AST

Pages préliminaires

Astérisque, tome 89-90 (1981), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__89-90__1_0>

The present issue of "Asterisque" contains the texts of the lectures and talks delivered at the meeting on "Analytic Solutions of Partial Differential Equations" held in Trento (Italy) from 2. to 7. March 1981, as one of the activities of the "Centro Interuniversitario per la Ricerca Matematica" of the University of Trento. Invited lecturers were professors Akira Kaneko, Pierre Schapira and David S. Tartakoff.

The organization of this meeting began with the assistance of Aldo Andreotti whose recent important contribution to the problems taken as subject of the meeting are well known. His sudden death on February 21., 1980 left the Organizing Committee without the contribution of his ideas and the help of his experience.

The Organizing Committee and all the participants intend to dedicate to Aldo Andreotti the works of this meeting.

Lamberto Cattabriga

LIST OF PARTICIPANTS

1. W. Abramczuk (University of Stockholm, Stockholm, Sweden)
2. A. Bove (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
3. G. Bratti (Istituto di Analisi Matematica, Università di Padova, Italy)
4. P. Carbonaro (Istituto Matematico, Università di Messina, Italy)
5. A. Cattabriga (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
6. M. Chicco (Istituto Matematico, Università di Genova, Italy)
7. E. De Giorgi (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy)
8. A. De Vito (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ancona)
9. F. Favilli (Istituto Matematico, Università di Pisa, Italy)
10. R. Floris (Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, Roges, Italy)
11. B. Franchi (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
12. H.G. Garnir (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
13. A. Kaneko (Department of Mathematics, University of Tokyo, Tokyo, Japan)
14. P. Laubin (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
15. P. Leonard (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
16. O. Liess (Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule, Darmstadt, W. Germany)
17. J.L. Lieutenant (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
18. A. Lorenzi (Istituto Matematico, Università di Milano, Italy)
19. P. Lousberg (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
20. D. Mari (Istituto Matematico, Università di Ferrara, Italy)
21. M. Nacinovich (Istituto Matematico, Università di Pisa, Italy)
22. P. Pantano (Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, Roges, Italy)
23. C. Parenti (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
24. J. Persson (Institutt for Matematiske Realfag, Tromsö, Norway)
25. L. Rodino (Istituto Matematico, Università di Torino, Italy)
26. P. Schapira (Département de Mathématiques, Univ. de Paris Nord, Paris, France)
27. F. Segala (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
28. S. Spagnolo (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy)
29. D.S. Tartakoff (Dept. of Mathematics, Univ. of Illinois, Chicago, U.S.A.)
30. O. von Grudzinski (Mathematisches Seminar der Universität, Hamburg, W. Germany)
31. G. Viola (Istituto Matematico, Università di Genova, Italy)
32. G. Zampieri (Istituto di Analisi Matematica, Università di Padova, Italy)
33. L. Zanghirati (Istituto Matematico, Università di Ferrara, Italy)

TABLE DES MATIÈRES

Ce cours donne un exposé sur un problème spécial du prolongement des solutions analytiques réelles pour les équations aux dérivées partielles linéaires.

On y expliquera comment l'étude de la singularité isolée stable, commencée au moyen de l'analyse de Fourier pour les équations à coefficients constants, est développée pour trouver finalement le lien avec la théorie micro-locale contemporaine des équations aux dérivées partielles linéaires et même pour proposer à celle-ci de nouveaux problèmes intéressants.

Many properties of a module M over a $\mathbb{Z}$-filtered ring A can be obtained from the corresponding ones on gr(M) the associated graded module over gr(A) if we make some assumption of noetheriannity on A and assume gr(A) commutative. We study in particular homological dimension, characteristic ideal, multiplicities, flatness, coherency, ... Our results are not really new, and some of them are explicitly in Björk's book, but they are useful in order to recover results of Sato-Kawaï-Kashiwara on the ring of microdifferential operators as shown here. Finally we briefly recall how to treat the Cauchy problem for (overdetermined) systems of microdifferential equations, with the notion of "microcharacteristic directions".

Des démonstrations purement L^2 et classiques sont données pour des questions de l'hypoanalyticité (micro-)locale. On commence avec le cas elliptique, bien connu, pour donner des idées, et ensuite le cas sous-elliptique avec perte d'une dérivée sur une variété symplectique (mais, encore une fois, pour simplifier la démonstration, à coefficients constants). La deuxième partie est consacrée à des résultats d'analyticité, obtenus avec L. Rothschild, dans un cas non-hypoelliptique et aux problèmes à coefficients variables (le $\Box_b$, par exemple, et le problème $\bar{\partial}$-Neumann). Dans la troisième partie, on donne une esquisse d'une démonstration utilisant des méthodes élémentaires du résultat général de Métivier pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples.

W.ABRAMCZUK - A remark on ellipticity of systems of linear partial differential equations with constant coefficients 117

Soit Ω un ouvert convexe borné $\subset R^n$, m un entier ≥ 0, $L^2_{m,\bar{\Omega}}$ l'espace des fonctions à support dans $\bar{\Omega}$, de carré sommable ainsi que leur dérivées jusqu'à l'ordre m, muni de la topologie habituelle. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre N, $m-N \geq 0$.

Il est facile à voir que pour que $P(D)L^2_{m,\bar{\Omega}}$ soit fermé dans $L^2_{m-N,\bar{\Omega}}$ il faut et il suffit que $P(D)$ soit elliptique.

La question étudiée dans ce travail est la suivante: comment généraliser ce résultat aux systèmes $P(D) = (P_{jk}(D))$, $j = 1,\dots,J$, $k = 1,\dots,K$?
Les cas des $P(D)$ déterminés et non-déterminés sont traités dans Theorem 1 et Theorem 2, respectivement

L.CATTABRIGA - Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients 129

On prouve le théoreme suivant: Soit $P(D)$ un opérateur différentiel sur R^n à coefficients constants et soit $d \geq 1$ un nombre rationnel. On suppose qu' il existe un nombre fini de vecteurs $N^j \in R^n \setminus \{0\}, j=1,\dots,\ell,$ tels que

a pour certaines constantes $k > 1$, $\rho > d$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et chaque $j = 1,\dots,\ell$:

$$\xi \in R^n, t \in R, |\xi-<\xi,N^j> N^j| \geq k, \quad P(\xi+itN^j) = 0 \quad \text{implique}$$

$$\text{ou bien} \quad t \geq -c_1|\xi-<\xi,N^j> N^j|^{1/\rho} \quad \text{ou bien} \quad t \leq -c_2|\xi|^{1/d} \; ;$$

b) $R^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j$

où $\Delta_j = \{y \in R^n; |y|<\gamma_j<y,N^j>\}$ pour des constantes positives $\gamma_j, j=1,\dots,\ell$.
Alors on a $P(D)\Gamma^d(R^n) = \Gamma^d(R^n)$, $\Gamma^d(R^n)$ étant l'ensemble (de Gevrey d'ordre d) de toutes les fonctions indéfiniment dérivables sur R^n et à valeurs complexes telles que pour tout compact $K \subset R^n$ et tout $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$

$$\sup_{x\in K} |D^{\alpha} f(x)| \leq c(K,f)^{|\alpha|+1} \Gamma(d|\alpha|+1)$$

où $c(K,f)$ est une constante positive dépendant seulement de K et f et Γ est la fonction d'Euler.

Le but de cette conférence est de donner une idée d'ensemble des problèmes découlants de l'étude des limites des familles de fonctionnelles et d'opérateurs différentiables. Quoique initialement développés dans le cadre du calcul des variations et des équations différentielles de la physique mathématique, ces problèmes et les méthodes qui en résultent peuvent s'avérer bien utiles pour l'étude des équations différentielles générales et de beaucoup d'autres questions mathématiques. C'est la raison pour laquelle il me semble intéressant de présenter ici les idées fondamentales de cette nouvelle théorie.

Soit $p(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|/s+(s-1)|\beta|/s+j\leq m} a_{\alpha\beta j}(t)x^{\alpha}D_x^{\beta}D_t^{j}$, $s>1$, un opérateur linéaire aux dérivées partielles, où les $a_{\alpha\beta j}$ sont des fonctions analytiques réelles pour $|t|<h, x\in R^n$ et $a_{oom}\equiv 1$. Considérons les solutions $u(x,t), x\in R^n, |t|<h, u\in\mathscr{C}^{\infty}$, telles que $\exists B, \forall\gamma, \forall\ell, \exists c_{\gamma\ell}$ avec $|D_x^{\gamma} D_t^{\ell} u(x,t)| \leq c_{\gamma\ell} \exp(B|x|^s)$.

Les résultats principaux sont les suivants:

a) relative à l'unicité des solutions du problème de Cauchy caractéristique:

Supposons que $u(x,t) = 0$ pour $t<0$. Alors $u\equiv 0$.

b) relative à la régularite des solutions: Supposons que $(\xi,\tau)\neq 0$ $\Rightarrow \sum_{(s-1)|\beta|/s+j=m} a_{0\beta j}(t)\,\xi^{\beta}\tau^{j}\neq 0$. Alors u est analytique réelle

Dans les preuves nous utilisons une technique de microlocalisation basée sur une notion de spectre singulier pour des fonctions avec conditions de croissance à l'infini.

Soit $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants. On montre que pour tout $P \in \mathscr{D}$, l'équation $Pu = f$ est résoluble dans l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}^n$ qui admettent une décomposition en somme de fonctions holomorphes dans des tubes coniques dont les polaires ne rencontrent pas la variété caractéristique de P . On prouve également que pour tout $\mathscr{D}$-module de type fini $\mathscr{M}$, les $\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{D}}(\mathscr{M},.)$ s'annulent pour $j \geq 1$ sur certains espaces de fonctions holomorphes.

Nous établissons dans cet article un théorème de régularité des traces d'une distribution solution d'une équation parabolique rétrograde du premier ordre. La méthode utilisée consiste à construire une solution approchée d'un problème de Cauchy associé à l'équation considérée.

Soit P un opérateur linéaire aux dérivées partielles et aux coefficients analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On construit des solutions $u \in C^\infty$ de $Pu = 0$ telles que $D^\xi u = 0$, $x_1 = 0$, tous ξ , $0 \in \operatorname{supp} u$ ou des solutions $u \in C^k$, $u \notin C^{k+1}$, $k \geq m$, telles que $D^\xi u = 0$, $|\xi| \leq k$, $0 \in \operatorname{supp} u$ quand (car) $x_1 = 0$ est caractéristique de multiplicité constante et sous certaines autres conditions sur P . Ces dernières conditions sont toujours satisfaites dans le cas C^∞ quand P a des coefficients constants. On met en évidence le lien entre ces résultats et l'existence des solutions holomorphes avec singularités sur $x_1 = 0$ quand P est consideré comme un opérateur différentiel en $\mathbb{C}^n$. Ces constructions sont seulement indiquées.

Les résultats généralisent des vieux résultats sur la nonunicité du problème