Astérisque

MARC CHAPERON

Quelques outils de la théorie des actions différentiables

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 259-275

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__259_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.259-275

QUELQUES OUTILS DE LA THÉORIE DES ACTIONS DIFFÉRENTIABLES(*).

Marc CHAPERON

L'auteur, tenant à s'associer à l'hommage rendu à Georges Reeb, prie les participants du "Schnepf" de lui pardonner la distance entre ce texte et son exposé, lequel avait déjà fait l'objet d'une publication [2].

Introduction. L'étude des actions différentiables de groupes de Lie au voisinage de leurs points fixes (ou, plus généralement, de leurs orbites à groupe d'isotropie non trivial) a occupé plus ou moins récemment de nombreux mathématiciens. Par cet article, nous espérons donner une idée de méthodes très simples employées en la matière - et dont certaines sont dues à l'auteur.

1. Linéarisation d'actions de groupes compacts préservant diverses structures.

Les objets de cette section sont, au choix, tous de classe C^∞ ou tous analytiques. Soient ρ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M, et $\tilde{\rho} : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ le morphisme correspondant. La partie linéaire ρ^1_p de ρ en un point fixe p est l'action analytique de G sur le tangent $E = T_pM$ donnée par

$$\forall g \in G, \quad \tilde{\rho}^1_p(g) = T_p(\tilde{\rho}(g)) \in GL(E).$$

Rappelons d'abord le classique

THÉORÈME 1. *Avec les notations précédentes, si G est compact, alors ρ est linéarisable au voisinage de p : il existe un ouvert ρ-invariant U de M contenant p et un difféomorphisme h de U sur un ouvert de E tels que $h(p) = 0$ et que $h \circ \tilde{\rho}(g)|U = \tilde{\rho}^1_p(g) \circ h$ pour tout $g \in G$.*

Preuve. Une carte locale permet de supposer que $(M,p) = (E,0)$ et

(*) Travail en partie effectué lors d'un séjour à l'Universidade Federal de São Carlos (Brésil) financé par le CNPq et la FAPESP.

$\tilde{\rho}_p^1(g) = d(\tilde{\rho}(g))(0)$ pour tout $g \in G$. On définit alors h par

(1) $$h(q) = \int_G \tilde{\rho}_p^1(g)\cdot \rho(\frac{1}{g},q)\, d\mu(g),$$

où μ désigne la probabilité de Haar sur G. ∎

Sous les hypothèses précédentes, supposons maintenant M munie d'une forme symplectique ω invariante par ρ, et soit ω_p^1 la forme symplectique sur E définie pour tout $v \in E$ (via l'identification canonique de T_vE à E) par $\omega_p^1(v) = \omega(p)$. Comme ω_p^1 est invariante par ρ_p^1, il est naturel de se demander si, dans le théorème 1, h peut être choisi de manière que $h_*(\omega|U) = \omega_p^1|h(U)$. Or, le lecteur se convaincra aisément (en prenant par exemple un groupe G à deux éléments) du fait suivant : bien que le théorème de Darboux permette de se ramener au cas où $(M,p,\omega) = (E,0,\omega_p^1)$, la formule (1) ne fournit pas en général un h symplectique. Pour se tirer de ce mauvais pas, on utilise le

LEMME 1. ([3], (7.3), théorème 3bis) *Soient σ une action du groupe de Lie compact G sur une variété N, et Ω, Ω' deux formes symplectiques σ-invariantes sur N, égales en tout point d'une sous-variété compacte σ-invariante Q de N. Il existe alors un voisinage ouvert σ-invariant V de Q dans N et un plongement φ de V dans N, tangent à l'identité sur Q, tels que $\Omega'|V = \varphi^*(\Omega|\varphi(V))$ et que $\tilde{\sigma}(g)\circ\varphi = \varphi\circ\tilde{\sigma}(g)|V$ pour tout $g \in G$. En outre, si Ω et Ω' ont un contact d'ordre $k \geq 1$ en Q, alors φ et id_M y ont un contact d'ordre $k+1$.*

(Ce lemme se déduit immédiatement de la preuve "à la Moser" [9] du théorème de Darboux, grâce à la remarque suivante : si une 2-forme σ-invariante β sur N admet une primitive α, alors elle admet la primitive σ-invariante $\int_G \tilde{\sigma}(g)^* \alpha\, d\mu(g)$).

En appliquant le lemme 1 - les notations étant celles du théorème 1 - à $N = h(U)$, $Q = \{0\}$, $\sigma = \rho_p^1$, $\Omega = \omega_p^1$ et $\Omega' = h_*(\omega|U)$, et en prenant $\varphi\circ h$ pour nouvel h, on obtient le résultat cherché :

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, si ρ préserve une forme symplectique ω, il existe un difféomorphisme h satisfaisant la conclusion du théorème 1 et tel que $h_*(\omega|U) = \omega_p^1|h(U)$.* ∎

Supposons maintenant M munie d'une structure de contact K invariante par ρ. Une difficulté nouvelle apparaît : il n'y a pas de structure de contact sur E naturellement associée à K. Nous allons d'abord définir ce qui en tient lieu : soient $\mathcal{K}(p) \subset E$ l'hyperplan de contact, et $E_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(p) \oplus E/\mathcal{K}(p)$. Pour chaque forme de contact c définissant $\mathcal{K}$ au voisinage de p , on obtient une forme de contact c_p^1 sur $E_{\mathcal{K}}$ comme suit : quels que soient $v, \dot{v} \in \mathcal{K}(p)$ et $w, \dot{w} \in E/\mathcal{K}(p)$, on a $c_p^1(v,w)(\dot{v},\dot{w}) = \lambda(\dot{w}) + \frac{1}{2}\, dc(p)\ (v,\dot{v})$, où λ est la forme linéaire sur la droite $E/\mathcal{K}(p)$ induite (puisque $\mathcal{K}(p) = \operatorname{Ker} c(p)$)par $c(p)$. La structure de contact $\mathcal{K}_p^1$ sur $E_{\mathcal{K}}$ définie par c_p^1 ne dépend pas du choix de c : c'est la <u>structure de contact tangente à</u> $\mathcal{K}$ <u>en</u> p. Pour tout germe $\varphi : (M,p) \circlearrowleft$ de difféomorphisme préservant $\mathcal{K}$, l'hyperplan $\mathcal{K}(p)$ est par définition invariant par $T_p\varphi$, qui induit donc un automorphisme $\varphi_{\mathcal{K}}^1$ de l'espace vectoriel $E_{\mathcal{K}}$; cet automorphisme préserve $\mathcal{K}_p^1$, et s'appelle $\mathcal{K}$-<u>jet d'ordre un de</u> φ <u>en</u> p . Nous appellerons de même $\mathcal{K}$-<u>partie linéaire</u> $\rho_{p,\mathcal{K}}^1$ <u>de</u> ρ <u>en</u> p l'action analytique de G sur $E_{\mathcal{K}}$, préservant $\mathcal{K}_p^1$, donnée par $\tilde{\rho}_{p,\mathcal{K}}^1(g) = \tilde{\rho}(g)_{\mathcal{K}}^1$ pour tout $g \in G$. Nous pouvons maintenant énoncer le

COROLLAIRE 2. <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 1, <u>si</u> ρ <u>préserve une structure de contact</u> $\mathcal{K}$, <u>il existe un ouvert</u> ρ-<u>invariant</u> U <u>de</u> M <u>contenant</u> p <u>et un difféomorphisme</u> h <u>de</u> U <u>sur un ouvert de</u> $E_{\mathcal{K}}$ <u>tels que</u> $h(p) = 0$, <u>que</u> $h_*(\mathcal{K}|U) = \mathcal{K}_p^1|h(U)$ <u>et que</u> $h\circ\tilde{\rho}(g)|U = \tilde{\rho}_{p,\mathcal{K}}^1(g)\circ h$ <u>pour tout</u> $g \in G$.

La démonstration est exactement celle du corollaire 1 : le théorème de Darboux permet de supposer que $(M,p,\mathcal{K}) = (E_{\mathcal{K}},0,\mathcal{K}_p^1)$; on conclut en utilisant le fait que l'identification canonique de $T_0 E_{\mathcal{K}}$ à $E_{\mathcal{K}}$ induit une identification de $(\mathcal{K}_p^1)_0^1$ à $\mathcal{K}_p^1$, et le

LEMME 2 ([3],(7.3), théorème 3) <u>Soient</u> σ <u>une action du groupe de Lie compact</u> G <u>sur une variété</u> N , <u>et</u> $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ <u>deux structures de contact</u> σ-<u>invariantes tangentes en tout point d'un compact</u> σ-<u>invariant</u> $K \subset N$. <u>Il existe alors un voisinage ouvert</u> σ-<u>invariant</u> V <u>de</u> K <u>dans</u> N <u>et un plongement</u> φ <u>de</u> V <u>dans</u> N , <u>égal à l'identité sur</u> K , <u>tels que</u> $\mathcal{K}'|V = \varphi^*(\mathcal{K}|\varphi(V))$ <u>et que</u> $\tilde{\sigma}(g)\circ\varphi = \varphi\circ\tilde{\sigma}(g)|V$ <u>pour tout</u> $g \in G$.

(Ce lemme se déduit sans peine de la preuve "à la Moser" du théorème de Gray par Martinet [8]). ■

L'amateur de résultats globaux pourra trouver dans [3] ((7.3), théorèmes 1, 2 et 2bis) des versions "équivariantes" des théorèmes de Gray et de Moser, qui se prouvent exactement commes nos deux lemmes.

2 - Le domaine de Poincaré.

On se place ici dans une des catégories C^∞, analytique ou holomorphe. Soient p un point d'une variété M, $\mathcal{D}$ le groupe des germes fixant p de difféomorphismes locaux de M, et E le tangent T_pM. Pour chaque $h \in \mathcal{D}$, on pose $h^1 = T_p h \in GL(E)$. Quel que soit $A \in GL(E)$, soient $\mathcal{D}_A = \{h \in \mathcal{D} : h^1 = A\}$, et σ_A le spectre du complexifié de A. On désigne par $\Pi \subset GL(E)$ le domaine de Poincaré, c'est-à-dire l'ouvert de $GL(E)$ formée des A tels que σ_A soit contenu dans une seule des composantes connexes du complémentaire du cercle-unité. Enfin, deux éléments h et h' de $\mathcal{D}$ sont dits conjugués à l'ordre $k \geq 1$ lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que les jets $j_p^k h$ et $j_p^k(\varphi^* h')$ soient égaux, où $\varphi^* h' = \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi$.

THÉORÈME 2 (Sternberg [10]). Pour tout $A \in \Pi$ et tout $h \in \mathcal{D}_A$, la classe de conjugaison de h dans $\mathcal{D}$ est l'ensemble des h' qui sont conjugués à h à l'ordre $k_A = [M/m] + 1$, où $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la partie entière et $M = \max \{|\mathrm{Log}|a|| : a \in \sigma_A\}$, $m = \min \{|\mathrm{Log}|a|| : a \in \sigma_A\}$.

Idée de la preuve. Il s'agit évidemment d'établir que, si $(M,p) = (E,0)$ et si $h' \in \mathcal{D}$ a un contact d'ordre k_A avec $h \in \mathcal{D}_A$, alors h et h' sont conjugués dans $\mathcal{D}$. Supposant par exemple (quitte à remplacer h par h^{-1}) que σ_A est contenu dans le disque-unité, il existe [6] une norme $|\cdot|$ sur E telle que $|A| = e^{-m}$ et $|A^{-1}| = e^M$. Pour chaque $r > 0$ et chaque $k > 0$, soient $B_r = \{x \in E : |x| \leq r\}$ et $\mathfrak{F}_{r,k}$ l'espace métrique complet des fonctions continues $f : B_r \to E$ vérifiant $|f|_{r,k} = \sup\{|f(x)|/|x|^k : 0 < |x| \leq r\} \leq 1 - |A|$, la distance sur $\mathfrak{F}_{r,k}$ étant $(f,g) \mapsto |f-g|_{r,k}$. Soient H et H' des difféomorphismes locaux représentant h et h' respectivement. Si $k = k_A$ et si r est assez petit, l'application $f \mapsto (H'^{-1} \circ (id+f) \circ H - id)|_{B_r}$ est une contraction stricte de $\mathfrak{F}_{r,k}$, dont l'unique point fixe F est tel que $\Phi = F + id|B_r$ vérifie $\Phi \circ H|B_r = H' \circ \Phi$ et soit la limite uniforme de la suite $H'^{-n} \circ H^n|B_r$. En outre, le germe φ de Φ en 0 ne dépend que de h et de h', et non du choix de leurs représentants, ce qui permet d'écrire que

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} h'^{-n} \circ h^n . \tag{2}$$

En échangeant les rôles de h et de h' dans ce qui précède, on voit que φ est un germe d'homéomorphisme. Dans la catégorie holomorphe, φ et φ^{-1} sont holomorphes, ayant pour représentants des limites uniformes de fonctions holomorphes. On en déduit le théorème dans la catégorie analytique, par complexification. Dans la catégorie C^∞, on utilise un théorème de point fixe "à tiroir" ([3], (4.2.1)) pour montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que chacune des suites $((D^k(H'^{-n} \circ H^n))|B_r)_{n \in \mathbb{N}}$, où D^k désigne la dérivée k-ième, converge uniformément pour r assez petit. ■

Désignons par δ l'algèbre de Lie des germes en $p \in M$ de champs de vecteurs sur M nuls en p, et, pour chaque $h \in \mathcal{D}$, notons $Z(h)$ (resp. $z(h)$) le <u>centralisateur de</u> h <u>dans</u> $\mathcal{D}$ (<u>resp</u>. δ), c'est-à-dire l'ensemble des $h' \in \mathcal{D}$ (resp. des $X \in \delta$) tels que $h^* h' = h'$ (resp. $h^* X = X$).

LEMME 3 (Sternberg [10] et Kopell [7]). <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 2, <u>si deux éléments de</u> $Z(h)$ <u>ou de</u> $z(h)$ <u>ont le même jet d'ordre</u> k_A <u>en</u> p, <u>ils sont égaux</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit de montrer que, si $(M,p) = (E,0)$ et si $h' \in Z(h)$ (resp. $X \in z(h)$) a le même jet d'ordre $k = k_A$ que l'identité (resp. que 0), alors h' est le germe de l'identité (resp. de 0). Or, tout représentant de h' s'écrit alors $id + f$, où $f|B_r$ appartient à $\mathfrak{I}_{r,k}$ pour $r > 0$ assez petit ; pour chaque représentant H de h, l'équation $f = (H^{-1} \circ (id+f) \circ H - id)|B_r$ admet 0 pour unique solution $f \in \mathfrak{I}_{r,k}$ dès que r est assez petit, d'après la preuve du théorème 2, ce qui montre que h' est le germe de l'identité. De manière analogue, tout représentant de X appartient à $\mathfrak{I}_{r,k}$ si r est assez petit, auquel cas l'application (linéaire) $f \longmapsto ((DH)^{-1} . (f \circ H))|B_r$ est une contraction stricte de $\mathfrak{I}_{r,k}$, d'où $X = 0$. ■

Pour chaque $X \in \delta$, soit $X^1 \in g\ell(E)$ sa différentielle en p. Etant donné $\Lambda \in g\ell(E)$, appelons δ_Λ l'ensemble des $X \in \delta$ tels que $X^1 = \Lambda$, et σ_Λ le spectre du complexifié de Λ. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans le cas holomorphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sinon. L'ensemble π des $\Lambda \in g\ell(E)$ tels que $\exp t\Lambda$ appartienne à $\mathcal{T}$ pour un $t \in \mathbb{K}$ est exactement l'ensemble des Λ tels que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv} \sigma_\Lambda$ de σ_Λ ne contienne pas 0 (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie que σ_Λ est contenu dans un seul des deux demi-plans bordés par l'axe imaginaire). Deux éléments X et X' de δ seront dits <u>conjugués</u> (resp. <u>conjugués à l'ordre</u> k) lorsqu'il existera $h \in \mathcal{D}$ tel que $X' = h_* X$ (resp. $j^k_p(X' - h_* X) = 0$).

COROLLAIRE 3 (Poincaré, Dulac, Sternberg [10]) <u>Pour tout</u> $\Lambda \in \pi$ <u>et tout</u> $X \in \delta_\Lambda$, <u>la classe de conjugaison de</u> X <u>dans</u> δ <u>est l'ensemble des</u> $X' \in \delta$ <u>qui sont conjugués à</u> X <u>à l'ordre</u> $\ell_\Lambda = \min \{[M_t/m_t] + 1 : t \in \mathbb{K}$ <u>et</u> $0 \notin C_t \}$, <u>où</u> $C_t = \operatorname{conv}\{\operatorname{Re}(tz) : z \in \sigma_\Lambda\}$, $M_t = \max\{|z| : z \in C_t\}$ <u>et</u>

$m_t = \min\{|z| : z \in C_t\}$.

Preuve. On voit facilement que $\ell_\Lambda = \min\{k_{\exp t\Lambda} : t \in \mathbb{K} \text{ et } \exp t\Lambda \in \Pi\}$, et l'on peut donc fixer un $t \in \mathbb{K}$ tel que $A = \exp t\Lambda$ soit dans Π et vérifie $k_A = \ell_\Lambda$. Nous devons établir que, si $X' \in \delta$ a un contact d'ordre $k = \ell_\Lambda$ avec X , il lui est conjugué. Or, les éléments $h = \exp tX$ et $h' = \exp tX'$ de $\mathcal{D}_A$ sont alors tangents en p à l'ordre $k = k_A$, et la preuve du théorème 2 montre donc l'existence d'un $\varphi \in \mathcal{D}$, tangent à l'identité à l'ordre k en p , tel que $\varphi^* h' = h$. Mais alors $\varphi^* X'$ et X sont invariants par h et tangents à l'ordre k en p , donc égaux d'après le lemme 3 . ∎

Supposons maintenant M munie d'une structure de contact $\mathcal{K}$; soient $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ le sous-groupe de $\mathcal{D}$ formé des h préservant $\mathcal{K}$, et $\delta_\mathcal{K}$ l'algèbre de Lie $\{X \in \delta : L_X \mathcal{K} = 0\}$, où L est la dérivée de Lie [8] . Deux éléments de $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ ou de $\delta_\mathcal{K}$ sont dits conjugués (resp. conjugués à l'ordre k) lorsqu'ils le sont par un élément de $\mathcal{D}_\mathcal{K}$.

COROLLAIRE 4. *Pour tout $h \in \mathcal{D}_\mathcal{K}$ (resp. tout $X \in \delta_\mathcal{K}$) tel que $h^1 = A$ appartienne à Π (resp. que $X^1 = \Lambda$ soit dans π), la classe de conjugaison de h (resp. X) est formée des $h' \in \mathcal{D}_\mathcal{K}$ (resp. des $X' \in \delta_\mathcal{K}$) conjugués à h (resp. X) à l'ordre k_A (resp. ℓ_Λ) .*

Preuve. Il suffit d'introduire dans la démonstration du théorème 2 (resp. du corollaire 3) la remarque suivante : si h satisfait l'hypothèse du corollaire 4 et si $h' \in \mathcal{D}_\mathcal{K}$ a un contact d'ordre k_A avec h en p , alors la preuve du théorème 2 nous dit que la suite $h'^{-n} \circ h^n$ converge au sens C^1 (cf.(2) pour cette notation), et sa limite préserve donc $\mathcal{K}$. ∎

REMARQUE. L'énoncé précédent est vide si l'on y remplace $\mathcal{K}$ par une structure symplectique ou une forme-volume.

JUSQU'À LA FIN DE 2-, ON SUPPOSE M DE DIMENSION FINIE .

Soient $\mathcal{E}$ l'algèbre complexe des germes en p de fonctions $M \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}$ et, pour chaque $h \in \mathcal{D}$ (resp. $X \in \delta$), soit h^* l'automorphisme (resp. X^* l'automorphisme infinitésimal) de $\mathcal{E}$ donné par $h^* f = f \circ h$ (resp. $X^* f = L_X f$, où L désigne la dérivée de Lie). Nous dirons que $h \in \mathcal{D}$ (resp. $X \in \delta$) est semi-simple lorsqu'il existera $x^1, \dots, x^n \in \mathfrak{M}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $h^* x^i = a_i x^i$ (resp. $X^* x^i = a_i x^i$) pour $1 \le i \le n$

(ii) $(x^1,\dots,x^n)$ est le germe en p d'un système de coordonnées complexes sur M, c'est-à-dire que les projections de $x^1,\dots x^n$ forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M} / \mathcal{M}^2$.

On a évidemment $\{a_1,\dots,a_n\} = \sigma_{h^1}$ (resp. σ_{X^1}), et, dans les cas réels, les x^i peuvent être choisis de manière que $\{x^1,\dots,x^n\}$ soit stable par conjugaison complexe.

Un élément X de δ est dit presque nilpotent lorsque X^1 est nilpotent.

THÉORÈME 3 ("décomposition de Jordan") Pour tout $\Lambda \in \pi$ et tout $X \in \delta_\Lambda$, il existe un unique X_s semi-simple dans δ tel que $[X,X_s] = 0$ et que $X-X_s$ soit presque nilpotent. De même, pour tout $A \in \pi$ et tout $h \in \mathcal{D}_A$, il existe un unique h_s semi-simple dans $\mathcal{D}$ et un unique N_h presque nilpotent dans δ tels que $h \circ h_s^{-1} = h_s^{-1} \circ h = \exp N_h$, et N_h appartient à $z(h)$.

Idée de la preuve. Nous établirons seulement la seconde assertion, laissant la première au lecteur. Pour $1 \le k \le \infty$, soit $\mathcal{E}^k$ (resp. $\mathcal{D}^k, \delta^k$) l'algèbre complexe (resp. le groupe, l'algèbre de Lie) des jets d'ordre k en p d'éléments de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}, \delta$), et soit h^k l'automorphisme de $\mathcal{E}^k$ induit par h^*. Pour chaque k fini, h^k, en tant qu'automorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, admet une unique décomposition de Jordan : il existe un unique automorphisme semi-simple h_s^k et un unique automorphisme infinitésimal nilpotent N_h^k de l'algèbre $\mathcal{E}^k$ tels que $h^k \circ (h_s^k)^{-1} = (h_s^k)^{-1} \circ h^k = \exp N_h^k$. Un résultat classique (et facile) nous dit que h_s^k et N_h^k sont bien induits par des éléments de $\mathcal{D}^k$ et δ^k respectivement, et l'on vérifie aisément que les limites projectives de h_s^k et N_h^k quand k tend vers l'infini sont bien définies, et induites par des éléments de $\mathcal{D}^\infty$ et δ^∞ respectivement, ce qui établit le

LEMME 4. Au niveau des jets en p, le théorème 3 est vrai sans aucune hypothèse sur X ou h. □

Soient $a_1,\dots,a_n$ les valeurs propres du complexifié de A, comptées avec leurs multiplicités. D'après le lemme 4, si $k = k_A$, il existe un germe $(x^1,\dots,x^n)$ en p de système de coordonnées complexes sur M, un $S \in \mathcal{D}$ et un $N \in \delta$, presque nilpotent, possédant les trois propriétés suivantes :

(a) $S^* x^i = a_i\, x^i$, $1 \le i \le n$.

(b) $N^* x^i$ est polynôme de degré $\le k$ en $(x^1,\ldots,x^n)$ pour $1 \le i \le n$.

(c) $S^{-1}\circ h$, $h\circ S^{-1}$ et $\exp N$ ont le même jet d'ordre k en p .

De (c) et du théorème 2, on déduit qu'*il existe* $\varphi \in \mathcal{D}$ *tel que* $h = \varphi^*(S\circ\exp N)$. En outre, pour $1 \le i \le n$, l'ensemble P_i des $p = (p^1,\ldots,p^n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_i = a_1^{p^1}\ldots a_n^{p^n}$ et $|p| = p^1+\ldots+p^n > 1$ est fini, et l'on a $k_o = \max\{1,\max\{|p| : p\in P_1\cup\ldots\cup P_n\}\} < k$. Or, si $Z^\ell(S)$ (resp. $z^\ell(S)$) désigne le centralisateur de $j_p^\ell S$ dans $\mathcal{D}^\ell$ (resp. δ^ℓ) pour $1 \le \ell \le \infty$, on a (avec $k = k_A$) le

LEMME 5. *Quels que soient* $S \in \mathcal{D}$ *et le germe* $(x^1,\ldots,x^n)$ *en* p *de système de coordonnées complexes sur* M *satisfaisant* (a), *et l'entier* $\ell \ge k_o$, *l'application* $F \longmapsto j_p^\ell F$ *est un isomorphisme du groupe* $Z(S)$ (*resp. de l'algèbre de Lie* $z(S)$) *sur le groupe de Lie algébrique* $Z^\ell(S)$ (*resp. sur l'algèbre de Lie* $z^\ell(S)$ *de* $Z^\ell(S)$). *Pour qu'un élément presque nilpotent* Y *de* δ *soit dans* $z(S)$, *il faut et il suffit que* $j_p^k(\exp Y)$ *soit dans* $Z^k(S)$ *et que* $Y^* x^i$ *soit polynôme de degré* $\le k$ *en* $(x^1,\ldots,x^n)$ *pour* $1 \le i \le n$. *Pour que* $f \in \mathcal{D}$ *soit dans* $Z(S)$, *il faut et il suffit que* $j_p^1 f$ *soit dans* $Z^1(S)$ *et que, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$, $f^* x^i$ *soit polynôme en* $(x^1,\ldots,x^n)$, *ne comportant comme termes de degré* > 1 *que des* x^p *avec* $p \in P_i$.

(Les deux premières assertions résultent facilement de la dernière ; dans celle-ci, le "il suffit" vient d'un calcul formel simple, lequel implique également le "il faut" au niveau des jets en p , ce qui permet de conclure grâce au lemme 3). □

De (b)-(c) et de la deuxième assertion du lemme 5 , on déduit donc que $N \in z(S)$, d'où la partie "existence" du théorème 3 avec $h_s = \varphi^* S$ et $N_h = \varphi^* N$. Comme h_s est dans $Z(h)$, son unicité résulte des lemmes 3 et 4 . Comme $\exp N_h$ est dans $Z(h_s)$, l'unicité de N_h résulte du lemme 4 et des deux premières assertions du lemme 5 . ■

De l'inclusion $Z^\ell(h) \subset Z^\ell(h_s)$ pour tout entier ℓ , conséquence des propriétés classiques de la décomposition de Jordan, on déduit, grâce au lemme 3, le

COROLLAIRE 5. *Sous les hypothèses du théorème 3, quel que soit l'entier* $\ell \ge k_o$, *l'application* $F \longmapsto j_p^\ell F$ *est un isomorphisme de* $Z(h)$ (resp. $z(h)$) *sur le groupe de Lie algébrique* $Z^\ell(h)$ (*resp. sur l'algèbre de Lie* $z^\ell(h)$ *de* $Z^\ell(h)$). ■

La traduction des coordonnées locales en termes de cartes donne le

COROLLAIRE 6. <u>Sous les hypothèses de la première</u> (<u>resp</u>. <u>seconde</u>) <u>assertion du théorème</u> 3, <u>soit</u> $\Lambda_s = X_s^1 \in g\ell(E)$ (<u>resp</u>. $A_s = h_s^1 \in GL(E)$) <u>la partie semi-simple de</u> Λ (<u>resp</u>. A). <u>Il existe un germe</u> $\varphi : (M,p) \longrightarrow (E,0)$ <u>de difféomorphisme tel que</u> $\varphi_* X_s$ (<u>resp</u>. $\varphi_* h_s$) <u>soit le germe en</u> 0 <u>de</u> Λ_s (<u>resp</u>. A_s), <u>et</u> $\varphi_* (X-X_s)$ (<u>resp</u>. $\varphi_* N_h$) <u>est alors le germe en</u> 0 <u>du générateur infinitésimal d'une action algébrique</u> ρ <u>de</u> $\mathbb{K}$ <u>sur</u> E , <u>telle que</u> $\tilde{\rho}(t)$ <u>soit de degré</u> $\leq k_o$ <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{K}$.

(L'algébricité provient de la dernière assertion du lemme 5, et du fait que l'exponentielle d'un opérateur linéaire nilpotent est polynôme en cet opérateur). ■

REMARQUE. En dimension finie, on peut donc remplacer, dans le théorème 2, l'entier k_A (qu'on peut d'ailleurs améliorer en k_A-1)par l'entier k_o . L'ensemble Π_o des $A \in \Pi$ tels que $k_o = 1$ (i.e. $P_1=\ldots=P_n = \emptyset$) est ouvert et de mesure pleine dans Π. D'après le corollaire 6, Π_o est exactement l'ensemble des $A \in \Pi$ tels que tous les $h \in \mathcal{D}_A$ soient linéarisables ; historiquement, c'est lui (ou plutôt l'ouvert π_o de mesure pleine dans π qui lui fait pendant) qui devrait s'appeler domaine de Poincaré.

Des résultats moins classiques, fondés sur les mêmes idées, seront contenus dans [5].

3. <u>Le domaine de Siegel</u>.

Nous allons maintenant voir ce que deviennent les théorèmes 2 et 3 et les corollaires 3, 4 et 5 de la section précédente lorsqu'on quitte le domaine de Poincaré. Ici, on ne peut plus parler à la fois des catégories C^∞ et analytique, les résultats y étant assez différents et obtenus par des méthodes bien distinctes. Les notations étant celles de 2-, <u>nous nous placons donc désormais dans la catégorie</u> C^∞, <u>et supposons</u> M <u>de dimension finie</u>. Nous désignerons par HL(E) l'ensemble des $A \in GL(E)$ <u>hyperboliques</u>, c'est-à-dire tels que σ_A ne rencontre pas le cercle unité, et par $h\ell(E)$ l'ensemble des $\Lambda \in g\ell(E)$ tels que $\exp t\Lambda$ appartienne à HL(E) pour un (et donc tout) réel $t \neq 0$.

PROPOSITION 1 . <u>Pour tout</u> $A \in GL(E) \setminus HL(E)$, <u>il existe deux éléments</u> h <u>et</u> h' <u>de</u> $\mathcal{D}_A$ <u>qui ont un contact infini en</u> p , <u>mais ne sont même pas conjugués en tant que germes d'homéomorphismes</u>.

Preuve. Une carte permet de supposer que $(M,p) = (E,0)$. Il existe une unique décomposition de E en somme directe de trois sous-espaces A-invariants E_+, E_- et E_o (appelés respectivement sous-espaces stable, instable et central de A) telle que les modules des valeurs propres des complexifiés de $A|E_+$, $A|E_-$ et $A|E_o$ soient respectivement tous < 1, tous > 1 et tous égaux à 1. Soit $|.|$ une norme euclidienne sur E telle que $A|E_+$ et $A|E_-$ soient de norme < 1 et de norme > 1 respectivement, et possédant la propriété suivante : pour tout sous-espace A-invariant F de E, si le complexifié de $A|F$ est diagonalisable, de spectre $\{a,\bar{a}\}$ pour un $a \in \mathbb{C}$ (auquel cas nous dirons que F est un sous-espace bien propre de A), alors $A|F$ est de norme $|a|$.

Désignons par $u : \mathbb{R} \to]0,1]$ la fonction égale à 1 sur $]-\infty ,0]$ et à $x \longrightarrow 1-\exp(-x^{-2})$ sur $]0,\infty[$, et par $H : E \longrightarrow E$ l'application, conservant les projections de E sur E_+, E_- et E_o, telle que $(H-A)|E_+ = 0$, que $(H-A)|E_-=0$, et que $H(x) = u(|x|)A(x)$ pour tout $x \in E_o$.

Si F_o désigne la somme des sous-espaces bien propres de A contenus dans E_o, alors, pour toute boule B de centre 0 dans E, l'ensemble des $x \in B$ tels que la suite $H^n(x)$ soit à valeurs dans B et converge vers 0 contient $B \cap (E_+ \oplus F_o)$, alors que l'ensemble correspondant lorsqu'on remplace H par A est $B \cap E_+$. Cela prouve la proposition, en prenant pour h le germe de H et pour h' celui de A. ■

La construction précédente implique en fait qu'il n'existe même pas de germe d'homéomorphisme "envoyant les orbites de h' sur celles de h" (je laisse au lecteur le soin de définir cette notion et de prouver l'analogue de la proposition 1 pour les champs de vecteurs). Dans le cadre analytique, la proposition 1 est fausse : d'après un théorème célèbre de Siegel [1], il existe alors des $A \in GL(E) \setminus HL(E)$ tels que tout $h \in \mathcal{D}_A$ soit (analytiquement) linéarisable.

La proposition 1 montre que le théorème suivant est, en un sens, optimal :

THÉORÈME 4. Pour tout $A \in HL(E)$ (resp. tout $\Lambda \in h\ell(E)$) et tout $h \in \mathcal{D}_A$ (resp. tout $X \in \delta_\Lambda$), la classe de conjugaison de h dans $\mathcal{D}$ (resp. δ) est l'ensemble des $h' \in \mathcal{D}$ (resp. $X' \in \delta$) conjugués à h (resp. X) à l'ordre infini.

Démonstration. Comme ce résultat contient le théorème 2 (lequel est d'ailleurs plus précis et admet une preuve plus effective), nous supposerons $A \in HL(E) \setminus \Pi$ (resp. $\Lambda \in h\ell(E) \setminus \pi$). Soient E_+ et E_- les sous-espaces stable et instable de A (resp. de exp Λ) ; un résultat classique [6][(*)] affirme l'existence d'un unique couple (W_+ , W_-) de germes en p de sous-variétés de M invariants par h(resp. exp X) et vérifiant $T_p W_+ = E_+$, $T_p W_- = E_-$ (de l'unicité et du fait que $\Lambda E_+ = E_+$ et $\Lambda E_- = E_-$, on déduit que X est tangent à W_+ et à W_-) ; on appelle W_+ la <u>variété stable</u> et W_- la <u>variété instable</u> de h(resp. X). Une carte locale <u>nous permet de supposer que</u> $(M,p) \approx (E,0)$ <u>et que</u> W_+ <u>et</u> W_- <u>sont les germes en</u> 0 <u>de</u> E_+ <u>et</u> E_- <u>respectivement</u>.

LEMME 6. <u>Pour tout</u> $h' \in \mathcal{D}$ <u>conjugué à</u> h <u>à tous les ordres, il existe</u> $\varphi \in \mathcal{D}$ <u>tel que</u> $\varphi^* h'$ <u>et</u> h <u>aient un contact infini en</u> $W_+ \cup W_-$.

<u>Preuve</u>. On se ramène immédiatement au cas où h et h' ont un contact infini en 0 . La même technique de "point fixe à tiroir" que dans la preuve du théorème 2 permet alors de montrer que, quels que soient les représentants H de h et H' de h' , il existe des voisinages compacts V_+ et V_- de 0 dans E_+ et E_- respectivement tels que les deux suites $(j^\infty(H'^{-n} \circ H^n))|V_+$ et $(j^\infty(H'^n \circ H^{-n}))|V_-$ convergent uniformément (et donc au sens C^∞) vers des sections Φ_+ et Φ_- de la projection-source $J^\infty(E,E) \longrightarrow E$ au-dessus de V_+ et V_- . Comme H et H' ont un contact infini en 0 , il existe $\Phi : E \longrightarrow E$ telle que $(j^\infty\Phi)|V_+ = \Phi_+$ et $(j^\infty\Phi)|V_- = \Phi_-$, et le germe φ de Φ en 0 est évidemment tel que $\varphi \circ h$ et $h' \circ \varphi$ aient le même jet en $E_+ \cup E_-$. □

L'ensemble $Z_1(h)$ (resp. $z_1(h)$) des $\varphi \in \mathcal{D}$ (resp. $Y \in \delta$) tels que $h^* \varphi$ et φ (resp. $h^* Y$ et Y) aient un contact infini en $E_+ \cup E_-$ est un sous-groupe de $\mathcal{D}$ (resp. une sous-algèbre de Lie de δ), <u>dont les éléments laissent</u> W_+ <u>et</u> W_- <u>invariants</u> (<u>resp. sont tangents à</u> W_+ <u>et</u> W_-) ; soit $Z_1^\infty(h)$ (resp. $z_1^\infty(h)$) le quotient de $Z_1(h)$ (resp. $z_1(h)$) par la relation "avoir un contact infini en $E_+ \cup E_-$" .

LEMME 7. <u>L'application de</u> $Z_1^\infty(h)$ <u>dans</u> $Z^\infty(h)$ (<u>resp. de</u> $z_1^\infty(h)$ <u>dans</u> $z^\infty(h)$), <u>induite par le morphisme canonique</u> $F \longmapsto j_0^\infty F$ <u>de</u> $Z_1(h)$ <u>dans</u> $Z^\infty(h)$, <u>est un isomorphisme de groupes</u> (<u>resp. d'algèbres de Lie</u>).

<u>Idée de la preuve</u>. La surjectivité résulte d'un calcul simple sur les formes normales obtenues à l'aide du lemme 4 (voir [3],(4.4.2)) ; l'injectivité se démontre comme le lemme 3 (cf.[3],(4.2.2), théorème 2). □

(*) et qu'il n'est d'ailleurs pas indispensable de supposer connu pour prouver le théorème 4 : cf.[3], (4.4.2).

LEMME 6bis. Pour tout $X' \in \mathcal{D}$ conjugué à X à l'ordre ∞, il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $\varphi^* X'$ et X aient un contact infini en $W_+ \cup W_-$.

Preuve. On peut supposer X et X' tangents à tous les ordres en 0. En appliquant la preuve du lemme 6 à $h = \exp X$ et $h' = \exp X'$, on obtient un φ qui a un contact infini avec l'identité en 0. Les deux éléments $\varphi^* X'$ et X de $z_1(h) = z_1(\varphi^* h')$ ont le même jet en 0, d'où le résultat cherché grâce au lemme 7. □

A partir de là, des techniques standard de prolongement (combinaisons linéaires à coefficients fonctions-plateaux) donnent l'existence de deux actions ρ et ρ' de $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ sur E, d'une norme euclidienne $|\cdot|$ sur E et d'un réel $c > 0$ possédant les propriétés suivantes :

(a) Si $G = \mathbb{Z}$, $\tilde{\rho}(1)$ et $\tilde{\rho}'(1)$ sont égaux à A hors d'un compact, et ont respectivement h et $\varphi^* h'$ pour germes en 0 ; si $G = \mathbb{R}$, les générateurs infinitésimaux de ρ et ρ' sont égaux à Λ hors d'un compact, et ont respectivement X et $\varphi^* X'$ pour germes en 0.

(b) Les sous-espaces E_+ et E_- sont orthogonaux ; si $x \longmapsto x_+$ (resp. x_-) désigne la projection orthogonale sur E_+ (resp. E_-), alors, quels que soient $t > 0$ dans G et $x \in E$, on a $|\rho(t,x)_+| \leq e^{-ct}|x_+|$ et $|\rho(-t,x)_-| \leq e^{-ct}|x_-|$.

(c) Pour tout $t \in G$, $\tilde{\rho}(t)$ et $\tilde{\rho}'(t)$ ont un contact infini en $E_+ \cup E_-$.

LEMME 8. La famille $F_t = \tilde{\rho}'(t) \circ \tilde{\rho}(-t)$ converge en tout point de E, quand $t \in G$ tend vers $+\infty$, vers un difféomorphisme F tel que $F^* \tilde{\rho}'(t) = \tilde{\rho}(t)$ pour tout $t \in G$; en outre, F a un contact infini avec l'identité en $E_+ \cup E_-$.

Preuve. D'après (a) et (b), les familles $F_t | E \setminus E_-$ et $F_t^{-1} | E \setminus E_-$ sont localement stationnaires : tout $x \in E \setminus E_-$ possède un voisinage V tel qu'il existe $t_0 \in G$ vérifiant $F_t | V = F_{t_0} | V$ pour tout $t \geq t_0$. Il résulte donc de (c) que F et F^{-1} sont bien définies, égales à l'identité sur $E_+ \cup E_-$, de classe C^∞ dans $E \setminus E_-$, et ont un contact infini en $E_+ \setminus E_-$. Le problème de leur différentiabilité et de leur contact en E_- est donc purement local (au voisinage de E_-), et peut évidemment être étudié en considérant seulement la convergence de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or, le même argument que dans la preuve du théorème 2 ou du lemme 6 (en remplacant le point 0 par le sous-espace E_+) montre que cette suite converge au sens C^∞ sur tout compact. □

Ceci achève de prouver le théorème 4, le germe f de F en 0 étant évidemment tel, selon le cas, que $f^* \varphi^* h' = h$ ou que $f^* \varphi^* X' = X$. ■

Les hypothèses et notations étant celles du lemme 8, supposons que $G = \mathbb{R}$. Pour tout réel $r > 0$, soit Q_r le cylindre $\{x \in E : |x_+| = r\}$. Il résulte de (b) que toute orbite de ρ ou de ρ' qui n'est pas contenue dans E_- coupe Q_r transversalement, en un point et un seul ; en d'autres termes, Q_r est une réalisation de l'espace des orbites de $\rho|G\times(E\setminus E_-)$ et de celui de $\rho'|G\times(E\setminus E_-)$. Si r est assez grand pour que les supports de $(\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t)|t=0)-\Lambda$ et $(\frac{d}{dt}\tilde{\rho}'(t)|t=0)-\Lambda$ soient intérieurs au cylindre Q_r, alors le difféomorphisme F du lemme 8 est l'unique application continue égale à l'identité sur Q_r et telle que $F\circ\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}'(t)\circ F$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or, pour tout $s > 0$ (même très petit !), $F|Q_s$ a alors un contact infini avec $\mathrm{id}_E|Q_s$ le long de la sphère $Q_s \cap E_+$; il est donc naturel de se demander si, pour tout $f' : Q_s \longrightarrow E$ ayant un contact infini avec $\mathrm{id}_E|Q_s$ en $Q_s \cap E_+$, il existe un voisinage ouvert ρ-invariant U de $E_+ \cup E_-$ dans E et un plongement $F' : U \longrightarrow E$ tels que $(F'-f')|U \cap Q_s = 0$ et que $F'\circ\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}'(t)\circ F'$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous allons voir que la réponse est <u>positive</u> : si l'on prend pour $U \cap Q_s$ un voisinage ouvert de $Q_s \cap E_+$ dans Q_s tel que $f'|U \cap Q_s$ soit un plongement et que $f'(U \cap Q_s)$ coupe chaque orbite de ρ' transversalement, en au plus un point, il est clair que U et $F'|U\setminus E_-$ sont bien définis ; le seul problème est de prolonger F' à E_-, question <u>qui ne concerne évidemment que le germe en</u> 0 <u>de</u> $F'|E\setminus E_-$, et dont la réponse est donc donnée (avec $h = \exp X$ et $h' = \exp X'$) par le

THÉORÈME 5. <u>Les hypothèses et les notations étant celles du lemme</u> 7, <u>si</u> $h' \in \mathcal{D}$ <u>a un contact infini avec</u> h <u>en</u> $E_+ \cup E_-$, <u>alors, pour chaque</u> $\varphi \in Z_1(h)$, <u>tout germe</u> Ψ <u>en</u> 0 <u>d'application de</u> $E\setminus E_-$ <u>dans</u> E, <u>vérifiant</u> $h'\circ\Psi=\Psi\circ h|E\setminus E_-$ <u>et ayant un contact infini avec</u> φ <u>en</u> $E_+\setminus E_-$, <u>se prolonge en un unique</u> $\bar{\Psi} \in \mathcal{D}$, <u>qui a un contact infini avec</u> φ <u>en</u> $E_+ \cup E_-$.

La preuve de ce résultat se ramène, après une construction un peu longue pour être racontée ici, à celle du lemme 8 (voir [3],(4.2.3), théorème 2). ■

COROLLAIRE 7. <u>Quels que soient</u> $A \in HL(E)\setminus\Pi$ <u>et</u> $h \in \mathcal{D}_A$, <u>les morphismes canoniques</u> $Z(h)\longrightarrow Z^\infty(h)$ <u>et</u> $z(h) \longrightarrow z^\infty(h)$ <u>sont surjectifs et ont des noyaux de dimension infinie</u>.

<u>Preuve</u>. On se ramène comme précédemment au cas où $(M,p) = (E,0)$ et où h est le germe en 0 de $\tilde{\rho}(1)$ pour une action ρ de $\mathbb{Z}$ sur E vérifiant les hypothèses (a), (b) et (c) du lemme 8. D'après le lemme 7 et l'hypothèse (b), tout $\varphi^\infty \in Z^\infty(h)$ est le jet en 0 d'une application $\Phi : E \longrightarrow E$ telle que $\Phi\circ\tilde{\rho}(1)$ et $\tilde{\rho}(1)\circ\Phi$ aient un contact infini en $E_+ \cup E_-$. Pour chaque $r > 0$, soit

$D_r = \{x \in E : |x_+| \leq r\} \setminus \tilde{\rho}(1)(\{x \in E : |x_+| < r\})$. Une application élémentaire du théorème de prolongement de Whitney montre l'existence de $f : D_r \longrightarrow E$, ayant un contact infini avec Φ en $D_r \cap E_+$, et tel que $\tilde{\rho}(1) \circ f$ et $f \circ \tilde{\rho}(1)$ aient un contact infini en Q_r ; en outre, l'espace des germes en D_r de tels f est de dimension infinie. Pour chaque f, il existe un voisinage ouvert ρ-invariant U de $E_+ \cup E_-$ et une application $F : U \setminus E_- \longrightarrow E$ étendant f et commutant à ρ. En appliquant le théorème 5 au germe Ψ de F en 0, on obtient bien un $\overline{\Psi} \in Z(h)$ ayant φ^∞ pour jet en 0. ∎

REMARQUE. Dans la catégorie analytique, l'application $Z(h) \longrightarrow Z^\infty(h)$ est évidemment toujours <u>injective</u>. En outre, il existe des $A \in HL(E) \setminus \Pi$ et des $h \in \mathcal{D}_A$ tels que cette application <u>ne soit pas surjective</u> : il suffit de choisir h et A tels que tout $h' \in \mathcal{D}_A$ soit formellement linéarisable, mais que h ne soit pas analytiquement linéarisable ; $Z^\infty(h)$ contient alors des φ^∞ (en supposant $(M,p) = (E,0)$) conjugués dans $\mathcal{D}^\infty$ à des éléments de la forme $j_0^\infty B$, avec $B \in \Pi$, tels qu'en outre le centralisateur de $j_0^\infty B$ dans $\mathcal{D}^\infty$ soit formé d'éléments $j_0^\infty C$ avec $C \in GL(E)$. Si un tel φ^∞ était le jet d'un $\varphi \in Z(h)$, alors, d'après le théorème 2, φ serait linéarisable, et il en irait de même de h d'après le lemme 3 et l'hypothèse sur B. ∎

Si M est munie d'une forme symplectique ω, nous noterons $\mathcal{D}_\omega$ le sous-groupe de $\mathcal{D}$ formé des h préservant ω, et δ_ω la sous-algèbre de Lie de δ formée des X tels que la dérivée de Lie $L_X\omega$ soit nulle.
Deux éléments de $\mathcal{D}_\omega$ ou de δ_ω sont dits <u>conjugués</u> (resp. <u>conjugués à l'ordre</u> r) lorsqu'ils le sont <u>par un élément de</u> $\mathcal{D}_\omega$.

THÉORÈME 6. <u>Pour tout</u> $h \in \mathcal{D}_\omega$ (<u>resp. tout</u> $X \in \delta_\omega$) <u>vérifiant</u> $h^1 \in HL(E)$ (<u>resp.</u> $X^1 \in h\ell(E)$), <u>la classe de conjugaison de</u> h (<u>resp.</u> X) <u>est formée des éléments de</u> $\mathcal{D}_\omega$ (<u>resp.</u> δ_ω) <u>conjugués à</u> h (<u>resp.</u> X) <u>à l'ordre</u> ∞. <u>Le même énoncé est vrai lorsque la forme symplectique</u> ω <u>est remplacée par une structure de contact</u> K.

<u>Preuve</u>. Nous traiterons uniquement le cas d'un $X \in \delta_\omega$, laissant les autres au lecteur. On vérifie alors facilement que X^1 ne peut pas appartenir à π, et l'on peut supposer, grâce au théorème de Darboux, que $(M,p,\omega) = (E,0,\omega_p^1)$. Avec les notations de la preuve du théorème 4, un élément de $\mathcal{D}_\omega$ permet de se ramener au cas où W_+ et W_- sont les germes de E_+ et de E_-. Etant donné $X' \in \delta_\omega$, conjugué à X à l'ordre ∞, la méthode employée pour construire le φ du lemme 6bis implique que le germe ω_0 de ω en 0 a un contact infini avec

$\varphi^* \omega_0$ en $E_+ \cup E_-$. Par conséquent, avec les notations du lemme 8 et d'après la dernière assertion de celui-ci, le germe f de F en 0 est tel que $\omega_1 = f^* \varphi^* \omega_0$ et ω_0 aient un contact infini en $E_+ \cup E_-$. Comme $f^* \varphi^* X' = X$, il nous suffit (comme dans la preuve du corollaire 1) de construire un $\overline{\Psi} \in \mathcal{D}$ tel que $\overline{\Psi}^* X = X$ et que $\overline{\Psi}^* \omega_1 = \omega_0$. Pour cela, considérons une action ρ de $\mathbb{R}$ sur E vérifiant les hypothèses (a), (b) et (c) du lemme 8 ; du fait que $L_X \omega_0 = L_X \omega_1 = 0$, il existe d'après (b) un voisinage ouvert ρ-invariant V de $E_+ \cup E_-$ dans E et deux formes symplectiques ρ-invariantes Ω_0 et Ω_1 sur V , de germes ω_0 et ω_1 en 0 ,et ayant un contact infini en $E_+ \cup E_-$. Pour chaque $r > 0$, l'application $(t,x) \longmapsto \rho(t,x)$ est un difféomorphisme H de $\mathbb{R} \times Q_r$ sur $E \setminus E_-$, d'après les considérations qui précèdent le théorème 5 ; la projection canonique p de $E \setminus E_-$ sur l'espace des orbites de $\rho|\mathbb{Z} \times (E \setminus E_-)$ s'identifie par H au revêtement $\mathbb{R} \times Q_r \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times Q_r$ donné par $(t,x) \longmapsto (\theta(t),x)$, où θ est la surjection canonique. Les formes ρ-invariantes Ω_0 et Ω_1 induisent des formes symplectiques Ω'_0 et Ω'_1 sur p(V), invariantes sous l'action ρ' de $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur p(V) induite par ρ , et ayant un contact infini en $N = p(E_+ \setminus E_-)$. D'après le lemme 1 , il existe un voisinage ouvert ρ'-invariant U de la variété compacte ρ'-invariante N dans p(V) et un difféomorphisme F de U sur un ouvert de p(V) contenant N ,tel que $\tilde{\rho}'(\alpha) \circ F = F \circ \tilde{\rho}'(\alpha)|U$ pour tout $\alpha \in K$, vérifiant $(F^* \Omega'_1 - \Omega'_0)|U = 0$, et ayant un contact infini avec l'identité en N . L'application F se relève en un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \longrightarrow p^{-1}(F(U))$, vérifiant $\tilde{\rho}(t) \circ \Phi = \Phi \circ \tilde{\rho}(t)|p^{-1}(U)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ayant un contact infini avec l'identité en $E_+ \setminus E_-$, et tel que $(\Phi^* \Omega_1 - \Omega_0)|p^{-1}(U) = 0$. En appliquant le théorème 5 au germe Ψ de Φ en 0 (avec h = h' = exp X et φ = id), on obtient le $\overline{\Psi}$ cherché. ∎

REMARQUES. - L'extension de X à E utilisée dans cette démonstration n'est d'aucune utilité autre que psychologique : le germe en N de l'espace des orbites de $\rho|\mathbb{Z} \times (E \setminus E_-)$ est en fait entièrement déterminé par X , ainsi que le germe en 0 de p .

- Tels quels, les théorèmes 4 et 6 ont un aspect un peu fantomatique ; on en déduit en fait aisément que, pour presque tout $A \in HL(E)$ (resp. $\Lambda \in h\ell(E)$), tout $h \in \mathcal{D}_A$ (resp. $X \in \delta_\Lambda$) est linéarisable, et que l'affirmation correspondante vaut en géométrie de contact ; en géométrie symplectique, cela cesse d'être vrai, mais on obtient (génériquement) des formes normales tout aussi simples (l'hyperbolicité n'est malheureusement plus ici une propriété générique). Enfin, les mêmes méthodes fournissent des démonstrations effectives si l'on considère des conjugaisons de différentiabilité finie. Tout cela est détaillé dans [3].

NOTES. Le théorème 4 et la partie symplectique du théorème 6 sont dus à Sternberg ; la preuve du théorème 4 s'inspire de celle (un peu lacunaire dans le détail) de Nelson [12]. Pour étudier les actions de groupes abéliens "plus gros" que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ au voisinage de leurs points fixes, on n'a besoin ni de plus d'algèbre, ni de plus d'analyse (tout au plus faut-il généraliser les lemmes 6 et 7 et le théorème 5 au cas où le point p est remplacé par une sous-variété compacte, ce qui n'est pas difficile : voir [3],(4.2)) ; en revanche, la géométrie de leurs orbites est beaucoup plus compliquée. Le lecteur intéressé peut trouver dans [3] et [4] les définitions (hyperbolicité) et les résultats qui étendent le contenu du présent article à ce cas plus général. Enfin, les mêmes idées permettent ([3],[11]) d'étudier des situations un peu moins locales, c'est-à-dire de décrire ce qui se passe au voisinage d'une orbite à groupe d'isotropie non trivial (par exemple une orbite périodique), mais aussi ([2],[3],[4]) de résoudre des problèmes de classification plus grossière (à germe d'homéomorphisme près), pour l'instant inaccessibles par des méthodes moins fines.

Je remercie A. Chenciner, qui m'a aidé à choisir le contenu de cet article.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE (voir aussi [1], [3], et [10])

[1] V.I. Arnold : Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, Moscou, 1980 .

[2] M. Chaperon : "On the local classification of holomorphic vector fields" , à paraître dans Geometric dynamics, actes du Symposium international de Rio (août 1981), J. Palis ed.

[3] M. Chaperon : Singularités des systèmes dynamiques, cours à l'E.N.S., 1981, à paraître dans Astérisque.

[4] M. Chaperon : Thèse (Université de Paris 7, octobre 1980) et article en préparation.

[5] M. Chaperon et S. Rodrigues : article en préparation.

[6] M. C. Irwin : Smooth Dynamical Systems, Academic Press, London, 1980.

[7] N. Kopell : "Commuting diffeomorphisms", in Global Analysis, Proc.

Symp. Pure Math. 14, A.M.S., 1970, p. 165.

[8] J. Martinet : "Formes de contact sur les variétés de dimension 3", in Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in math. 192 (1971) p.142-163, Springer, Berlin-Heildelberg-New-York.

[9] J. Moser : "On the volume element of a manifold", Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 286-294.

[10] S. Sternberg : "Local contractions and a theorem of Poincaré", Amer. J. Maths 79 (1957), p. 809-824.

[11] F. Takens : "Partially hyperbolic fixed points", Topology 10 (1971) p.133.

[12] E. Nelson : Topics in dynamics, Part I, flows, Princeton, 1970.

Centre de Mathématiques de
l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex