Astérisque

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Séries de Dirichlet

Astérisque, tome 94 (1982), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__94__1_0>

SÉRIES DE DIRICHLET

par

Pierrette CASSOU-NOGUÈS

-:-:-:-

Soient un corps de nombres totalement réel K et ζ_K sa fonction zêta de Dedekind, définie par

$$\zeta_K(s) = \Sigma\ N\mathfrak{a}^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux entiers non nuls de K et $N\mathfrak{a}$ désignant la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{a}$. T. Shintani [13] a montré que l'on pouvait écrire $\zeta_K(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ comme une somme finie de séries du type

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^r} P(m+x)^{-s}$$

où $P(X) \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_r]$ est un produit de $n = [K:\mathbb{Q}]$ polynômes homogènes du premier degré à coefficients réels positifs, r est inférieur ou égal à n , $x \in \mathbb{Q}^r$ et

$$P(X+x) = P(X_1 + x_1, \ldots, X_r + x_r) .$$

Il a alors montré que ces séries se prolongent à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes dont les valeurs aux entiers négatifs sont rationnelles. Il retrouvait ainsi le théorème de Klingen-Siegel [9], [14] : pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta_K(1-k) \in \mathbb{Q}$.

Soit maintenant une extension abélienne finie M de K et χ un caractère du groupe de Galois de M sur K . Notons $L(\chi, s)$ la fonction L associée au caractère χ . En utilisant les résultats de Shintani [13], on peut montrer que pour tout idéal $\mathfrak{c}$ entier $(1 - N\mathfrak{c}^{1-s}\chi(\mathfrak{c}))\, L(\chi, s)$ peut s'écrire, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, sous forme d'une somme finie de séries du type

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^r} P(n+x)^{-s}\ \xi^n$$

où $\xi^n = \xi_1^{n_1} \dots \xi_r^{n_r}$, les ξ_i étant des racines de l'unité différentes de 1. Ces séries ont un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on peut leur associer des fonctions p-adiques ce qui permet de retrouver les résultats de Deligne-Ribet [6].

Nous voulons maintenant étudier des séries

$$Z(P,Q,\xi)(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^r}{}' \, Q(n)\ P(n)^{-s}\xi^n$$

où $P, Q \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]$ et $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_r)\in\mathbb{C}^r$, $|\xi_i| \le 1$ (Σ' signifie que l'on somme sur les n tels que $P(n)\neq 0$). Mellin [10] a étudié ce type de séries dans le cas où les coefficients de P sont de partie réelle positive. Une telle série converge absolument dans un demi-plan et Mellin a montré qu'elle se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe dont tous les pôles sont sur la droite réelle.

Nous allons seulement étudier le cas où P satisfait la condition suivante $(\ast)$:

Ecrivons P comme somme de polynômes homogènes de degrés distincts $0, 1, 2, \dots, \alpha$.

$$P(X_1,\dots,X_r) = P_\alpha(X_1,\dots,X_r) + P_{\alpha-1}(X_1,\dots,X_r) + \dots + P_o(X_1,\dots,X_r) .$$

Notons ℓ le nombre de ξ_i tels que $\xi_i = 1$. Si $0<\ell<r$, on suppose que $\xi_i = 1$ pour $1\le i\le \ell$ et $\xi_i\neq 1$ pour $\ell < i \le r$. Alors, on a, $\mathrm{Re}\, P(t_1,\dots,t_r) > 0$ pour tout $(t_1,\dots,t_r)\in\mathbb{R}_+^r$, $(t_1,\dots,t_r)\neq(0,\dots,0)$ et $\mathrm{Re}\,(P_\alpha(t_1,\dots,t_r))>0$ pour tout $(t_1,\dots,t_r)\in\mathbb{R}_+^r\cap\complement\{(t_1,\dots,t_r)\,|\,t_1=0,\dots,t_\ell=0\}$. Si $\ell=0$, on suppose seulement que $\mathrm{Re}\,P(t_1,\dots,t_r)>0$ pour tout $(t_1,\dots,t_r)\in\mathbb{R}_+^r$, $(t_1,\dots,t_r)\neq(0,\dots,0)$.

Dans ces conditions, la série converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{\deg Q+\ell}{\alpha}$ et elle se prolonge sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe dont les pôles sont simples et appartiennent à l'ensemble

$$\{\, s = \frac{k}{\alpha}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\le \deg Q+\ell\ ,\ -s\notin\mathbb{N}\} .$$

Nous étudions les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles. Ces valeurs appartiennent-elles au corps K engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients des polynômes P et Q et les ξ_i ? Si ce corps est un corps de nombres, peut-on définir des fonctions p-adiques associées ? Si ces valeurs n'appartiennent pas à K , que peut-on en dire ?

Nous allons tout d'abord traiter le cas des séries de Shintani pour introduire les outils utilisés dans la suite. Après avoir donné les moyens de calculer les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles nous étudions des cas où les valeurs sont interpolables p-adiquement et nous faisons quelques remarques dans le cas où elles ne sont pas algébriques.

Pour un polynôme P quelconque, les résultats les plus précis que l'on ait actuellement sont ceux de Sargos [11].

I. - Séries de Shintani

On considère ici des séries du type

$$(1) \qquad Z(P_x, \xi)(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} P(n+x)^{-s} \xi^n , \quad x = (x_j)_{1 \le j \le r} \in \mathbb{Q}^{*r}$$

où

$$(2) \qquad P(X_1, \dots, X_r) = \prod_{i=1}^{n} (v_1^{(i)} X_1 + \dots + v_r^{(i)} X_r) \qquad r \le n .$$

Posons

$$(3) \qquad L^{(i)}(X) = v_1^{(i)} X_1 + \dots + v_r^{(i)} X_r$$

$$(4) \qquad M_j(Y) = v_j^{(1)} Y_1 + \dots + v_j^{(1)} Y_n .$$

LEMME 1. - Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$(5) \qquad \Gamma(s)^n Z(P_x, \xi)(s) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(t) (t_1 \dots t_n)^{s-1} dt_1 \dots dt_n$$

où

$$(6) \qquad g(t) = \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{-M_j(t) x_j}}{e^{-M_j(t)} \xi_j - 1} .$$

Preuve. - On utilise

$$\xi^m \Big(\prod_{i=1}^{n} L^{(i)}(m+x)\Big)^{-s} \Gamma(s)^n = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{s-1} \dots t_n^{s-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} L^{(i)}(m+x) t_i} dt_1 \dots dt_n$$

et
$$\sum_{i=1}^{n} L^{(i)}(m+x)\,t_i = \sum_{j=1}^{r} M_j(t)\,(m_j+x_j) \ .$$

LEMME 2. - Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$(7) \qquad \Gamma(s)^n\, Z(P_x,\xi)(s) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty u^{ns-1}\,du \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_i(uy) \prod_{\ell \neq i} y_\ell^{s-1} \prod_{\ell \neq i} dy_\ell$$

où

$$(8) \qquad g_i(uy) = \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{-uM_j(y)x_j}}{e^{-uM_j(y)}\,\xi_j - 1} \qquad y = (y_1, \ldots, 1, \ldots, y_n) \ .$$

Preuve. - On considère pour $1 \leq i \leq n$, D_i le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$D_i = \{t \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t_\ell \leq t_i \ ;\ \ell = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$$

et dans D_i, on fait le changement de variables

$$u = t_i \ , \quad y_\ell = \frac{t_\ell}{t_i} \quad \ell \neq i \ .$$

Posons

$$(9) \qquad \Delta_i^m = \frac{\partial^m}{\partial y_1^m} \cdots \frac{\partial^m}{\partial y_{i-1}^m}\, \frac{\partial^m}{\partial y_{i+1}^m} \cdots \frac{\partial^m}{\partial y_r^m}$$

$$\delta_i = (0\ , \ \ldots\ , \ 1\ , \ \ldots\ , \ 0) \ .$$

LEMME 3. - Pour tout entier $m \geq 0$

$$(10) \qquad Z(P_x,\xi)(-m) = \frac{(-1)^{mn}\, m\,!}{n\,(mn)\,!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{mn}}{\partial u^{mn}}\, \Delta_i^m\, g_i(uy) \Big|_{\substack{u=0 \\ y=\delta_i}} \ .$$

On a donc à étudier
$$\frac{d^k}{du^k}\, \frac{e^{-ux}}{e^{-u}\,\xi - 1}\Big|_{u=0} \quad \text{si} \quad \xi \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k+1}\, \frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}\, \frac{u e^{-ux}}{e^{-u} - 1}\Big|_{u=0} \ .$$

DÉFINITION 3. - Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ on pose :

$$(11) \qquad \lambda_j(P) = \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1} (-1)^{\ell-1}\, P(-\ell) \ .$$

Avec ces notations, on a :

LEMME 4. - <u>Pour tout entier</u> $k \geq 0$

$$\frac{1}{k+1}\,\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}\,\frac{ue^{-ubx}}{e^{-ub}-1}\Big|_{u=0} = (-1)^{k+1}\,\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+2}\frac{\lambda_j((X+x)^{k+1}\,b^{k+1})}{j} \tag{12}$$

$$\frac{d^k}{du^k}\,\frac{e^{-ubx}}{e^{-ub}\xi-1}\Big|_{u=0} = (-1)^k\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\lambda_j((X+x)^k\,b^k)}{(1-\xi)^j} \tag{13}$$

<u>Remarque</u>. - Si b_k désigne le k-ième nombre de Bernoulli, (12) donne l'égalité

$$b_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+2}\frac{\lambda_j(X^{k+1})}{j}$$

<u>Preuve</u>. - On utilise les égalités formelles

$$\frac{\operatorname{Log} T}{1-T} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1-T)^{j-1}}{j} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T-\xi} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1-T)^{j-1}}{(1-\xi)^j}$$

et le fait que

$$\frac{d^k}{du^k}\left[e^{-u(x-1)}(1-e^u)^{j-1}\right]\Big|_{u=0} = 0 \quad \text{si} \quad k<j-1$$

et

$$\frac{d^k}{du^k}\left[e^{-u(x-1)}(1-e^u)^{j-1}\right]\Big|_{u=0} = (-1)^{k+1}\sum_{\ell=1}^{j}\binom{j-1}{\ell-1}(-1)^{\ell-1}(x-\ell)^k \ .$$

On considère maintenant plusieurs indéterminées.

DÉFINITION 5. - Pour tout $j \in \mathbb{N}^{*r}$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]$, <u>on pose</u>

$$\lambda_{j_1,\dots,j_r}(P) = \sum_{\ell_1=1}^{j_1}\cdots\sum_{\ell_r=1}^{j_r}\binom{j_1-1}{\ell_1-1}\cdots\binom{j_r-1}{\ell_r-1}(-1)^{\ell_1+\dots\ell_r-r}\,P(-\ell_1,\dots,-\ell_r) \ . \tag{14}$$

On a donc

$$\lambda_{j_1,\dots,j_r}(X_1^{i_1}\dots X_r^{i_r}) = \lambda_{j_1}(X_1^{i_1})\dots\lambda_{j_r}(X_r^{i_r}) \ .$$

On rappelle que l'on a supposé que si ℓ est le nombre de ξ_i tels que $\xi_i = 1$ et si $0<\ell<r$, alors

$$\xi = (1,\dots,1,\xi_{\ell+1},\dots,\xi_r) \ .$$

DÉFINITION 6. - On note φ_ξ la forme $\mathbb{C}$-linéaire

$$\varphi_\xi : \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$P \longmapsto \sum_j \frac{\lambda_j(P)}{\prod_{i=1}^{\ell} j_i \prod_{i=\ell+1}^{r}(1-\xi_i)^{j_i}} \ .$$

On a alors

$$\frac{d^{mn}}{du^{mn}} g(uy)\Big|_{u=0} = \varphi_\xi(A_m)(-1)^{mn+\ell}$$

où

$$A_m = \sum_{m_1+\ldots+m_r=mn} \frac{(mn)!}{m_1!\ldots m_r!} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{((X_j+x_j)M_j(y))^{m_j+1}}{(m_j+1)M_j(y)} \prod_{j=\ell+1}^{r} ((X_j+x_j)M_j(y))^{m_j} .$$

Posons

$$\mathfrak{a}_m = \frac{m!}{n(mn)!} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(A_m) .$$

Nous avons donc montré

THÉORÈME 7. - Pour tout entier $m \geq 0$

$$Z(P_x, \xi)(-m) = \varphi_\xi(\mathfrak{a}_m) .$$

Le polynôme $\mathfrak{a}_m$ possède la propriété suivante :

PROPOSITION 8. - Pour tout entier $m \geq 0$

$$\frac{\partial^\ell}{\partial X_1 \ldots \partial X_\ell} \mathfrak{a}_m = P_x^m .$$

Preuve.

$$\frac{\partial^\ell}{\partial X_1\ldots\partial X_\ell} A_m = \sum_{m_1+\ldots+m_r=mn} \frac{(mn)!}{m_1!\ldots m_r!} \prod_{j=1}^{r} ((X_j+x_j)M_j(y))^{m_j}$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{r} (X_j+x_j)M_j(y)\Big)^{mn} = \Big(\sum_{i=1}^{n} L^{(i)}(X+x)y_i\Big)^{mn}$$

et

$$\frac{m!}{n(mn)!} \sum_{i_1=1}^{n} \Delta_{i_1}\Big(\sum_{i_2=1}^{n} L^{(i_2)}(X+x)y_{i_2}\Big)^{mn} = P_x^m(X) .$$

COROLLAIRE 9. - Si $\xi_i \neq 1$ pour tout i, pour tout $m \geq 0$

$$Z(P_x, \xi)(-m) = \sum_j \frac{\lambda_j(P_x^m)}{(1-\xi)^j} .$$

On peut maintenant montrer comment interpoler p-adiquement ces valeurs (ce qui permet de retrouver le théorème de Deligne-Ribet [6]). Soit p un nombre premier impair de $\mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire et

$\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que P satisfait la propriété suivante : il existe $P_1(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$ tel que

$$P_x(X_1, \dots, X_r) = P_1(pX_1, \dots, pX_r)$$

et $$P_1(0, \dots, 0) \equiv 1(p) .$$

On suppose aussi que $\xi_i \in \mathbb{C}_p$ et $|1-\xi_i| \geq 1$ pour tout i. On déduit alors du corollaire 9 que, pour tout $m \geq 0$

$$|Z(P_x, \xi)(-m)| \leq 1 .$$

On pose

$$\lambda_j(s) = \sum_{\ell_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{j_r} \binom{j_1-1}{\ell_1-1} \cdots \binom{j_r-1}{\ell_r-1} (-1)^{\ell_1+\dots+\ell_r-r} P_x(-\ell_1, \dots, -\ell_r)^s .$$

La fonction λ_j est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de fonctions exponentielles. De la propriété $\lambda_j(X^k) = 0$ si $j > k+1$, on tire

$$|\lambda_j(s)| \leq p^{\sum_i j_i - r} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}_p .$$

On en déduit donc que la série $\sum_j \frac{\lambda_j(s)}{(1-\xi)^j}$ est uniformément convergente et définit une fonction d'Iwasawa.

II. - Cas général

Dans le cas général, on obtient un résultat du même type que pour les séries de Shintani. Pour l'obtenir, on étudie

$$\Gamma(s)\, Z(P, Q, \xi)(s) = \int_0^\infty t^s \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}^r} Q(n)\, \xi^n\, e^{-P(n)t} \Big) \frac{dt}{t}$$

et on cherche le développement asymptotique au voisinage de zéro pour $t > 0$ de

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^r}{}' Q(n)\, \xi^n\, e^{-P(n)t}$$

à l'aide de la formule d'Euler Maclaurin [15]. Avec les hypothèses imposées au polynôme P le développement asymptotique est de la forme

$$\sum_{n \geq -\deg Q - \ell} a_n t^{n/\alpha} .$$

Si tous les ξ_i sont différents de 1, il est de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^{n/\alpha}$$

où a_o ne dépend pas du polynôme P .

Si l'on n'impose pas la condition $*$, la série $Z(P, Q, \xi)(.)$ peut avoir des pôles multiples et le développement asymptotique de $\sum'_{n\in\mathbb{N}^r} Q(n)\xi_n e^{-P(n)t}$ est de la forme $\sum_{n,m} a_{nm} (\mathrm{Log}\ t)^m t^{n/\alpha}$ [8], et les coefficients a_{nm} ne s'obtiennent pas par les méthodes précédentes.

Lorsque P vérifie des propriétés particulières, on peut utiliser une transformée de Mellin adaptée à P . Par exemple, dans le cas des séries de Shintani où P est un produit de n polynômes homogènes de degré 1 , on a utilisé $\Gamma(s)^n$.

Pour étudier les fonctions zêta associées à des cônes homogènes auto duaux, Satake [12] construit une fonction Γ associée au cône. La fonction dont on cherche le développement asymptotique est plus simple mais le domaine d'intégration peut être difficile à étudier [12].

Le théorème qui permet de calculer les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles est le suivant :

THÉORÈME 10. - <u>La série</u> $Z(P, Q, \xi)(.)$ <u>absolument convergente pour</u> $\mathrm{Re}(s) > \frac{\ell+\deg Q}{\alpha}$ <u>se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe dont tous les pôles sont simples et appartiennent à l'ensemble</u>

$$\left\{\frac{k}{\alpha}\ ,\ \underline{\text{avec}}\ k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\leq \ell+\deg Q\right\}\ .$$

<u>Pour tout</u> $k\in\mathbb{Z}$, $k\leq\ell+\deg Q$, <u>il existe un polynôme</u> $S_k\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_r]$ <u>tel que</u>

$$\lim_{s\to(k/\alpha)} \left(s-\frac{k}{\alpha}\right)\Gamma(s)\, Z(P,Q,\xi)(s) = \varphi_\xi(S_k)\ .$$

Le polynôme S_k est donné par les formules suivantes :

Posons

$$\mathcal{P}(X_1,\ldots,X_r,Y) = P_\alpha(X_1,\ldots,X_r) + Y\,P_{\alpha+1}(X_1,\ldots,X_r)+\ldots+Y^\alpha P_o(X_1,\ldots,X_r)\ .$$

On définit de la même façon le polynôme $\mathcal{Q}$. Posons

$$H(x_1,\ldots,x_r,y) = \mathcal{Q}(x_1,\ldots,x_r,y)\, e^{-\mathcal{P}(x_1,\ldots,x_r,y)}\ .$$

Soit S , la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^{r+1}$

$$S(x_1,\ldots,x_r,t) = \int_{(x_1+a_1)t}^{\infty}\cdots\int_{(x_r+a_r)t}^{\infty} H(t_1,\ldots,t_\ell,(x_{\ell+1}+a_{\ell+1})t,\ldots,(x_r+a_r)t,t)\,dt_1\ldots dt_\ell\ .$$

Alors le polynôme S_k est le polynôme associé à la fonction polynôme

$$S_k(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(\ell + \deg Q - k)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\ell + \deg Q - k)} S(x_1, \dots, x_r, t)\Big|_{t=0} .$$

On peut remarquer que le polynôme S_k vérifie

$$\frac{\partial^\ell}{\partial X_1 \dots \partial X_\ell} S_k(X_1, \dots, X_r) = Q P^{k'} \quad \text{où} \quad k = -k'\alpha$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

III. - Cas où les valeurs sont algébriques et interpolables p - adiquement

On déduit du théorème 8 les corollaires suivants :

COROLLAIRE 11. - Si $\xi_i \neq 1$ pour tout i, alors $Z(P, Q, \xi)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$Z(P, Q, \xi)(-k) = \sum_j \frac{\lambda_j(QP^k)}{(1-\xi)^j} .$$

COROLLAIRE 12. - Si $P(X_1, \dots, X_r) = X_1^\alpha + X_2^\alpha + \dots + X_r^\alpha$ et si

$$Q(X_1, \dots, X_r) = X_1^{\alpha-1} \dots X_\ell^{\alpha-1} \, Q_1(X_{\ell+1}, \dots, X_r)$$

alors $Z(P, Q, \xi)(.)$ a ℓ pôles qui se trouvent en $s = 1, \dots, \ell$. Pour tout entier $k \geq 0$

$$Z(P, Q, \xi)(-k) = \frac{k!}{(k+\ell)!} \varphi_\xi (P^{k+\ell} Q_1) .$$

Dans ces deux cas, il est clair que $Z(P, Q, \xi)(-k)$ appartient, pour tout k, au corps K, engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients de P, Q et les ξ_i .

Soit p un nombre premier impair. On suppose qu'il existe $P_1(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_r]$ tel que

$$P(X_1, \dots, X_r) = P_1(X_1, \dots, X_r) \quad \text{et}$$
$$P_1(0, \dots, 0) \equiv 1 \mod (p\, \mathbb{Z}_p) .$$

Choisissons un plongement τ de K dans $\mathbb{C}_p$. On suppose en outre que pour tout i tel que $\xi_i \neq 1$

$$|1 - \tau(\xi_i)| \geq 1$$

et $|\tau(Q(n))| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^r$. On a alors le

THÉORÈME 13. - Il existe une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p$, $f_\tau(P, Q, \xi)(.)$ telle que pour tout entier $k \geq 0$

$$f_\tau(P, Q, \xi)(-k) = \varphi_\xi(P^k Q) .$$

Si $\xi_i \neq 1$, pour tout i, alors f est une fonction d'Iwasawa.

La preuve est la même que pour les séries de Shintani.

Les applications essentielles de ce théorème, sont d'une part le théorème de Deligne-Ribet, d'autre part l'existence de fonctions p-adiques pour $P(X_1, \dots, X_r) = X_1 + \dots + X_r$ qui permettent de définir les analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples de Barnes [1].

Il faut encore noter qu'il existe des fonctions $Z(P, Q, \xi)(.)$ qui prennent des valeurs algébriques aux entiers négatifs et que l'on ne sait pas interpoler p-adiquement. C'est le cas des séries de Shintani si l'un des ξ_i est égal à 1.

IV. - Cas où les valeurs aux entiers négatifs ne sont pas algébriques

Il existe effectivement des cas où les valeurs ne sont pas algébriques. Par exemple

$$Z(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3, 1, 1)(0) = -\frac{8}{9} b_4 \Gamma(\tfrac{1}{3})^3 + b_1^4 \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

puisque $\Gamma(\frac{1}{3})$ est transcendant.

On va seulement faire ici quelques remarques sur ces valeurs lorsqu'elles ne sont pas algébriques.

On suppose P fixé homogène de degré α. On note K le corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients de P et les racines α-ièmes de l'unité. On suppose $\xi_i = 1$ pour tout i.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq \deg Q + r$, on note

$$Z(P, Q)(k)$$

pour désigner la valeur de $Z(P, Q)(.)$ pour $s = k$ si $-k \in \mathbb{N}$, ou le résidu pour $s = k$ si $k \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{E}_o$ le K-espace vectoriel engendré par les $Z(P, Q)(k)$ lorsque $Q \in K[X_1, \dots, X_r]$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq \deg Q + r$. On a le théorème

THÉORÈME 14. - <u>L'espace $\mathcal{E}_o$ est un K-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à α^{r-1} dont un système de générateurs est donné par</u>

$$Z(P, X_1^{v_1 - 1} \dots X_r^{v_r - 1})\left(\frac{\Sigma v_i}{\alpha}\right)$$

<u>où $(v_1, \dots, v_r)$ parcourt l'ensemble des r-uples d'entiers tels que</u> $\sum_{i=1}^{r} v_i \equiv 0 \mod (\alpha)$, $0 < v_i \leq \alpha$.

<u>Exemples</u>

Notons $a \underset{F}{\sim} b$ pour exprimer le fait que $a/b \in F$.

a) $P(X_1, X_2) = X_1^\alpha + X_2^\alpha$. La dimension de $\mathcal{E}_o$ est 1. En effet,

$$Z(P, X_1^{v_1 - 1} X_2^{v_2 - 1})\left(\frac{v_1 + v_2}{\alpha}\right) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \Gamma\left(\frac{v_1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{v_2}{\alpha}\right) \underset{K}{\sim} \pi$$

puisque $v_1 + v_2 \equiv 0 \mod \alpha$.

b) $P(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$. La dimension de $\mathcal{E}_o$ est 4. $\mathcal{E}_o$ a pour système de générateurs

$$Z(P, 1)(1) \quad ; \quad Z(P, XYZ)(2) \quad ; \quad Z(P, X^2Y^2Z^2)(3) \quad ; \quad Z(P, Y Z^2)(2) .$$

On a

$$Z(P, 1)(1) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)^3$$
$$Z(P, XYZ)(2) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)^3$$
$$Z(P, X^2Y^2Z^2)(3) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 1$$
$$Z(P, Y Z^2)(2) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right) \Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) .$$

On sait que $\Gamma(\frac{1}{3})$ et π sont algébriquement indépendants et donc $\mathcal{E}_o$ est de dimension 4.

On peut remarquer que dans tous les cas où le polynôme P est symétrique α^{r-1} est strictement supérieur à la dimension de $\mathcal{E}_o$, car on ne distingue pas les séries

$$Z(P, X_1^{v_1 -1} \dots X_r^{v_r -1})(s)$$

et
$$Z(P, X_1^{v_r -1} \dots X_r^{v_1 -1})(s)$$

On ne sait presque jamais calculer la dimension de $\mathcal{S}_o$. D'une part, lorsque l'on peut faire des calculs explicites on a des valeurs de fonctions Γ en des nombres rationnels, sur lesquelles on a peu de résultats, d'autre part dans la plupart des cas on ne sait pas faire de calculs explicites.

Le phénomène signalé pour les polynômes symétriques disparaît si l'on introduit les séries suivantes :

Soit μ_α le groupe des racines α-ième de l'unité. Pour tout $\zeta \in \mu_\alpha^r$ et tout polynôme Q tel que $\deg Q + r \equiv 0(\alpha)$, on définit

$$Z_\zeta(P,Q)(s) = \Sigma\, \zeta_1 \dots \zeta_r\, Q(\zeta_1 n_1, \dots, \zeta_r n_r)\, P(\zeta_1 n_1, \dots, \zeta_r n_r)^{-s} .$$

On voit que si ζ est un élément diagonal

$$Z_\zeta(P,Q)(s) = Z(P,Q)(s) .$$

On note $\bar{\mu}_\alpha^r$ le quotient de μ_α^r par les éléments diagonaux. On étudie alors la matrice

$$\mathfrak{X}_P = \left(Z_\zeta (P, X_1^{v_1 -1} \dots X_r^{v_r -1})\left(\frac{\Sigma v_i}{\alpha}\right)\right)_{\substack{\zeta \in \bar{\mu}_\alpha^r \\ \Sigma v_i \equiv 0(\alpha) \\ 0 < v_i \leq \alpha}}$$

THÉORÈME 15. - <u>Si les formes</u> $X_i \dfrac{\partial P}{\partial X_i}$ <u>n'ont pas de zéro commun non trivial, la matrice</u> $\mathfrak{X}_P$ <u>est inversible</u>.

Si le polynôme $P(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$, la matrice considérée est

$$\mathfrak{X}_P = \begin{pmatrix} \ldots, & Z_\zeta(P,1)(1), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,XYZ)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,XY^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,XZ^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,YX^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,YZ^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,ZX^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,ZY^2)(2), & \ldots \\ \ldots, & Z_\zeta(P,X^2Y^2Z^2)(2), & \ldots \end{pmatrix}_{\zeta\in\overline{\mu}_3^3} = \begin{pmatrix} \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})^3\,\zeta_1\zeta_2\zeta_3, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{2}{3})^3\,\zeta_1^2\zeta_2^2\zeta_3^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_1\zeta_2^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_1\zeta_3^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_2\zeta_1^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_2\zeta_3^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_3\zeta_1^2, & \ldots \\ \ldots, & \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\zeta_3\zeta_2^2, & \ldots \\ \ldots, & 1 & , \ldots \end{pmatrix}_{\zeta\in\overline{\mu}_3^3}$$

Etant donné un r-uple $(v_1,\ldots,v_r)$ satisfaisant $0 < v_i \leq \alpha$ et $\sum_{i=1}^{r} v_i \equiv 0(\alpha)$, notons

$$A = \{\, i \mid v_i \not\equiv 0(\alpha)\,\}\,.$$

Notons aussi P_A le polynôme déduit de P en faisant $X_i = 0$ pour $i \notin A$ et ζ_A le Card A-uple déduit de ζ en supprimant les composantes pour $i \notin A$. Il est facile de voir que

$$Z_\zeta(P, X_1^{v_1-1}\ldots X_r^{v_r-1})\Big(\frac{\Sigma\, v_i}{\alpha}\Big) \underset{K}{\sim} Z_{\zeta_A}\Big(P_A\,,\prod_{i\in A} X_i^{v_i-1}\Big)\Big(\frac{\sum_{i\in A} v_i}{\alpha}\Big)\,.$$

Les valeurs $Z_{\zeta_A}\Big(P_A\,,\prod_{i\in A} X_i^{v_i-1}\Big)\Big(\frac{\sum_{i\in A} v_i}{\alpha}\Big)$ peuvent alors s'identifier avec les périodes sur les variétés $P_A = 0$.

Prenons l'exemple de la courbe de Fermat $F(3)$

$$X_1^3 + X_2^3 = 1\,.$$

Röhrlich [7] a montré que la lattice des périodes de $F(3)$ relatif au choix des différentielles holomorphes $x_1^{r-1}\,x_2^{s-3}\,dx_1$ avec $0<r,\ s,\ t<3$ et $r+s+t \equiv 0 \bmod 3$ est l'espace engendré par

$$\left(\dots, \zeta^{rj+sk} (1-\zeta^r)(1-\zeta^s) \frac{\Gamma(\frac{r}{3})\,\Gamma(\frac{s}{3})}{3\Gamma(\frac{r+s}{3})}, \dots \right)_{\substack{0<r,s,t<3 \\ r+s+t=3 \\ 0<j,k<3}} .$$

On considère $Z_\zeta(P,1)(1)$ et $Z_\zeta(P,XYZ)(2)$. Alors $A = \{1,2,3\}$. On identifie $\bar{\mu}_3^3$ à μ_2^2 par

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \longmapsto (\zeta_1, \zeta_2, 1)$$

$$Z_{(\zeta^j,\zeta^k,1)}(P,1)(1) = \frac{1}{3}\,\zeta^{j+k}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\Gamma(\tfrac{1}{3})$$

$$Z_{(\zeta^j,\zeta^k,1)}(P,XYZ)(2) = \frac{1}{3}\,\zeta^{2j+2k}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\,\Gamma(\tfrac{2}{3}) .$$

L'identification avec les périodes dans ce cas est claire.

Cette identification est étudiée dans [5].

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. W. BARNES, On the theory of the multiple gamma function, Tran. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.

[2] P. CASSOU-NOGUÈS, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Inventiones Math. 51, 29-59 (1979).

[3] P. CASSOU-NOGUÈS, Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme, Ann. de l'Institut Fourier, 31, 4 (1981).

[4] P. CASSOU-NOGUÈS, Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme, I, J. Number Theory, 14, 1 (1982), 32-64.

[5] P. CASSOU-NOGUÈS, Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme, II, (soumis à l'American Journal of Maths).

[6] P. DELIGNE, K. RIBET, Values of abelian L-functions at negative integers, Inventiones Math. 59 (1980), 227-286.

[7] D. GROSS, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg (with an appendix by D. E. Röhrlich), Inventiones Math. 45 (1978), 193-211.

[8] P. JEANQUARTIER, Transformation de Mellin et développements asymptotiques, Enseign. Math. 25 (1979), 285-308.

[9] K. KLINGEN, Über die Werte der Dedekindsche Zetafunktion, Math. Annalen 145 (1962), 265-272.

[10] H. MELLIN, Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichen Geschlecht, Acta Soc. Scient. fennicae 29 (1900), n° 4.

[11] P. SARGOS, Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables (à paraître).

[12] I. SATAKE, Special values of zeta functions associated with self dual homogenous cones, Progress in Mathematics, vol. 14 (1981), 359-384.

[13] T. SHINTANI, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, J. of Fac. of Sc. Univ. of Tokyo, section 1, 23 (1976), 393-417.

[14] C. L. SIEGEL, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Annals of Math. Series 2, 38 (1937), 212-291.

[15] E.T. WHITTAKER and G.N. WATSON, A course of Modern Analysis, Cambridge University Press (1965).

-:-:-:-

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
L.A. au C.N.R.S. n° 226
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
F 33405 TALENCE CEDEX