Astérisque

GÉRARD LAUMON

Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 193-207

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__193_0>

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARE
DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES SUR UNE
SURFACE

par

Gérard LAUMON (Orsay*)

-:-:-

Le point de départ de ce travail est une lettre de Deligne à Illusie [1] où Deligne énonce les résultats principaux de cet exposé et en indique une méthode de démonstration.

Je tiens à remercier Illusie qui m'a signalé ce problème et qui a dirigé avec beaucoup de patience ce travail. Je tiens aussi à remercier Deligne et Gabber qui m'ont aidé à résoudre de nombreuses difficultés.

Les détails des démonstrations de cet exposé seront publiés ultérieurement.

1. Introduction.

1.0. Soit X une courbe connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos, soient U un ouvert dense de X, $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible dans k et $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U. Alors, la caractéristique d'Euler-Poincaré

(1.0.1) $$\chi_c(U,\mathcal{F}) \overset{\text{dfn}}{=} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_\lambda} H^i_c(U,\mathcal{F})$$

se calcule par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4]

(1.0.2) $$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi_c(U)\operatorname{rang}(\mathcal{F}) - \sum_{x\in X-U} Sw_x(\mathcal{F})$$

où, pour $x\in X-U$, $Sw_x(\mathcal{F})$ est un entier, appelé conducteur de

----

* Equipe de recherche associée au C.N.R.S. n°653.

Swan de $\mathfrak{F}$ en x, qui mesure la ramification sauvage de $\mathfrak{F}$ en x ; en particulier, $\mathfrak{F}$ est modérément ramifié en x (condition automatiquement vérifiée si k est de caractéristique nulle) si et seulement si $Sw_x(\mathfrak{F}) = 0$.

1.1. Soit maintenant X une surface connexe, normale, projective sur le corps k, soient U un ouvert dense de X et $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U(k et $\mathbb{F}_\lambda$ étant comme en 1.0). Alors on s'attend à une formule du type

$$(1.1.1)\qquad \chi_c(U,\mathfrak{F}) = \chi_c(U)\mathrm{rang}(\mathfrak{F}) + \Sigma(\text{termes dépendant de la ramification de } \mathfrak{F} \text{ le long de } X\text{-}U)\ .$$

Ceci nous amène à étudier la ramification de $\mathfrak{F}$ le long de X-U. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de Y=X-U qui sont de codimension 1 dans X. Pour chaque $i\in I$, notons δ_i le point générique de Y_i et $X_{(\delta_i)}$ l'hensélisé de X en δ_i. Deux types de ramification de $\mathfrak{F}$ en δ_i sont possibles : soit il existe une extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ ayant une extension résiduelle séparable et qui trivialise le faisceau $\mathfrak{F}|U\times_X X_{(\delta_i)}$, soit toute extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ qui trivialise le faisceau $\mathfrak{F}|U\times_X X_{(\delta_i)}$ a une extension résiduelle non séparable. Dans le premier cas, nous dirons que le faisceau $\mathfrak{F}$ est *non férocement ramifié le long de* Y_i et, dans le second cas, que le faisceau $\mathfrak{F}$ est *férocement ramifié le long de* Y_i.

1.2. Nous ne traiterons dans cet exposé que du cas non féroce. Dans ce cas, pour chaque $i\in I$, il existe un ouvert dense Y_i° de Y_i et un entier $Sw_i(\mathfrak{F})$ (cf. 2.2) ayant la propriété suivante : si C est un germe de courbe tracée sur X et transverse à Y en un point x de Y_i°, alors le conducteur de Swan en x du faisceau $\mathfrak{F}|U\times_X C$ est égal à $Sw_i(\mathfrak{F})$. Le résultat principal de cet exposé est le suivant :

Théorème 1.2.1. Pour chaque point fermé x de X, on peut définir un entier $Sw_x(\mathcal{F})$ qui ne dépend que du germe de $\mathcal{F}$ en x, i.e. du faisceau $\mathcal{F}|U\times_X X_{(x)}$ où $X_{(x)}$ est l'hensélisé de X en x, et ayant les propriétés suivantes :

(i) si $x\in U$, $Sw_x(\mathcal{F}) = \mathrm{rang}(\mathcal{F})$,

(ii) si $x\in Y_i^\circ$ pour un $i\in I$, $Sw_x(\mathcal{F}) = -Sw_i(\mathcal{F})$,

(iii) si l'on pose $Y^\circ = \bigcup_{i\in I} Y_i^\circ$, on a

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi_c(U)\mathrm{rang}(\mathcal{F}) - \sum_{i\in I}\chi_c(Y_i^\circ)Sw_i(\mathcal{F}) + \sum_{x\in Y-Y^\circ} Sw_x(\mathcal{F}). \tag{1.2.1.1}$$

2. Définition des entiers $Sw_i(\mathcal{F})$ et $Sw_x(\mathcal{F})$.

2.1. Pour chaque $i\in I$, notons A_i l'anneau de valuation discrète hensélien tel que $X_{(\delta_i)}=\mathrm{Spec}(A_i)$, notons K_i le corps des fractions de A_i, de sorte que $U\times_X X_{(\delta_i)}=\mathrm{Spec}(K_i)$, et fixons une clôture séparable K_i^{sep} de K_i. Un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Spec}(K_i)$ n'est autre qu'un $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i)]$-module fini ; notons M_i le $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i)]$-module fini correspondant à $\mathcal{F}|U\times_X X_{(\delta_i)}$ et $\rho_i : \mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i)\to GL(M_i)$ la représentation galoisienne associée. Le noyau de ρ_i est de la forme $\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/L_i)$ où L_i est une sous-extension de K_i^{sep}/K_i finie galoisienne. Alors dire que $\mathcal{F}$ est non-férocement ramifié le long de Y_i revient à dire que l'extension résiduelle de L_i/K_i (relativement à l'anneau de valuation discrète A_i) est séparable. Par définition $Sw_i(\mathcal{F})$ sera le conducteur de Swan du $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(L_i/K_i)]$-module fini M_i (cf. [6] 19.3).

2.2. On définit maintenant, pour chaque $i\in I$, l'ouvert dense Y_i° de Y_i de la façon suivante : on commence par considérer l'ouvert dense $Y_i^{\circ\circ}$ de Y_i formé des points x de Y_i en lesquels (X,Y) est un k-couple lisse ; si l'on fait passer par un point x de $Y_i^{\circ\circ}$ un germe de courbe C transverse à Y_i en x, le conducteur de Swan, $Sw_x(\mathcal{F}|C)$, du faisceau

$\mathcal{F}|U\times_X C$ en x est bien défini et il existe un ouvert dense Y_i° de $Y_i^{\circ\circ}$ tel que $Sw_x(\mathcal{F}|C) = Sw_i(\mathcal{F})$ pour tout $x \in Y_i^{\circ}$ et tout germe de courbe C transverse à Y en x.

Exemple 2.2.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, $X=\mathrm{Spec}(k[x,y])$, $U=X[1/y]$, $Y=X-U$, n un entier strictement positif, $\psi:\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_\lambda^*$ un caractère additif non trivial et $\mathcal{F}=\mathcal{L}(\psi,x/y^n)$ le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$-torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p-t=x/y^n$ par extension du groupe structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda^*$ via ψ^{-1}. Notons $A=k(x)\{y\}$ l'hensélisé de $k[x,y]$ au point générique de Y, K son corps des fractions, $L=K[t]/(t^p-t-x/y^n)$ et B le normalisé de A dans L ; alors L/K est une extension galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{F}|\mathrm{Spec}(K)$ est le faisceau associé à la représentation galoisienne $\psi^{-1}:\mathrm{Gal}(L/K)=\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_\lambda^*=GL(1,\mathbb{F}_\lambda)$; cette représentation est fidèle (ψ est non trivial), donc $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si l'extension résiduelle de B/A est séparable.

Montrons que $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si n est premier à p. Pour cela, notons $v:L-\{0\}\to\mathbb{Q}$ la valuation de B normalisée par $v(y)=1$, e l'indice de ramification de B/A et f le degré de l'extension résiduelle ; on a $v(L-\{0\}) = \mathbb{Z}[1/e]$ et $e.f = p$. Comme $t^p-t = x/y^n$, on a $v(t) = -n/p$. Si $(n,p)=1$, $v(t)\notin\mathbb{Z}$ et $e=p$, $f=1$, donc $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y. Si $n=m.p$, avec $m\in\mathbb{N}$, alors $v(ty^m)=0$ et $v(ty^n)>0$, donc, si on réduit la relation $(ty^m)^p-ty^n=x$ modulo l'idéal maximal de B, on voit que x admet une racine p-ième dans le corps résiduel de B ; comme x n'admet pas de racine p-ième dans k(x), l'extension résiduelle de B/A est non triviale et purement inséparable, donc $\mathcal{F}$ est férocement ramifié le long de Y.

Supposons maintenant $(n,p)=1$ de sorte que l'on est dans le cas non féroce, alors le conducteur de Swan de $\mathcal{F}$ au point générique de Y, $Sw_Y(\mathcal{F})$, est égal à n (cf. [7]4.4).

Si C est le germe de courbe d'équation $x=\phi(y)$, où $\phi(y)\in k[[y]]$, on a $Sw_{(\phi(0),0)}(\mathcal{F}|C) = n$ si $\phi(0)\neq 0$ et $Sw_{(0,0)}(\mathcal{F}|C) < n$ si $\phi(0)=0$, donc $Y^{\circ}= Y-\{(0,0)\}$.

2.3. Pour tout point fermé x de X, nous appellerons <u>projection locale en</u> x tout k-morphisme $f:X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ tel que $f(x)=0$ ($X_{(x)}$ désignant l'hensélisé de X en x). On dira qu'une projection locale f en x est <u>bonne</u> si f est essentiellement lisse en dehors de x et si $f|Y\times_X X_{(x)} \to (\mathbb{A}^1_k)_{(0)}$ est fini étale en dehors de x.

Choisissons un clôture séparable du corps des fractions de l'hensélisé de $\mathbb{A}^1_k$ en 0 et notons I le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{A}^1_k)_{(0)}$ correspondant à cette clôture séparable. A toute projection locale en x, $f:X_{(x)}\to A^1_k$, on peut associer alors un foncteur, dit foncteur "cycles évanescents" (cf. [2]),

$$(2.3.1) \qquad R\Psi(-,f)_x : D^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda) \to D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$$

où $D^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda)$ est la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur X à cohomologie bornée constructible et où $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$ est la catégorie dérivée des complexes de $\mathbb{F}_\lambda[I]$-modules à cohomologie bornée et de dimension finie sur $\mathbb{F}_\lambda$. En passant aux groupes de Grothendieck de ces catégories on a donc un homomorphisme

$$(2.3.2) \qquad \Psi(-,f)_x : K^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda) \to K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]).$$

D'autre part, si V est un $\mathbb{F}_\lambda[I]$-module fini, on pose

$$(2.3.3) \qquad \mathrm{dimtot}(V) = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(V) + Sw(V)$$

où le conducteur de Swan, Sw(V), est défini de la même façon qu'en 2.1. La fonction dimtot(-) est additive donc fournit un homomrphisme de groupes

$$(2.3.4) \qquad \mathrm{dimtot}(-) : K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]) \to \mathbb{Z}$$

<u>Définition</u> 2.3.5. <u>Pour tout point fermé</u> x <u>de</u> X <u>et pour toute bonne projection locale</u> f <u>en</u> x, <u>on pose</u>

$$(2.3.5.1) \qquad Sw_x(\mathcal{F},f) = -\mathrm{dimtot}\,[\Psi(F,f)_x]$$

où $F \in K_c^b(X, \mathbb{F}_\lambda)$ *est le faisceau virtuel défini par*

(2.3.5.2) $$F = [u_!\mathcal{F}] - \mathrm{rang}(\mathcal{F}).[\mathbb{F}_{\lambda,U}] + \sum_{i\in I} Sw_i(\mathcal{F}).[\mathbb{F}_{\lambda,Y_i^\circ}],$$

$u : U \to X$ *désignant l'inclusion et* $\mathbb{F}_{\lambda,Z}$ *désignant le faisceau constant* $\mathbb{F}_\lambda$ *sur* Z *prolongé par* 0 *à* X *tout entier, pour toute partie localement fermée* Z *de* X.

Théorème 2.3.6. *Pour tout point fermé* x *de* X, $Sw_x(\mathcal{F}, f)$ *est indépendant de la bonne projection locale en* x *choisie*.

Définition 2.3.7. *Pour tout point fermé* x *de* X, $Sw_x(\mathcal{F})$ *sera la valeur commune des* $Sw_x(\mathcal{F}, f)$ *pour* f *parcourant les bonnes projections locales en* x.

Exemples 2.3.8 . a) Si $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$, $x = (x_1, x_2)$ où X_1, X_2 sont deux courbes lisses sur k et où $\mathcal{F}_i$ est un faisceau constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels localement constant sur $X_i - \{x_i\}$ $(i=1,2)$, alors

$$Sw_x(\mathcal{F}) = Sw_{x_1}(\mathcal{F}_1).Sw_{x_2}(\mathcal{F}_2).$$

b) Si $\mathcal{F}$ est modérément ramifié au point x de Y, au sens où les pro-p-groupes de $\pi_1(U \times_X X_{(x)}, t)$ agissent trivalement sur $\mathcal{F}_t$ pour tout point géométrique t de $U \times_X X_{(x)}$, alors $Sw_x(\mathcal{F}) = 0$.

c) Si $f(x,y) \in k[x,y]$ présente en $(0,0)$ une singularité isolée et si dans la résolution de cette singularité les multiplicités qui apparaissent sont inversibles dans k, on a, pour tout caractère additif non trivial $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_\lambda^*$,

$$Sw_{(0,0)}(\mathcal{L}(\psi, 1/f(x,y))) = 1 - \mu_{(0,0)}(f)$$

où $\mathcal{L}(\psi, 1/f(x,y))$ est le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $U = \mathrm{Spec}(k[x,y,1/f(x,y)])$ obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$-torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p - t = 1/f(x,y)$ par extension du groups structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda$ via ψ^{-1}.

3. Principe de la méthode des pinceaux.

3.1. Fibrons la surface par un pinceau d'hyperplans relativement à un plongement projectif de X arbitraire pour l'instant. On choisit le pinceau de telle sorte que son axe ne rencontre pas Y, ni le lieu singulier de X et soit transverse à X. Notons

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \tilde{f}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^1_k & & \end{array} \tag{3.1.1}$$

la variété d'incidence du pinceau et $f:X\cdots\to\mathbb{P}^1_k$ l'application rationnelle donnée par le pinceau et définie en dehors de l'axe.

Pour prouver (1.2.1.1), on doit montrer que $\chi(X,F)$ (pour F défini en (2.3.5.2)) est somme des $Sw_x(\mathfrak{F})$ pour x parcourant Y-Y°. Pour cela on va calculer $\chi(X,F)$ à l'aide du pinceau. On vérifie sans peine que

$$\chi(X,F) = \chi(\tilde{X},\pi^*F) \tag{3.1.2}$$

et, compte-tenu de la suite spectrale de Leray pour $\tilde{f}$, on a

$$\chi(\tilde{X},\pi^*F) = \chi(\mathbb{P}^1_k,\tilde{f}_*\pi^*F). \tag{3.1.3}$$

Or, par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4], on a

$$\chi(\mathbb{P}^1_k,\tilde{f}_*\pi^*F) = \chi(\mathbb{P}^1_k)\chi(\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta}),\pi^*F) - \sum_{t\in\mathbb{P}^1_k(k)} a_t(\tilde{f}_*\pi^*F), \tag{3.1.4}$$

avec les notations suivantes : $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbb{P}^1_k$, pour tout faisceau constructible $\mathcal{G}$ de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $\mathbb{P}^1_k$ et pour tout $t\in\mathbb{P}^1_k(k)$, on pose

$$a_t(\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(\mathcal{G}_{\bar{\eta}}) + Sw_t(\mathcal{G}) - \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(\mathcal{G}_t) \tag{3.1.5}$$

et l'on étend a_t par additivité à $K^b_c(\mathbb{P}^1_k,\mathbb{F}_\lambda)$. La formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic entraine d'autre part :

$$\chi(\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta}),\pi^*F) = 0. \tag{3.1.6}$$

Par suite, on a :

$$\chi(X,F) = -\sum_{t\in\mathbb{P}^1_k(k)} a_t(\tilde{f}_*\pi^*F). \tag{3.1.7}$$

La théorie des cycles évanescents [2], relativement à chaque trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$, $t\in\mathbb{P}^1_k(k)$, permet de localiser le second membre de (3.1.7) aux points de non locale acyclicité du triplet $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$. Plus précisément, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ soit fini, alors la théorie des cycles évanescents relativement au trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$ permet d'expliciter $a_t(\tilde{f}_*\pi^*F)$ sous la forme

$$a_t(\tilde{f}_*\pi^*F) = \sum_{\substack{\tilde{x}\in\tilde{X}(k)\\ \tilde{f}(\tilde{x})=t}} \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}], \tag{3.1.8}$$

où l'on a posé

$$\Phi(-,\tilde{f})_{\tilde{x}} = \Psi(-,\tilde{f})_{\tilde{x}} - (-)_{\tilde{x}} \tag{3.1.9}$$

dans $\mathrm{Hom}(K^b_c(\tilde{X},\mathbb{F}_\lambda),K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]))$, I désignant le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$ et Ψ, dimtot ayant la même signification qu'en 2.3. Donc, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ soit fini, on peut réécrire (3.1.7) sous la forme

$$\chi(X,F) = -\sum_{\tilde{x}\in\tilde{X}} \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}], \tag{3.1.10}$$

où le second membre est en fait une somme finie indexée par les points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$.

3.2. Choisissons maintenant le pinceau de telle sorte que :

a) son axe ne rencontre ni Y, ni le lieu singulier de X et soit transverse à X,

b) sa fibre générale ne rencontre pas le lieu singulier de X, ni $Y-Y^\circ$ et soit transverse à X et à Y,

c) chacune de ses fibres soit génériquement transverse à X.

Alors, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ en dehors de $\pi^{-1}(Y)$ (les points singuliers de $\tilde{f}|\pi^{-1}(U)$) et, comme on a pris soin d'ôter à $\mathcal{F}$ le faisceau constant de même rang sur U, on a, pour tout $\tilde{x}\in\tilde{X}-\pi^{-1}(Y)$,

$$\text{(3.2.1)} \qquad \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}] = 0.$$

D'autre part, pour un point $\tilde{x}\in\pi^{-1}(Y)$, comme l'axe du pinceau ne rencontre pas Y, f est définie en $x=\pi(\tilde{x})$ et

$$\text{(3.2.2)} \qquad \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}] = \mathrm{dimtot}[\Phi(F,f)_x].$$

De plus, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de (X,f,F) sur Y : d'une part les points de $Y-Y^\circ$, d'autre part les points de tangence du pinceau avec Y°, i.e. les points $y\in Y^\circ$ tels que la section du pinceau qui passe par y ne soit pas transverse à Y° en y. Cela résulte en effet du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan démontré par Deligne ([5]) et dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 3.2.3. Soient S un trait strictement local, $f:X\to S$ une S-courbe lisse (f séparé, lisse purement de dimension relative 1), $Y\subset X$ un fermé fini et plat sur S, $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible sur S, $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels, de rang constant r, sur $U=X-Y \overset{u}{\hookrightarrow} Y$. Alors, si l'on pose, pour tout $t\in S$ (t désigne donc soit le point fermé s de S, soit le point générique η de S),

$$\phi(t) = \sum_{y\in Y_{\bar{t}}} [\mathrm{Sw}_y(\mathcal{F}|U\times_X X_{\bar{t}}) + r],$$

où $\bar{t}$ est un point géométrique arbitraire localisé en t et où $X_{\bar{t}}$ (resp. $Y_{\bar{t}}$) est la fibre en $\bar{t}$ de f (resp. $f|Y$), on a

$$\phi(s) - \phi(\eta) = -\sum_{y\in Y_s} \dim_{\mathbb{F}_\lambda}[R\Psi^1(u_!\mathcal{F},f)_y],$$

les autres $R\Psi^i(u_!\mathcal{F},f)_y$ étant nuls ($i\neq 1$, $y\in Y_s$).

Par définition de Y°, il en résulte que, dans notre situation, si $x\in Y^\circ$ et si $f^{-1}(f(x))$ est lisse et transverse à Y° en x, on a $R\Psi(u_!\mathcal{F},f)_y=0$, ce qui entraîne facilement $\mathrm{dimtot}[\Phi(F,f)_x]=0$.

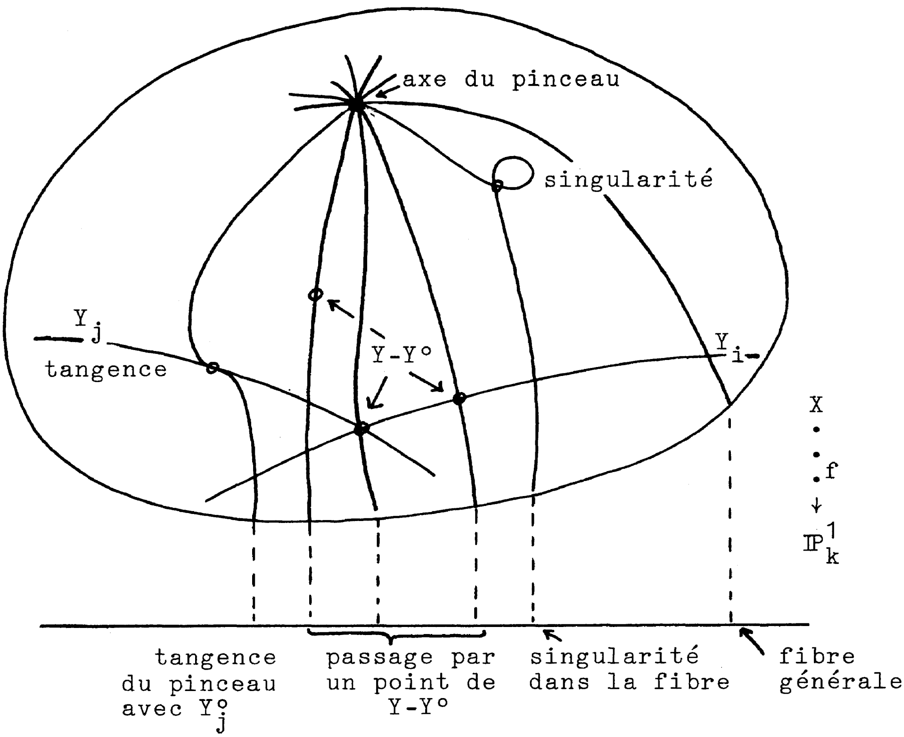

Figure 3.2.4. Les divers types de points de non locale acyclicité de (X,f,F).

Pour un pinceau vérifiant les conditions a), b) et c) ci-dessus, on a donc

$$(3.2.5) \qquad \chi(X,F) = \sum_{x\in Y-Y^o} Sw_x(\mathcal{F},f) - \underset{\substack{y\in Y^o \\ y \text{ tangence}}}{} \mathrm{dimtot}[\Phi(F,f)_x].$$

Pour prouver (1.2.1.1), il reste donc à montrer que la contribution des tangences est nulle et à prouver 2.3.6.

4. Démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

Nous nous bornerons à indiquer les principales étapes de la démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

4.0. Pour tout plongement projectif $\tau : X \hookrightarrow P = \mathbb{P}_k^m$ de X, notons $P^{\vee}$ l'espace projectif dual de P, Grass(1,$P^{\vee}$) la grassmannienne des droites de P et $W(\tau)$ l'ouvert de Grass(1,$P^{\vee}$) dont les points fermés sont les pinceaux d'hyperplans de P, $(H_t)_{t\in D}$, qui vérifient les conditions suivantes :

(i) l'axe, $\Delta = \bigcap_{t\in D} H_t$, de D ne rencontre ni Y, ni le lieu singulier de X et est transverse à X ;

(ii) il existe un ensemble fini de points fermés de D, S, tel que, si $t\in D-S$, H_t ne rencontre pas Y-Y°, ni le lieu singulier de X et est transverse à X et à Y ;

(iii) S est réunion disjointe de trois ensembles finis de points fermés de D, S_{sing}, S_{excp} et S_{tang}, caractérisés par:

a) si $t\in S_{sing}$, H_t est transverse à X sauf en un point x_t, $x_t \in X-Y$, H_t ne rencontre pas Y-Y° et H_t est transverse à Y,

b) si $t\in S_{excp}$, H_t coupe Y-Y° en un point et un seul, x_t, H_t ne rencontre pas le lieu singulier de X en dehors de x_t et H_t est transverse à X et à Y en dehors de x_t,

c) si $t\in S_{tang}$, H_t ne rencontre ni le lieu singulier de X, ni Y-Y°, H_t est transverse à X et H_t est transverse à Y sauf en un point x_t, qui est un point singulier quadratique ordinaire de $Y.H_t$ (cf.[3]1.2).

D'autre part, pour tout entier d>0, notons $\tau_{(d)} : X \hookrightarrow P_{(d)}$ le d-ième multiple du plongement τ ($P_{(d)} = \mathbb{P}_k^{m(d)}$ où m(d) est égal à $\binom{m+d}{d}-1$).

<u>Lemme</u> 4.0.1. <u>Pour tout plongement projectif</u> $\tau : X \hookrightarrow P$ <u>de</u> X <u>et tout entier</u> $d\geq 2$, $W(\tau_{(d)})$ <u>est un ouvert dense de</u> Grass(1,$P^{\vee}$).

4.1. Soit $\tau : X \hookrightarrow P$ un plongement projectif de X tel que $W(\tau)$ soit non vide, alors il existe un ouvert dense $W^{\circ}(\tau)$ de $W(\tau)$ et des entiers $S_x(\tau)$ ($x\in Y-Y^{\circ}$), $T_i(\tau)$ ($i\in I$) ayant la propriété suivante : pour tout $D\in W^{\circ}(\tau)$, si $f_D : X \cdots\to D$ désigne la projection associée à ce pinceau (f_D est définie en dehors de l'axe de D), on a

$$Sw_x(\mathcal{F}, f_D) = S_x(\tau) \qquad (x\in Y-Y^{\circ})$$

et

$$\operatorname{dimtot}[\Phi(F,f_D)_{x_t}] = T_i(\tau) \qquad (t\in S_{tang},\ x_t\in Y_i^\circ).$$

4.2. Pour tout point fermé x de X et tout $N\in\mathbb{N}$, notons $J_{N,x}$ le schéma des jets à l'ordre N, i.e. modulo $m_{X,x}^{N+1}$, de bonnes projections locales $f:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ en x. Si $x\in Y^\circ$, notons $J_{N,x}^{tg}$ la partie localement fermée de $J_{N,x}$ formée des jets de projections locales $f:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ qui sont lisses et telles que $f|Y\times_X X_{(x)}$ présente en x une singularité quadratique ordinaire ([3]1.2). Alors

a) pour tout $x\in Y-Y^\circ$, il existe $N_x>0$ et un ouvert dense de $J_{N_x,x}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert et si $f,g:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales en x qui admettent j comme jet à l'ordre N_x, alors

$$Sw_x(\mathcal{F},f) = Sw_x(\mathcal{F},g) \ ;$$

b) pour tout $i\in I$, il existe $N_i>0$ et, pour tout $x\in Y_i^\circ$, un ouvert dense de $J_{N_i,x}^{tg}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert et si $f,g:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales qui admettent j comme jet à l'ordre N_i, alors

$$\operatorname{dimtot}[\Phi(F,f)_x] = \operatorname{dimtot}[\Phi(F,g)_x].$$

4.3. Il existe un entier $N\geqslant 2$ et, pour tout $x\in Y-Y^\circ$ (resp. pour tout $i\in I$), un entier S_x (resp. T_i) ayant la propriété suivante : si $\tau:X\hookrightarrow P$ est un plongement projectif de X et si $d\geqslant N$, alors

$$S_x(\tau_{(d)}) = S_x \qquad (x\in Y-Y^\circ)$$

(resp. $$T_i(\tau_{(d)}) = T_i \qquad (i\in I)).$$

4.4. Il résulte de 3.2.5, 4.1 et 4.3 que, pour tout plongement projectif $\tau:X\hookrightarrow P$ et tout entier $d\geqslant N$ (N étant l'entier défini en 4.3), on a

$$\chi(X,F) = \sum_{x\in Y-Y^\circ} S_x - \sum_{i\in I} \deg^\vee(Y_i,\tau_{(d)}).T_i, \tag{4.4.1}$$

où, pour toute courbe C tracée sur X, $\deg^\vee(C,\tau_{(d)})$ désigne le degré de la variété duale de C relativement au plongement projectif $\tau_{(d)}|C:C\hookrightarrow X\hookrightarrow P_{(d)}$.

Or, il existe des entiers $a_i(\tau)>0$ et $b_i(\tau)$ tels que pour tout d assez grand on ait

(4.4.2) $$\deg^{\vee}(Y_i,\tau_{(d)}) = a_i(\tau).d + b_i(\tau)$$

donc (4.4.1) n'est tenable que si

(4.4.3) $$\sum_{i\in I} a_i(\tau).T_i = 0.$$

4.5. Fixons $i_o\in I$, nous voulons montrer que $T_{i_o}=0$. Il existe existe une surface X' connexe, normale, projective sur k et $r:X'\to X$ fini, étale au dessus du point générique δ_{i_o} de Y_{i_o} et tel que $r^*\mathcal{F}$, qui est à priori localement constant sur $r^{-1}(U)$, se prolonge en un faisceau localement constant constructible $\mathcal{F}'$ au dessus de l'ouvert U' de X' défini par $U'=X'-(r^{-1}(Y_{i_o})\cup r^{-1}(Y-\bigcup_{i\in I} Y_i))$. Notons $(Y'_{i'})_{i'\in I'}$ la famille des composantes irréductibles de codimension 1 dans X' de $Y'=X'-U'$. Alors, le faisceau $\mathcal{F}'$ est non férocement ramifié le long des $Y'_{i'}$, et, comme on a associé ci-dessus un enti-er T_i à $(X,\mathcal{F})$ et à chaque $i\in I$, on peut associer un entier $T_{i'}$ à $(X',\mathcal{F}')$ et à chaque $i'\in I'$. Il résulte de 4.2 que

(4.5.1) $$T_{i'} = T_{i_o} \qquad (\forall i'\in I').$$

Or (4.4.3) s'applique à $(X',\mathcal{F}')$ et donc, pour tout plongement projectif $\tau':X'\hookrightarrow P'$, on a un relation

(4.5.2) $$\sum_{i'\in I'} a_{i'}(\tau').T_{i'} = 0$$

où les $a_{i'}(\tau')$ sont strictement positifs. Combinant (4.5.1) et (4.5.2), on obtient

(4.5.3) $$\sum_{i'\in I'} a_{i'}(\tau').T_{i_o} = 0$$

d'où $T_{i_o}=0$. Par suite on a montré que

(4.5.4) $$\chi(X,F) = \sum_{x\in Y-Y^o} S_x.$$

4.6. Il ne reste plus qu'à prouver 2.3.6 et l'égalité $S_x = Sw_x(\mathfrak{F})$ pour tout $x \in Y - Y^o$. On va le faire par passage du local au global. Soit $f : X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ une bonne projection locale, alors il existe un entier N_f tel que, si $g : X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ est une autre bonne projection locale ayant même jet à l'ordre N_f que f, on ait

$$Sw_x(\mathfrak{F}, g) = Sw_x(\mathfrak{F}, f).$$

D'autre part, il existe un plongement projectif $\tau : X \hookrightarrow P$ tel que $W(\tau) \neq \emptyset$ et un pinceau $D \in W(\tau)$ tel que f et f_D aient même jet à l'ordre N_f en x ; de plus, on peut imposer à D d'être tel que

$$(4.6.1) \qquad Sw_{x'}(\mathfrak{F}, f_D) = S_{x'}, \qquad (\forall x' \in Y - Y^o - \{x\})$$

et que

$$(4.6.2) \qquad \mathrm{dimtot}\left[\Phi(F, f_D)_{x_t}\right] = T_i = 0 \quad (\forall t \in S_{tang},\ x_t \in Y_i^o).$$

Alors, si on calcule $\chi(X, F)$ à l'aide de f_D, on obtient par (3.2.5)

$$(4.6.3) \qquad \chi(X, F) = Sw_x(\mathfrak{F}, f) + \sum_{\substack{x' \in Y - Y^o \\ x' \neq x}} S_{x'} \ ;$$

par suite, si l'on compare avec (4.5.4), on voit que

$$(4.6.4) \qquad Sw_x(\mathfrak{F}, f) = S_x$$

et 2.3.6 est démontré ainsi que l'égalité $S_x = Sw_x(\mathfrak{F})$.

<u>Remarque</u> 4.6.5. Si l'on part d'une situation locale $(\overline{X}, \overline{\mathfrak{F}})$, où $\overline{X}$ est un schéma strictement local normal, de dimension 2, essentiellement de type fini sur k et où $\overline{\mathfrak{F}}$ est un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur un ouvert dense $\overline{U}$ de $\overline{X}$, faisceau que l'on suppose non férocement ramifié le long de $\overline{X} - \overline{U}$, alors on peut montrer qu'il existe une surface normale, projective sur k, X, un ouvert dense U de X, un faisceau $\mathfrak{F}$ localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U, non férocement ramifié le long de X-U, et un point fermé x de X tels que $\overline{X} = X_{(x)}$, $\overline{U} = U \times_X X_{(x)}$ et $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} | U \times_X X_{(x)}$ (ce point est dû à Gabber). Par suite, l'énoncé 2.3.6 admet une variante purement locale qui se démontre par voie globale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.DELIGNE.- Lettre à L.Illusie, 28 novembre 1976.

[2] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XIII. Le formalisme des cycles évanescents. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 82-115.

[3] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XV. La formule de Picard-Lefschetz. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 165-196.

[4] A.GROTHENDIECK.- Cohomologie ℓ-adique et fonctions L (SGA 5) X. Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale (rédigé par I.BUCUR). Springer Lecture Notes in Math. 589, Springer-Verlag (1977) p. 372-406.

[5] G.LAUMON.- Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P.DELIGNE). Séminaire de l'ENS 1978-79. Astérisque n°82-83 (1980) p.173-219.

[6] J.P.SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis. Troisième édition corrigée, Hermann, Paris (1978).

[7] J.P.SERRE.- Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), p. 105-154.

G.LAUMON

Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques
Bat.425
91405 Orsay cedex