> a <u>est la classe de</u> $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell)$ <u>dans</u> $P_\ell(G)$, <u>est contenu dans l'ensemble des éléments de</u> G <u>qui sont d'ordre une puissance de</u> p <u>et fixent un point fermé de</u> $\overline{X}'$.

Soit $j : X' \longrightarrow \overline{X}'$ l'inclusion. Pour tout $g \in G$, on a, d'après 2.4.1 ,

$$\mathrm{Tr}_a(g) = \mathrm{Tr}(g, R\Gamma(\bar{X}', j_!\mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(g, R\Gamma(\bar{X}', j_!\mathbb{Z}_\ell)) \quad .$$

Par la formule de Lefschetz-Verdier (SGA 5 III 4.8), $\mathrm{Tr}(g, R\Gamma(\bar{X}', j_!\mathbb{Z}/\ell^n))$ est, pour chaque $n \geqslant 1$, l'intégrale d'une classe de cohomologie sur le schéma des points fixes $\bar{X}'^g$ de g, et cette intégrale est la réduction mod ℓ^n de $\mathrm{Tr}_a(g)$. Donc, si $\bar{X}'^g$ est vide, ce qui signifie que g ne fixe aucun point fermé de $\bar{X}'$, on a $\mathrm{Tr}_a(g) = 0$. D'autre part, d'après 1.2.4, on a $\mathrm{Tr}_a(g) = 0$ si ℓ divise l'ordre de g. Mais, d'après Deligne-Lusztig [2, 3.3], on a $\mathrm{Tr}_a(g) \in \mathbb{Z}$, et $\mathrm{Tr}_a(g) = \sum(-1)^i \mathrm{Tr}(g, H^i_c(X', \mathbb{Q}_{\ell'}))$ pour tout nombre premier $\ell' \neq p$. Donc, pour tout nombre premier $\ell' \neq p$, on a $\mathrm{Tr}_a(g) = 0$ si ℓ' divise l'ordre de g, donc $\mathrm{Tr}_a(g)$ ne peut être non nul que si g est d'ordre une puissance de p, ce qui achève la démonstration de 2.5.

Démontrons maintenant 2.1. Choisissons un revêtement étale galoisien connexe $X' \xrightarrow{f} X$ qui trivialise M_1 et M_2. Soient a et $\bar{X}'$ comme en 2.5, et, pour $i = 1,2$, notons b_i la classe de $(M_i)_{\bar{\eta}}$ dans $R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$. D'après 2.3.1, on a

$$(*) \qquad \chi_c(X, M_i) = (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g \in G_{\ell\text{-reg}}} \mathrm{Tr}_a(g)\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_i}(g) \quad .$$

Soit $g \in G$ tel que $\mathrm{Tr}_a(g) \neq 0$. D'après 2.5, g est d'ordre une puissance de p, et il existe un point fermé $x' \in \bar{X}'$ tel que $gx' = x'$. Soit $x = f(x') \in \bar{X}$. Si $x \in X$, g est nécessairement l'élément neutre, donc $\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_i}(g) = \mathrm{rg}(M_i)$, donc $\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_i}(g) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_2}(g)$. Supposons $x \in \bar{X} - X$, et soit y un point générique géométrique de $\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X$, prenons pour $\bar{\eta}$ l'image de y. Alors g est dans l'image, par application canonique

$$\pi_1(\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X, y) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{\eta}) \longrightarrow G$$

d'un p-groupe de Sylow I de $\pi_1(\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X, y)$. Comme, par hypothèse, M_1 et M_2 définissent le même élément de $R_{\mathbb{F}_\ell}(I)$, on a $\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_1}(g) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{b_2}(g)$. La conclusion de 2.1 découle donc de $(*)$.

2.6. Soient X et $\bar{X}$ comme en 2.1, et soit M un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible localement constant sur X. Nous dirons que M est modérément ramifié (le long de $\bar{X} - X$) si, pour tout point fermé x de $\bar{X} - X$, il existe un voisinage étale V de x dans $\bar{X}$ et un revêtement étale galoisien W de $V \times_{\bar{X}} X$, d'ordre premier à p, tel que l'image inverse de M sur W soit un faisceau constant (il revient au même de dire que, si y est un point géométrique de $\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X$, les p-groupes de Sylow de $\pi_1(\bar{X}_x \times_{\bar{X}} X, y)$ agissent trivialement sur M_y). Si $\bar{X}$ est lisse et $\bar{X} - X$ est un diviseur à croisements normaux, on voit facilement à l'aide du théorème de pureté, que M est modérément ramifié si et seulement si, pour tout point géométrique x de $\bar{X} - X$, localisé en un point de codimension 1 de $\bar{X}$, l'image inverse de M sur le point générique du trait $\bar{X}_x$ est modérément ramifiée au sens habituel.

Nous dirons qu'un revêtement $f : X' \longrightarrow X$, étale, galoisien, de groupe G, est modérément ramifié (le long de $\bar{X} - X$) si les p-groupes de Sylow de G agissent librement sur le normalisé $\bar{X}'$ de $\bar{X}$ dans X'. Cela signifie encore que, localement pour la topologie étale sur $\bar{X}$, f est trivialisé par des revêtements galoisiens finis d'ordre premier à p. En particulier, $f_*\mathbb{F}_\ell$ est modérément ramifié.

COROLLAIRE 2.7.- Soient X et $\bar{X}$ comme en 2.1., et soit M un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible localement constant sur X. Si M est modérément ramifié (2.6), on a

$$\chi_c(X,M) = \chi_c(X,\mathbb{F}_\ell)\mathrm{rg}(M) \quad .$$

En effet, le faisceau $M = M_1$ et le faisceau constant $M_2 = \mathbb{F}_\ell^r$, où $r = \mathrm{rg}(M)$, vérifient les hypothèses de 2.1, donc

$$\chi_c(X,M) = \chi_c(X,\mathbb{F}_\ell^r) = r\chi_c(X,\mathbb{F}_\ell) \quad .$$

COROLLAIRE 2.8.-(cf. [2,3.12]) Soit $f : X' \longrightarrow X$ un revêtement étale, galoisien de groupe G, modérément ramifié (2.6.). On a alors, dans $P_\ell(G)$

$$\chi_c(X',\mathbb{F}_\ell) = \chi_c(X,\mathbb{F}_\ell)r_G \quad ,$$

où $\chi_c(X',\mathbb{F}_\ell)$ *est la classe de* $R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell)$ *dans* $P_\ell(G)$ *et* r_G *la classe de la représentation régulière.*

Si $<\ ,\ > : P_\ell(G) \times R_{\mathbb{F}_\ell}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est le produit scalaire habituel ($< x,y > = (x^\vee.y)^G)$, il suffit de voir que

$$(*) \qquad < \chi_c(X',\mathbb{F}_\ell)^\vee, b) > = \chi_c(X,\mathbb{F}_\ell)\mathrm{rg}(b)$$

pour tout $b \in R_{\mathbb{F}_\ell}(G)$. Or, si M est un $\mathbb{F}_\ell$-module localement constant constructible sur X , trivialisé par f , il résulte de 2.2.1 que l'on a

$$R\Gamma_c(X,M) \simeq R\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_\ell[G]}(R\Gamma_c(X',\mathbb{F}_\ell)^\vee, M_{\bar{\eta}}) \quad ,$$

donc, si b est la classe de $M_{\bar{\eta}}$,

$$< \chi_c(X',\mathbb{F}_\ell)^\vee, b > = \chi_c(X,M) \quad .$$

Appliquant 2.7 , on en déduit (*), d'où la conclusion.

COROLLAIRE 2.9.- *Soient* X *un schéma propre sur* k , *et* M_1 , M_2 , *des* $\mathbb{F}_\ell$-*modules constructibles sur* X . *On suppose que* X *est réunion disjointe de sous- schémas localement fermés* X_i , *normaux, tels que, sur chaque* X_i , M_1 *et* M_2 *soient localement constants de même rang et vérifient la condition de* 2.1 *par rapport au normalisé de l'adhérence de* X_i *dans* X . *Alors on a*

$$\chi(X,M_1) = \chi(X,M_2) \quad .$$

Cela résulte immédiatement de 2.1 et de la formule

$$\chi(X,M) = \sum \chi_c(X_i, M|X_i)$$

pour tout $\mathbb{F}_\ell$-module constructible M sur X .

On en déduit aussitôt :

COROLLAIRE 2.10.- *Soient* X *un schéma propre sur* k , *et* M_1 , M_2 *des* $\mathbb{F}_\ell$-*modules constructibles sur* X . *Si, localement sur* X *pour la topologie étale* M_1 *et* M_2 *sont isomorphes, on a*

$$\chi(X,M_1) = \chi(X,M_2) \quad .$$

En particulier :

COROLLAIRE 2.11.- Soient X un schéma propre sur k , et M un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible localement constant de rang r sur X . On a

$$\chi(X,M) = r\chi(X,\mathbb{F}_\ell) \quad .$$

2.12. Variantes virtuelles.- Pour tout schéma X/k , notons $K_c(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_\ell$-modules constructibles sur X , et K $K_{coh}(X)$ le sous-groupe engendré par les classes des faisceaux constructibles localement constants. Si X est de type fini sur k , la fonction $M \longmapsto \chi_c(X,M)$ sur la catégorie des $\mathbb{F}_\ell$-modules constructibles définit un homomorphisme

$$(2.12.1) \qquad \chi_c : K_c(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad .$$

D'autre part, l'application associant à chaque $\mathbb{F}_\ell$-module constructible sa fonction rang définit un homomorphisme, noté rg , de $K_c(X)$ dans le groupe abélien des fonctions constructibles sur X à valeurs entières.

On voit facilement que la conclusion de 2.1 est encore valable lorsqu'on prend pour M_1 , M_2 des éléments de $K_{coh}(X)$ de même rang tels que, pour x , y, I comme en 2.1 , les éléments de $R_{\mathbb{F}_\ell}(I)$ définis par M_1 , M_2 soient identiques. Cela permet d'étendre 2.9 au cas où M_1 , M_2 sont des éléments de $K_c(X)$ induisant sur chaque X_i des éléments de $K_{coh}(X_i)$ de même rang et vérifiant (par rapport au normalisé de l'adhérence de X_i dans X) la variance de l'hypothèse de 2.1 qu'on vient d'indiquer. On en déduit l'analogue "virtuel" de 2.10 : pour X propre sur k , et M_1 , $M_2 \in K_c(X)$, égaux localement pour la topologie étale sur X , on a $\chi(M_1) = \chi(M_2)$.

Question 2.13.- Existe-t il des variantes relatives des énoncés précédents ? Par exemple : soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas propres sur k , notons $f_* : K_c(X) \longrightarrow K_c(Y)$ l'homomorphisme défini par Rf_* ; si M_1 , $M_2 \in K_c(X)$ sont localement égaux, en est-il de même de f_*M_1 , f_*M_2 ?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. BERTHELOT and A. OGUS, Notes on crystalline cohomology, Math. notes 21, Princeton Univ. Press (1978)

[2] P. DELIGNE and G. LUSZTIG, Representations of reductive groupe over finite fields, Ann. of Math., 103 (1976), p. 103-161.

[3] M. RAYNAUD, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki n° 286 (1965).

[4] J.-P. SERRE, Représentations linéaires des groupes finis, 2ème édition refondue, Hermann (1971).

SGA 5 Cohomologie ℓ-adique et fonctions L , Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1965-66, dirigé par Grothendieck, Lecture Notes in Mathematics n° 589, Springer (1977).

SGA 4 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics n^{os} 269, 270, 305, Springer (1972-1973).