Astérisque

ALAIN PROUTÉ

Vers un $\mathbb{Z}/P$-lemme de Hirsch - C.I.R.M. Marseille-Luminy le 4 juin 1982

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 273-277

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__273_0>

Vers un $\mathbb{Z}/p$-lemme de Hirsch

C.I.R.M. Marseille-Luminy le 4 juin 1982

Alain Prouté
(Nantes)

Introduction

Soit $K(\mathbb{Q},n) \longrightarrow E \longrightarrow B$ une fibration. Soit A^* le foncteur de De Rham-Sullivan. Soient:

$$\mathcal{M}(B) \longrightarrow A^*(B)$$
$$L(n) \longrightarrow A^*(K(\mathbb{Q},n))$$

les modèles minimaux de la base et de la fibre. (où $L(n)$ est l'algèbre libre, au sens commutatif gradué, sur un générateur de dimension n)

Le $\mathbb{Q}$-lemme de Hirsch nous dit que si l'on munit le produit tensoriel $\mathcal{M}(B) \otimes L(n)$ de la différentielle d'algèbre qui envoie le générateur de $L(n)$ sur un cocycle représentant l'invariant de Postnikov de la fibration, il existe un quasi-isomorphisme:

$$\mathcal{M}(B) \otimes L(n) \longrightarrow A^*(E)$$

Ceci nous permet de construire par récurrence le modèle minimal de E.

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que A^* est une solution au problème des cochaines commutatives. On peut aisément prouver qu'une telle solution n'existe, pour un anneau de coefficients R, que si celui-ci contient $\mathbb{Q}$. L'existence de l'algèbre de Steenrod convaincra facilement le lecteur. En conséquence, un $\mathbb{Z}/p$-lemme de Hirsch devra se passer d'une solution au problème des cochaines commutatives.

Théorie de Brown

E. H. Brown ([Br]) a prouvé que l'on peut associer de façon naturelle a toute fibration $F \longrightarrow E \longrightarrow B$, munie d'une fonction de relèvement, une différentielle sur $C_*(B) \otimes C_*(F)$, de telle façon que ce produit tensoriel soit naturellement homotopiquement équivalent à $C_*(E)$, où C_* est le foncteur des chaines singulières, à coefficients dans un anneau commutatif unitaire R.

Brown décrit $C_*(B) \otimes C_*(F)$ comme un produit tensoriel tordu, et il prouve, qu'il est possible, a homotopie près, de remplacer $C_*(F)$ par $H_*(F)$, dans le cas où R est un corps.

On peut d'ailleur aller un peut plus loin, et prouver (voir [Sm] et [P]), que sous certaines hypothèses, on peut également remplacer $C_*(B)$ par $H_*(B)$. Il s'avère malheureusement, que le calcul de la différentielle ainsi obtenue sur $H_*(B) \otimes H_*(F)$ est pratiquement impossible. On remarque seulement qu'il fait intervenir les opérations de Yessam ([St]) de $H_*(F)$ et les opérations de Massey (dualisées) de $H_*(B)$ ([M]), et évidement l'algèbre de Steenrod.

A(∞)-algèbres

On est naturellement amené, comme Kadeishvili ([Ka]), à introduire sur $H_*(F)$ une structure de A(∞)-algèbre ([St]), et sur $H_*(B)$ une structure de A(∞)-coalgèbre. On peut décrire cette structure comme suit: Soit $\Omega C_*(B)$ la cobar-construction de $C_*(B)$, et soit :

$$T(V) \longrightarrow \Omega C_*(B)$$

le modèle minimal, au sens de Baues-Lemaire ([BL]) de cette algèbre. Alors V est isomorphe à $H_*(B)$, et la structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(B)$ est la seule pour laquelle $T(V)$ soit la cobar-construction de $H_*(B)$, au sens de Stasheff ([St]). On a une description analogue, pour la structure de $A(\infty)$-algèbre de $H_*(F)$.

Cette structure remplace avantageusement les opérations de Massey de $H^*(B)$. On peut en effet retrouver celles-ci comme suit. En dualisant la structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(B)$, on obtient une structure de $A(\infty)$-algèbre sur $H^*(B)$. On peut alors considerer la bar-construction, au sens de Stasheff, de $H^*(B)$, et regarder les différentielles de la suite spectrale obtenue en filtrant cette bar-construction par la longueur des mots. Ces différentielles sont exactement les opérations de Massey. Cette structure est donc au moins aussi riche que ces opérations, et probablement strictement plus. De plus sa manipulation est beaucoup plus agréable et facile.

Si nous revenons maintenant sur la différentielle de $H_*(B) \otimes H_*(F)$, nous pouvons prouver que cette structure de $A(\infty)$-(co)algèbre, nous permet de séparer en deux étapes son calcul, dont l'une est simplement la détermination de cette structure, et dont l'autre est essentiellement liée à la structure sur l'algèbre de Steenrod.

Cas où la fibre est $K(\mathbb{Z}/p,n)$

C'est un fait remarquable, que la structure de $A(\infty)$-algèbre de $H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p)$ est triviale, c'est-à-dire réduite au seul produit de Pontrjagin. Ceci est une conséquence facile du fait que H. Cartan et J. C. Moore, ont construit un quasi-isomorphisme:

$$C_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p) \longrightarrow H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p)$$

Dans ces conditions, seule la structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(B)$ intervient encore, ce qui nous donne une description beaucoup plus facile de la différentielle à calculer. Nous dirons dans ce cas, qu'il s'agit d'un produit tensoriel tordu de type γ.

Structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p)$

Celle-ci par contre est a priori non triviale. En effet, D. Kraines ([Kr]), a prouvé que les produits de Massey sont liés a l'algèbre de Steenrod de la façon suivante (pour p impair):

Soit u une classe de cohomologie de degré impair. Alors le cup-produit uu est nul, et en conséquence le triple produit de Massey $\langle u,u,u\rangle$ est défini. Mais ce dernier contient zero, et le quadruple produit $\langle u,u,u,u\rangle$ est défini, et ainsi de suite , jusqu'au p-uple produit $\langle u,\dots,u\rangle$, qui lui est composé d'une seule classe de cohomologie, et qui est égal à $-\beta P(u)$, où β est l'opération de Bockstein, et P une puissance réduite de Steenrod.

Cette relation doit donc necessairement se voir dans la structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p)$. On peut prouver facilement, en utilisant les techniques de cobar-construction a la Stasheff, que cette structure est la seule, pour laquelle le produit tensoriel:

$$H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p) \otimes H_*(\mathbb{Z}/p,n-1;\mathbb{Z}/p)$$

puisse se voir comme un produit tordu de type γ, acyclique. Or H. Cartan, avec ses petites constructions, nous donne une différentielle sur ce produit tensoriel. En examinant cette différentielle, on découvre qu'il est facile de l'interpreter comme un produit de type γ. Ceci nous permet de calculer la structure de $A(\infty)$-coalgèbre de $H_*(\mathbb{Z}/p,n;\mathbb{Z}/p)$, et nous retrouvons ainsi la relation de Kraines. Nous constatons de plus, qu'elle est génériquement la seule relation entre opérations de Massey, et opérations cohomologiques primaires.

Malgrès ces resultats, nous sommes encore loin d'un $\mathbb{Z}/p$-lemme de Hirsch opérationnel. Il semble que la technique nous mene également a un moyen d'iterer la cobar-construction, pour des coalgèbres non-commutatives. Le lecteur trouvera un exposé très détaillé de cette théorie dans [P].

[BL] H.J. Baues, J.M. Lemaire Minimal models in homotopy theory Math. Ann. 225, (1977) 219-242.

[Br] E.H. Brown Jr. Twisted tensor products I. Ann. Math. 69 n°1 (1959) 223-246

[C] H. Cartan Séminaire. Année 54-55 E.N.S. Paris

[Ka] T.V. Kadeishvili On the homology theory of fiber spaces. Russian Math. Surveys. 35 : 3 (1980) 231-238

[Kr] D. Kraines Massey higher products. Trans. Amer. Math. Soc. 124, n°3 (1966) 431-449

[M] W.S. Massey Some higher order cohomology operations. Symp. internat. de top. alg. 145-154. La Universidad Nacional Autònoma de Mexico y la UNESCO, 1958.

[P] A. Prouté Thèse (à paraitre)

[Sm_1] V.A. Smirnov Homology of twisted tensor products. Soviet. Math. Dokl. 16 : 3 (1975)

[Sm_2] V.A. Smirnov Homology of fiber spaces. Russian Math. Surveys. 35 : 3 (1980), 294-298.

[St] J.D. Stasheff Homotopy associativity of H-spaces II. Trans. Amer. Math. Soc. 108, n°2 (1963) 293-312.