Astérisque

W. T. VAN EST

Rapport sur les S-Atlas

Astérisque, tome 116 (1984), p. 235-292
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__235_0>

RAPPORT SUR LES S - ATLAS

W.T. van Est

INTRODUCTION

L'objectif de cette introduction est, entre autres, d'esquisser le cheminement d'idées très simples par lequel l'auteur a été amené à s'occuper des S - atlas (alias schémas de variété) et des structures transverses.

Le point de départ était une certaine anomalie dans la théorie des algèbres de Lie Banachiques, sujet à première vue assez éloigné des structures transverses. L'anomalie en question c'est que, contrairement au cas de dimension finie, une algèbre de Lie Banachique L de dimension infinie n'est pas toujours l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie Banachique. On dira dans ce cas que L est non-intégrable.*) Cependant une analyse approfondie fait apparaître que pour tout L il existe toujours un groupe abstrait $\mathcal{L}$ bien déterminé qui admet le groupe adjoint de L comme facteur, et qui coïncide, dans le cas intégrable, avec le groupe de Lie Banachique simplement connexe associé à L.

Cela suggérait d'introduire une notion convenable qui devrait contenir la notion de variété comme cas particulier, et qui permettrait en même temps d'affirmer que tout L définit un "groupe analytique" simplement connexe. L'analyse mentionnée conduit à définir la notion cherchée par un atlas où il y a éventuellement une infinité de changements de carte entre deux cartes données. Plus précisément, dans le cas d'un atlas d'une variété les changements de carte engendrent un pseudo-groupe - dit <u>pseudo-groupe de transition</u> - sur la réunion disjointe des cartes. Plus généralement on considère dans ce travail un couple (V;T) d'une variété V et un pseudo-groupe T opérant sur V comme un "atlas généralisé". Un tel couple (V;T) a été appelé <u>schéma de variété</u> par l'auteur et S - <u>atlas</u> par Pradines.

Un morphisme $f: M_1 \to M_2$ de variétés admet ipso facto une description en termes des atlas $(V_i;T_i)$, $i=1,2$, qui décrivent les M_i. Cela comporte une collection d'applications partielles $V_1 \to V_2$ "compatibles avec T_1 et T_2". Puisqu'une telle définition ne fait en rien appel à la nature spéciale des deux atlas, on est

---

*) Ne pas confondre avec la notion de non-intégrabilité dans la littérature classique qui revient à la non-résolubilité.

amené à l'adopter comme notion de morphisme de S - atlas dans le cas général. Au lieu d'opérer avec les pseudo-groupes on passe souvent aux groupoïdes de leurs germes, et la notion de morphisme de S - atlas se traduit en termes de ces groupoïdes de transition. Bien qu'un morphisme de groupoïdes entraîne un morphisme de S - atlas, la réciproque n'est pas vrai en général (§ 3.1). Cela montre qu'il faut distinguer entre la catégorie des groupoïdes d'une part et celle des S - atlas d'autre part.

Le passage d'un S - atlas à son quotient par rapport aux changements de carte, conduit à un espace topologique (en général non-séparé) mais fait, en général, complètement perdre de vue la structure différentielle. C'est pour cela qu'il vaut mieux garder l'atlas comme tel et n'utiliser qu'accessoirement le quotient par rapport aux changements de carte.

Pour le cas d'une algèbre de Lie Banachique séparable le type de S - atlas qui intervient est une Q - variété au sens de Barre. La thèse de troisième cycle de Michèle Plaisant [20] contient une formulation du troisième théorème de Lie dans ce cadre. Pour le cas non-séparable il semble assez probable qu'on puisse toujours aboutir de cette façon à une restauration du troisième théorème de Lie quitte à élargir la notion de Q - variété à celle de S - atlas à holonomie triviale.

Dans cet ordre d'idées on est amené à étudier la notion de connexité simple ou plutôt celle de groupe fondamental pour un S - atlas quelconque, et à en trouver d'autres applications.

Une approche toute naïve pour la définition du groupe fondamental consiste en la recherche des définitions du groupe fondamental et du revêtement universel d'une variété ordinaire en termes d'un atlas. En effet un atlas d'une variété V correspond à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ par des ouverts U_i qui correspondent aux cartes. Un tel recouvrement donne lieu à un complexe de Čech $\Sigma(\mathcal{U})$ en prenant comme simplexes de dimension n les composantes connexes des intersections de $(n+1)$ - uples de U_i, et en définissant les opérateurs de bord de manière correspondante. Si les cartes sont simplement connexes, le groupe fondamental de $\Sigma(\mathcal{U})$ s'identifie à celui de V, et les revêtements simpliciaux de $\Sigma(\mathcal{U})$ sont en correspondance "bi-univoque" avec les revêtements de V. Or cette définition combinatoire du groupe fondamental se traduit facilement en une définition en termes du pseudo-groupe de transition ou plutôt en termes du groupoïde topologique de transition; le "groupoïde associé des composantes connexes" du dernier contient toute l'information nécessaire. Comme cela ne fait en rien intervenir la nature spéciale de l'atlas, on est amené à l'adopter comme définition pour un S - atlas quelconque à cartes simplement connexes. Cependant il faut alors montrer que le groupe fondamental et les revêtements ne changent pas essentiellement lorsqu'on remplace l'atlas par un atlas équivalent. Cette construction est discutée dans § 1 - § 3 ci-dessous.

Ceci étant, il semblait assez naturel de chercher des applications dans le cas d'un S-atlas de la structure transverse d'un feuilletage. Le résultat qui fournit une base pour de telles applications c'est que le groupe fondamental de la structure transverse est un quotient de celui de la variété feuilletée (§ 3, Théorème 3). Cela permet de tirer des conclusions sur le dernier à partir d'information sur le premier. Une situation étudiée dans la littérature à plusieurs reprises est celle où la structure transverse peut être décrite par une variété connexe et simplement connexe V munie d'un groupe G de difféomorphismes comme pseudo-groupe de changements de carte. Si G jouit en plus de la propriété:
$(g \in G,\ U \subset V$ ouvert, $g|U = id_U) \Rightarrow (g = id_V)$, - et nous dirons dans ce cas que G opère de façon <u>génériquement libre</u> - V s'avère le revêtement universel du S-atlas $(V;G)$, et G est le groupe fondamental (bien que G puisse opérer à points fixes!). Dans le cas où G possède des éléments localement stables, le revêtement universel est le S-atlas $(V;G_o)$ et le groupe fondamental s'identifie à G/G_o, où G_o désigne le sous-groupe distingué engendré par les éléments localement stables [6].

Dans le cas d'une famille régulière de courbes sur une surface la structure transverse est de telle nature; on l'a étudiée dans certains cas de ce point de vue dans [11], [9], [3]. Là les points fixes de G correspondent aux courbes périodiques.

Dans une conversation G. Reeb a suggéré que la théorème de Haefliger sur les feuilletages analytiques de co-dimension 1 devrait admettre une démonstration dans ce cadre. En effet il s'avère que tout S-atlas analytique connexe *) de dimension 1 est équivalent (en tant que S-atlas) à un atlas $(V;G)$ du type envisagé où V est une variété analytique de dimension 1 (en général non-séparée) et G opère de manière génériquement libre [8]. En particulier pour un feuilletage analytique de codimension 1 d'une variété connexe analytique M, la structure transverse est décrite par un S-atlas connexe analytique de dimension 1, c'est-à-dire par un S-atlas qui est équivalent à l'un du type $(V;G)$. Si M est compacte, l'espace ${}_G\backslash V$ l'est aussi **), et V étant non-compacte, cela implique que G est un groupe infini. Puisque G est le groupe fondamental de $(V;G)$ et que G est l'image surjective du groupe fondamental de M, il s'avère que le groupe fondamental de M est d'ordre infini, ce qui constitue le théorème de Haefliger ([10], p. 324).

Ci-dessous (§ 4.2) on va démontrer par la même méthode qu'un S-atlas connexe de dimension 1 à holonomie unilatère triviale et de classe C^k $(k \geq 0)$ est équivalent à un tel atlas de classe C^k; inversement tout couple $(V;G)$ de cette

---

*) Un S-atlas est dit connexe si son espace topologique associé est connexe.
**) Ici compacité signifie quasi-compacité au sens de Bourbaki.

nature est un S-atlas connexe à holonomie unilatère triviale.

L'argument essentiel de la méthode de [8] consiste en une vérification d'un critère de Malcev pour l'intégrabilité d'un groupe local. C'est au fond le même argument qu'utilise S. Jekel dans [15] où il montre que le classifiant de Haefliger $B\Gamma_1^\omega$ est un $K(G,1)$, ce qui lui permet d'obtenir le théorème de Haefliger en conséquence. Nous reviendrons plus loin sur le lien entre les classifiants de Haefliger et le groupe fondamental d'un S-atlas.

La théorie du groupe fondamental d'un S-atlas permet de développer une théorie galoisienne de revêtements ramifiés d'une variété connexe. Pour cela il faut introduire pour une variété V la notion de <u>donnée de ramification</u>, qui n'est autre qu'un S-atlas $\mathcal{D}$ qui décrit la nature de la ramification permise, et pour lequel V s'identifie à l'espace topologique associé $\mathrm{Top}\,\mathcal{D}$. Cela étant, un morphisme $f : W \to V$ d'espaces topologiques est dit <u>revêtement ramifié compatible avec</u> $\mathcal{D}$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}\,\tilde{\mathcal{D}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{Top}\,\varphi"'] & & W \arrow[dl, "f"] \\ & \mathrm{Top}\,\mathcal{D} = V & \end{tikzcd}$$

où la flèche $\mathrm{Top}\,\tilde{\mathcal{D}} \to W$ est un homéomorphisme et où $\tilde{\mathcal{D}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}$ est un revêtement de S-atlas. Cela entraîne que parmi les revêtements ramifiés compatibles avec $\mathcal{D}$ il existe un universel $f : \tilde{V} \to V$ tel que tout autre revêtement ramifié $g : \tilde{V} \to V$ compatible avec $\mathcal{D}$ est un quotient de f par rapport à un sous-groupe du groupe fondamental i.e. le groupe d'automorphismes de $\tilde{V}$ qui est l'image par rapport au foncteur $\mathrm{Top}(\ldots)$ du groupe fondamental du revêtement universel $\tilde{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ de S-atlas.

Les revêtements ramifiés au sens classique de la sphère de Riemann [7], ou plus généralement d'une surface compacte de Riemann R, rentrent dans ce cadre. Une donnée de ramification $\mathcal{D}$ dans ce cas comporte de façon unique une signature au sens de Weil [28], i.e. une fonction $\sigma : R \to \mathbb{N}$ à support $|\sigma| := \sigma^{-1}(\mathbb{N}+1)$ fini, et vice versa; on écrira $\mathcal{D}_\sigma$ au lieu de $\mathcal{D}$. Alors les revêtements ramifiés compatibles avec $\mathcal{D}_\sigma$ sont précisément les revêtements ramifiés au sens classique $f : \tilde{R} \to R$ pour lesquels l'indice de ramification en chaque point $\tilde{x} \in \tilde{R}$ est un diviseur de $\sigma(f(\tilde{x}))$. Autrement dit, au-dessus de $R - |\sigma|$ l'indice de ramification de f est partout égal à 1, i.e. f est régulier sur $f^{-1}(R - |\sigma|)$, et pour $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$, $x \in |\sigma|$, l'indice de ramification de f en $\tilde{x}$ est un diviseur (éventuellement 1) de $\sigma(x)$. Le groupe fondamental est un groupe fuchsien à présentation $T_1^{n_1} = T_2^{n_2} \ldots = T_k^{n_k} = T_1 T_2 \ldots T_k = 1$ où $n_i = \sigma(x_i)$, $i = 1,\ldots,k$, et $|\sigma| = \{x_1,\ldots,x_k\}$.

C'est précisément dans le but de donner un exemple concret de calcul du groupe fondamental que nous avons explicité ce cas particulier. Dans les Notes de Thurston, chapitre 13, on trouvera une discussion de toute une série d'exemples de données de ramification (orbifolds au sens de Thurston) et leurs revêtements ramifiés associés [27].

En rétrospective la notion de S-atlas n'est pas neuve. Elle s'est développée au fur et à mesure qu'on cherchait à introduire une notion convenable (souvent plus spéciale que celle de S-atlas) pour certains quotients qui échappent à la notion usuelle de variété. On pourra citer à cet égard [24], [2], [18], [21], [30], [5], [13], [27]; d'ailleurs en théorie ergodique la notion de groupe virtuel due à Mackey [17] et élaborée par son école (voir p. ex. [23]) peut être envisagée comme une version "mesurable" de la notion de S-atlas.

De même, la notion de groupe fondamental introduite ci-dessous n'est pas nouvelle non plus. Par exemple Hector dispose depuis longtemps d'une construction (non publiée) d'un complexe simplicial associé au groupoïde d'holonomie dont le groupe fondamental s'identifie à celui décrit ici. Dans [16] on trouvera une construction apparentée à la construction du "groupoïde des composantes connexes" ci-dessous. [5] contient en germe l'idée du groupe fondamental. Finalement le groupoïde d'un S-atlas admet, comme tout groupoïde topologique, un classifiant ([4], [12], [25]), dont le type d'homotopie ne change pas si l'on passe à un S-atlas équivalent. Comme Haefliger m'a fait remarquer, cette propriété permet de démontrer que le groupe fondamental construit ici à la Čech n'est autre que celui du classifiant. Le seul mérite (s'il y en a un) de cet exposé-ci est peut-être de montrer comment la méthode à la Čech permet de calculer explicitement les revêtements et le groupe fondamental d'un S-atlas et de clarifier le cas de dimension 1 à holonomie unilatère triviale. Le dernier paragraphe utilise la même méthode pour calculer dans certains cas le second groupe d'homotopie d'un S-atlas.

Pour ne pas déborder trop les limites d'un rapport, on a supprimé la plupart des démonstrations, qui sont d'ailleurs de nature élémentaire. Une version plus élaborée et complète en collaboration avec Barre paraîtra (peut-être) comme publication séparée.

En conclusion l'auteur tient à signaler que des conversations avec Barre, Hector, Molino, Pradines, Reeb lui ont été essentielles pour clarifier les idées.

L'auteur est redevable au referee de nombreuses suggestions pour améliorer l'exposé.

Après l'achèvement de la rédaction de cet article l'auteur a reçu le texte du travail de Haefliger "Groupoïdes d'holonomie et classifiants" (voir ce volume). Parmi les points de raccord des deux textes signalons en particulier les suivants:
2.3 (Groupoïdes) $\leftrightarrow$ 3.2 (Rapport); 4.1-2 (Gr.) $\leftrightarrow$ 4.1 et 5 (R.);
Appendice (Gr.) $\leftrightarrow$ 4.1 (R.).

§ 1 - Groupoïdes discrets

Le livre [14], chap. 11-13, pourra servir de référence générale pour ce paragraphe.

Notations

$G, H, \ldots$ désigneront des groupoïdes, et $E_G, E_H, \ldots$ leurs ensembles des identités; les identités sont parfois appelées sommets.

α, β sont les applications "source" et "but".

g_1g_2 est défini ssi $\beta(g_1) = \alpha(g_2)$, $g_i \in G$, $i=1,2$.

Pour un ensemble E on désignera par la même lettre le groupoïde trivial où $\alpha = id_E = \beta$; $E\times E$ désignera à la fois l'ensemble et le groupoïde à loi de multiplication $(e_1,e_2)(e_2,e_3) = (e_1,e_3)$, $e_i \in E$.

$\Phi, \Psi, \ldots$ étant des morphismes $G \to H$, les applications induites $E_G \to E_H$ seront désignées par $\varphi, \psi, \ldots$.

1.1. Généralités

Pour un groupoïde G, l'application $G \xrightarrow{(\alpha,\beta)} E_G\times E_G$ est visiblement un morphisme de groupoïdes. G sera dit cohérent*) si (α,β) est surjectif, et simplement cohérent si (α,β) est injectif. Alors " (α,β) est un isomorphisme" équivaut à " G est cohérent et simplement cohérent".

Un sous-groupoïde cohérent maximal est appelé composante cohérente. Tout groupoïde est somme disjointe de ses composantes cohérentes.

Pour un morphisme $\Phi : G \to H$ le noyau $\ker \Phi$ est défini par $\ker \Phi := \Phi^{-1}(E_H)$; $\Phi^{-1}(e)$, $e \in E_H$, est la fibre au-dessus de e pourvu que $\Phi^{-1}(e) \neq \emptyset$. On désignera $\ker(\alpha,\beta)$ souvent par G_E ; G_e désignera la fibre au-dessus de (e,e) et est appelé le groupe de cohérence en e. Dans un groupoïde cohérent les groupes de cohérence sont isomorphes l'un à l'autre.

Un morphisme surjectif $\Phi : G \to H$ est appelé fibration si les fibres sont cohérentes, et est appelé déroulement lorsque Φ met en correspondance biunivoque $\alpha^{-1}(e)$ et $\alpha^{-1}(\varphi(e))$ pour tout $e \in E_G$. Alors, si Φ est un déroulement, on a $\ker \Phi \subset E_G$.

---

*) = transitif au sens de [10].

Toute surjection $G \to H$ de groupes est une fibration. De plus, H étant un groupe, et G étant le groupoïde cohérent et simplement cohérent $H_{ens} \times H_{ens}$, le morphisme $\Phi : G \to H$ défini par $(h_1, h_2) \mapsto h_1^{-1} h_2$ est un exemple d'un déroulement.

De même on définit pour un groupoïde cohérent H, après avoir choisi un sommet de base $e_o \in E_H$, le groupoïde $G = \{(h_1, h_2) \mid \alpha(h_1) = \alpha(h_2) = e_o\} \subset H_{ens} \times H_{ens}$. Dans ce cas-ci, comme dans le cas précédent, G est cohérent et simplement cohérent, et $(h_1, h_2) \mapsto h_1^{-1} h_2$ est un déroulement. Il est à remarquer que, si dans ce cas e_o parcourt E_H, le groupoïde G parcourt les composantes de cohérence du produit fibré de $H_{ens} \times H_{ens}$ et E_H au-dessus $E_H \times E_H$ par rapport au morphismes $\alpha \times \alpha :$ $H_{ens} \times H_{ens} \to E_H \times E_H$ et le plongement diagonal $E_H \to E_H \times E_H$.

Un sous-groupoïde $N \subset G$ est dit distingué lorsque $E_G \subset N$ et $gNg^{-1} \subset N$ pour tout $g \in G$. En particulier tout sous-groupoïde simplement cohérent, qui contient E_G, est distingué.

Pour $N \subset G$ distingué on munit $N\backslash G/N := \{NgN \mid g \in G\}$ d'une structure de groupoïde en définissant $(Ng_1N)(Ng_2N) := Ng_1'g_2'N$ pourvu qu'il existe $g_i' \in Ng_iN$, $i = 1,2$ tel que $g_1'g_2'$ soit défini; dans ce cas $Ng_1'g_2'N$ ne dépend pas du choix particulier du couple g_1', g_2'. La projection canonique $g \to NgN$ est une fibration $G \to N\backslash G/N$ dont les fibres sont les composantes cohérentes de N ; en particulier $G\backslash G/G$ s'identifie à l'ensemble des composantes cohérentes muni de sa structure de groupoïde trivial. Réciproquement toute fibration $\Phi : G \to H$ est essentiellement la projection canonique $G \to \ker \Phi\backslash G/\ker \Phi$.

Pour qu'un morphisme surjectif $\Phi : G \to H$ de groupoïdes cohérents soit une fibration il faut et il suffit que $\Phi(G_e) = H_{\varphi(e)}$ pour tout $e \in E_G$.

Dans la catégorie des groupoïdes des produits fibrés existent. Le pull-back d'une fibration est une fibration et le pull-back d'un déroulement est un déroulement.

Pour une surjection d'ensembles $\varphi : F \to E_G$, $\varphi \times \varphi : F \times F \to E_G \times E_G$ est une fibration à fibres simplement cohérentes.

$G \times_{E_G \times E_G} (F \times F)$ sera désigné par ${}^{\varphi}G$ et appelé le <u>relèvement de</u> G <u>par rapport à</u> φ. La projection canonique ${}^{\varphi}G \to G$, qui est le pull-back de $\varphi \times \varphi$ suivant (α, β), sera désignée par Φ. L'ensemble des identités de ${}^{\varphi}G$ s'identifie à F de façon que $\varphi : F \to E_G$ soit l'application induite par Φ. Les fibres de Φ sont simplement cohérentes (et cohérentes!).

Réciproquement toute fibration $\Phi : G \to H$ à fibres simplement cohérentes est essentiellement la projection canonique ${}^{\varphi}H \to H$; par la suite une telle fibration sera appelée <u>couverture</u>.

Le pull-back d'une couverture est une couverture.

Pour tout groupoïde G on définit le nerf NG comme le complexe dont les n-simplexes, $n \geq 1$, sont les suites $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ tels que $g_1 g_2 \ldots g_n$ soit défini. A tout $e \in E_G$ on associe un 0-simplexe $*e$. Les opérateurs de face et de dégénérescence d_i, s_j sont définis à la Eilenberg-MacLane. En particulier en dimension 1 et 0 on a $d_o(g) = *\beta(g)$, $d_1(g) = *\alpha(g)$, $s_o(*e) = s_1(*e) = (e)$, $g \in G$, $e \in E_G$.

Le classifiant BG est pris comme la réalisation géométrique de NG. En conséquence les composantes de cohérence de G correspondent aux composantes connexes de BG.

Pour tout $e \in E_G$ il y a un isomorphisme canonique $G_e \to \pi_1(BG, *e)$. Pour un groupoïde cohérent et simplement cohérent G, BG est homotopiquement trivial.

Supposant pour le reste que G soit cohérent, BG est un espace asphérique.

Prenons dans G un sommet de base $e_o \in E_G$, et un sous-groupoïde cohérent et simplement cohérent maximal. (On obtient un tel A en choisissant pour chaque $e \in E_G$ un élément g_e qui relie e_o à e, et en prenant A comme le sous-groupoïde engendré par les g_e.) Alors tout $g \in G$ s'écrit de façon unique $g = a_1 g_o a_2$, $a_i \in A$, $g_o \in G_{e_o}$.

$\Psi : g \to g_o$ est une fibration à fibre A, et $N\Psi$ est une rétraction par déformation; en conséquence $B\Psi : BG \to BG_{e_o}$ est une équivalence d'homotopie.

Toute fibration $\Phi : G \to H$ entraîne une fibration simpliciale $N\Phi$ dont les fibres sont les nerfs des fibres de Φ; $B\Phi$ est une fibration au sens de Serre à fibre homotopique égale au classifiant d'une fibre de Φ. En particulier, pour une couverture $\Phi : G \to H$, $B\Phi : BG \to BH$ est une équivalence d'homotopie.

Un déroulement $\Phi : G \to H$ se traduit par des revêtements $N\Phi : NG \to NH$ et $B\Phi : BG \to BH$. En particulier, pour un H cohérent, l'exemple du déroulement $(h_1, h_2) \mapsto h_1^{-1} h_2$ s'avère le revêtement universel au niveau du nerf et du classifiant.

1.2. Déroulements

Soit $\Phi : G \to H$ un déroulement. Puisque pour tout $e \in E_H$, $\alpha^{-1}(e)$ est contenu dans la composante cohérente de e, il s'ensuit que pour toute composante cohérente H_i de H, $G_i := \Phi^{-1}(H_i) \xrightarrow{\Phi} H_i$ est encore un déroulement. De plus pour toute composante cohérente G_{ij} de G_i, on a $\Phi(G_{ij}) = H_i$, et $G_{ij} \xrightarrow{\Phi} H_i$ est un déroulement. C'est pour cela que pour le reste de cette section les groupoïdes seront supposés COHÉRENTS sauf mention du contraire.

Etant donnés deux déroulements $\Delta_i : \tilde{G}_i \to G$, $i = 1,2$, un morphisme $\Phi : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ tel que $\Delta_1 = \Delta_2 \circ \Phi$ sera dit <u>morphisme de déroulements</u>. De cette façon les déroulements au-dessus de G constituent une catégorie.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\Delta)$ des automorphismes d'un déroulement $\Delta : \tilde{G} \to G$ opère librement sur $\tilde{G}$. Pour tout sous-groupe $F \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$, l'ensemble des orbites $F\backslash\tilde{G}$

admet une unique structure de groupoïde de façon que la projection canonique $\Phi_F : \tilde{G} \to F\backslash\tilde{G}$ soit un morphisme. Δ induit un morphisme $F\backslash\Delta : F\backslash\tilde{G} \to G$ et l'on a une factorisation $\Delta = (F\backslash\Delta) \circ \Phi_F$; $F\backslash\Delta$ et Φ_F sont des déroulements.

Le déroulement $\Delta : \tilde{G} \to G$ est dit galoisien lorsque $\mathrm{Aut}(\Delta)$ opère transitivement sur les fibres de Δ ; pour cela il suffit que $\mathrm{Aut}(\Delta)$ opère transitivement sur une seule fibre. Dans ce cas $\mathrm{Aut}(\Delta)\backslash\Delta$ est un isomorphisme. De plus, en choisissant $\tilde{e} \in E_{\tilde{G}}$, et en posant $e := \delta(\tilde{e})$, il existe pour tout $g \in G_e$ un unique $\tilde{g} \in \alpha^{-1}(\tilde{e})$ tel que $\Delta : \tilde{g} \mapsto g$, et, en conséquence du caractère galoisien de Δ , un unique $A_g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tel que $A_g\tilde{e} = \beta(\tilde{g})$. $g \mapsto A_g$ est un morphisme surjectif $G_e \to \mathrm{Aut}(\Delta)$, qui ne dépend que de e et sera noté π_e ; on a une suite exacte

$$1 \to \tilde{G}_{\tilde{e}} \xrightarrow{\Delta_e} G_e \xrightarrow{\pi_e} \mathrm{Aut}(\Delta) \to 1$$

où $\Delta_e := \Delta \mid \tilde{G}_e$.

Un déroulement $\Delta : \tilde{G} \to G$ est dit universel lorsque $\tilde{G}$ est simplement cohérent (et cohérent!).

La théorie des déroulements se résume sous forme galoisienne de la manière suivante

RÉSUMÉ - Tout groupoïde (cohérent!) G admet un unique déroulement universel $\Delta : \tilde{G} \to G$ à une équivalence de déroulements près. Δ est galoisien et, par suite, on a pour tout $e \in E_G$ un isomorphisme $\pi_e : G_e \to \mathrm{Aut}(\Delta)$. Tout déroulement $\Delta_1 : G_1 \to G$ est équivalent à un déroulement $A\backslash\Delta : A\backslash\tilde{G} \to G$ pour un sous-groupe convenable $A \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$.

Étant donnés deux déroulements universels $\Delta_i : \tilde{G}_i \to G_i$, $i = 1,2$, un morphisme $\Phi : G_1 \to G_2$ et un couple $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ tel que $\tilde{e}_i \in E_{\tilde{G}_i}$, $\varphi\delta_1(\tilde{e}_1) = \delta_2(\tilde{e}_2)$, il existe un unique morphisme $\tilde{\Phi} : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ tel que $\tilde{\varphi}(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ et que $\Delta_2 \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ \Delta_1$. $\tilde{\Phi}$ est un opérateur d'entrelacement pour $\mathrm{Aut}(\Delta_1)$ et $\mathrm{Aut}(\Delta_2)$.

Le groupe d'automorphismes d'un déroulement universel s'appelle son groupe fondamental.

Rappelons que pour G cohérent et $e_o \in E_G$ on a construit un déroulement $\tilde{G} \to G$, où $\tilde{G} = \{(g_1,g_2) \mid \alpha(g_1) = \alpha(g_2) = e_o\} \subset G_{ens} \times G_{ens}$ est cohérent et simplement cohérent, la projection de déroulement étant donnée par $(g_1,g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$; c'est donc un déroulement universel. Le groupe de cohérence G_{e_o} agit comme groupe fondamental par l'action $g(g_1,g_2) = (gg_1,gg_2)$, $g \in G_{e_o}$.

Pour se débarasser dans les formulations ci-dessus de toute référence à un choix particulier d'identités,il convient d'introduire la catégorie $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$ dont les objets sont les groupes, et les morphismes sont les classes de conjugaison de morphismes de groupes; deux morphismes de groupes $\varphi,\psi : L \to M$ sont dans la même classe de conjugaison s'ils diffèrent par un automorphisme intérieur de M .

Par exemple dans un groupoïde cohérent H les isomorphismes $i_f : H_{e_1} \to H_{e_2}$ définis par $i_f : h \to f^{-1}hf$, pour $f \in \beta^{-1}(e_1) \cap \alpha^{-1}(e_2)$, sont tous dans la même classe de conjugaison $i^{e_1e_2}$; de plus $i^{e_2e_3} \circ i^{e_1e_2} = i^{e_1e_3}$. Autrement dit, pour tout couple $e_1, e_2 \in E_H$ il existe un $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - isomorphisme canonique $i^{e_1e_2} : H_{e_1} \to H_{e_2}$

Alors le résumé ci-dessus montre que pour tout déroulement universel $\Delta : \tilde{G} \to G$, son groupe fondamental $\mathrm{Aut}(\Delta)$ est canoniquement $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - isomorphe à chacun des groupes de cohérence G_e, $e \in E_G$, de façon que ce $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - isomorphisme commute aux $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - isomorphismes $i^{e_1e_2}$.

De plus: tout morphisme $\Phi : G_1 \to G_2$ de groupoïdes induit (via un quelconque de ses relèvements $\tilde{\Phi}$) un $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - morphisme bien déterminé $\Phi_* : \mathrm{Aut}(\Delta_1) \to \mathrm{Aut}(\Delta_2)$ des groupes fondamentaux des déroulements universels $\Delta_i : \tilde{G}_i \to G_i$, $i = 1,2$. Le passage $\Phi \to \Phi_*$ est fonctoriel.

En particulier le morphisme $\mathrm{id}_G : G \to G$ induit un $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - isomorphisme canonique entre les groupes fondamentaux de deux déroulements universels. Autrement dit, le groupe fondamental en tant qu'objet de $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ ne dépend que de G (à une $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Type}}$ - équivalence canonique près); comme tel il sera désigné par F_G.

Lorsque $\Phi : G_1 \to G_2$ est une fibration, $\Phi_* : F_{G_1} \to F_{G_2}$ est une $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - surjection. Dans le cas où Φ est un déroulement Φ_* est une $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - injection.

Soit $\Phi : G_1 \to G$ une couverture. Alors pour tout déroulement $\Delta : \tilde{G} \to G$ on obtient par pull-back un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_1 \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & \tilde{G} \arrow[d, "\Delta"] \\ G_1 \arrow[r, "\Phi"'] & G \end{tikzcd} ,$$

où Δ_1, en tant que pull-back de Δ, est un déroulement, et où $\tilde{\Phi}$, en tant que pull-back de Φ, est une couverture. Puisque $\tilde{G}$ est cohérent, cela montre que $\tilde{G}_1$ est cohérent; par suite Δ_1 est un déroulement de groupoïdes cohérents.

Supposons maintenant que $E : \tilde{G}_1 \to G_1$ soit un déroulement. Puisque $K := \ker \Phi$ est simplement cohérent (mais non-cohérent en général) et que E est un déroulement, $K_1 := E^{-1}(K)$ est simplement cohérent, et $K_1 \xrightarrow{E} K$ est un déroulement, i.e. E est surjectif et induit sur chaque composante cohérente de K_1 un isomorphisme sur une composante cohérente de K. En particulier K_1 est distingué dans $\tilde{G}_1$. En mettant $G' := K_1 \backslash G_1 / K_1$ et en désignant la projection canonique $G_1 \to G'$ par E' on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_1 \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "E"'] & G' \arrow[d, "E'"] \\ G_1 \arrow[r, "\Phi"] & G \end{tikzcd}$$

où Φ' est une couverture et E' s'avère un déroulement.

Le pull-back $P : \Delta \to \Delta_1$ définit un foncteur de la catégorie des déroulements de G vers celle de G_1 ; l'opérateur quotient $Q : E \to E'$ définit un foncteur en sens inverse. PQ et QP sont équivalents à l'identité de manière naturelle; un tel couple de foncteurs sera dit un couple de foncteurs réciproques. Autrement dit, P et Q sont des équivalences de catégories.

En résumant on a la

PROPOSITION 1.2.1 - Le pull-back P_Φ par rapport à une couverture $\Phi : G_1 \to G$ établit une équivalence de la catégorie des déroulements de G vers celle de G_1. L'opérateur Q décrit ci-dessus est un foncteur réciproque à P_Φ.

En particulier une couverture $\Phi : G_1 \to G$ établit un $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$ - isomorphisme $\Phi_* : F_{G_1} \to F_G$.

Plus tard on aura besoin du

LEMME - Un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_1 \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & \tilde{G} \arrow[d, "\Delta"] \\ G_1 \arrow[r, "\Phi"'] & G \end{tikzcd}$$

où Φ est une couverture et Δ_1, Δ sont des déroulements, est essentiellement un diagramme de pull-back ssi $\tilde{\Phi}$ est une couverture.

Nous n'avons qu'à démontrer la partie suffisante. Autrement dit, il faut démontrer que $\tilde{g}_1 \to (\Delta_1(\tilde{g}_1), \tilde{\Phi}(\tilde{g}_1))$ est un isomorphisme $\tilde{G}_1 \to G_1 \underset{G}{\times} \tilde{G}$ dans l'hypothèse que $\tilde{\Phi}$ soit une couverture.

Supposons que $\Delta(\tilde{g}) = \Phi(g_1)$; on va construire $\tilde{g}_1 \in G_1$ tel que $(\Delta_1, \tilde{\Phi})(\tilde{g}_1) = (g_1, \tilde{g})$. Pour cela choisissons $\tilde{h}_1 \in \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{g})$. Alors $\Phi \circ \Delta_1(\tilde{h}_1) = \Delta(\tilde{g}) = \Phi(g_1)$. Φ étant une fibration, il existe $n_1, n_2 \in \ker \Phi$ tels que $n_1 \Delta_1(\tilde{h}_1) n_2 = g_1$. Puisque Δ_1 est un déroulement il existe $\tilde{n}_i \in \tilde{G}$ $(i = 1,2)$, tel que $\tilde{n}_1 \tilde{h}_1 \tilde{n}_2$ soit défini et que $\Delta_1 : \tilde{n}_i \to n_i$. On a $\Delta \circ \tilde{\Phi}(\tilde{n}_i) = \Phi \circ \Delta_1(\tilde{n}_i) \in E_G$; Δ étant un déroulement cela entraîne $\tilde{\Phi}(\tilde{n}_i) \in E_{\tilde{G}}$, et, par suite, $\tilde{\Phi}(\tilde{n}_1 \tilde{h}_1 \tilde{n}_2) = \tilde{g}$. En mettant

$\tilde{g}_1 = \tilde{n}_1\tilde{h}_1\tilde{n}_2$, on a $(\Delta_1,\tilde{\Phi})(\tilde{g}_1) = (g_1,\tilde{g})$.

Supposons que $\tilde{e}_1,\tilde{d}_1 \in E_{\tilde{G}1}$ soient dans la même fibre de $(\Delta_1,\tilde{\Phi})$, i.e. $\Delta_1(\tilde{e}_1) = \Delta_1(\tilde{d}_1)$ et $\tilde{\Phi}(\tilde{e}_1) = \tilde{\Phi}(\tilde{d}_1)$. $\tilde{\Phi}$ étant une fibration, il existe $\tilde{g}_1 \in \ker\tilde{\Phi}$ tel que $\tilde{d}_1 = \alpha(\tilde{g}_1)$, $\tilde{e}_1 = \beta(\tilde{g}_1)$. Alors, par commutativité du diagramme ci-dessus $\Delta_1(\tilde{g}_1) \in \ker\Phi$. D'autre part $\alpha \circ \Delta_1(\tilde{g}_1) = \Delta_1(\tilde{d}_1) = \Delta_1(\tilde{e}_1) = \beta \circ \Delta_1(\tilde{g}_1)$. Du fait que Φ est une couverture on conclut que $\Delta_1(\tilde{g}_1) = \Delta_1(\tilde{d}_1) = \Delta_1(\tilde{e}_1)$. Δ_1 étant un déroulement, on trouve que $\tilde{d}_1 = \tilde{g}_1 = \tilde{e}_1$. On a donc trouvé que chaque fibre de $(\Delta_1,\tilde{\Phi})$ est réduite à une seule identité. Cela joint à la surjectivité montre que $(\Delta_1,\tilde{\Phi})$ est un isomorphisme.

§ 2 - Groupoïdes topologiques

Dans ce paragraphe on ne considère que des groupoïdes topologiques à topologie LOCALEMENT CONNEXE sauf mention du contraire.

2.1. Généralités

Le sous-espace E_G d'un groupoïde topologique G, en tant que rétracte de celui-ci par rapport à α ou β, est localement connexe. Pour la même raison l'intersection non-vide d'une composante connexe de G avec E_G est une composante connexe de E_G.

De plus pour un morphisme $\Phi : G \to H$ de groupoïdes topologiques l'application induite $\varphi : E_G \to E_H$ est continue. Si, en plus, Φ est ouvert, on conclut, toujours en tenant compte du fait que Φ commute à α, que φ l'est aussi. En particulier lorsque Φ est étale, φ est étale.

L'exemple directeur pour toutes les définitions et constructions qui suivent est celui du groupoïde de transition d'un atlas d'une variété V (voir l'introduction). En effet, soit donné un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. On pose $U := \coprod_{i\in I} U_i$, et φ sera la projection canonique $U \to V$; φ est étale. Bien que φ^{-1} n'existe pas en géneral, on peut considérer $\varphi^{-1} \circ \varphi$ comme une notation pour l'ensemble des produits $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$, où ψ_1, ψ_2 sont des homéomorphismes locaux contenus dans φ. $\varphi^{-1} \circ \varphi$ est un pseudo-groupe opérant sur U ; en passant aux germes on obtient un exemple $G(\mathcal{U})$ de groupoïde topologique, c'est le groupoïde de transition de l'atlas $(U; G(\mathcal{U}))$.

Cependant pour conformer aux conventions à l'égard du produit dans les groupoides, il vaut mieux regarder les applications $\psi_1, \psi_2, \psi_2^{-1}$, comme des opérateurs à droite et, par conséquent, écrire plutôt $\psi_1\psi_2^{-1}$ pour $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$.

Dans ce cas U s'identifie de manière naturelle à l'espace $E_{G(U)}$. De plus, V s'identifie au quotient de U par rapport à $\varphi\varphi^{-1}$ ou bien par rapport à $G(\mathcal{U})$. On peut même considérer V comme quotient de $G(\mathcal{U})$. En effet pour tout $v \in V$ la fibre $\varphi^{-1}(v)$ correspond à l'ensemble des identités d'une composante cohérente de $G(\mathcal{U})$ (§ 1.1), et V s'identifie à l'espace des composantes cohérentes de $G(\mathcal{U})$.

En général pour un groupoïde topologique G l'espace $G\backslash G/G$ des composantes cohérentes, en tant qu'espace topologique quotient de G, est localement connexe. Dans la suite $G\backslash G/G$ sera désigné par $\mathrm{Top}(G)$ et la projection canonique $G \to \mathrm{Top}(G)$ sera désignée par top. Puisque pour toute fibre F de top on a $\alpha(F) \subset F$, il s'ensuit que $\mathrm{top}|E_G$ est surjectif et que top induit un isomorphisme de l'espace quotient $E_G/\sim$ sur $\mathrm{Top}(G)$, où $\alpha(g) \sim \beta(g)$, $g \in G$, définit la relation d'équivalence $\sim$ sur E_G. Dans la suite on identifiera $E_G/\sim$ et $\mathrm{Top}(G)$, et, par abus de notation, $\mathrm{top}|E_G$ sera aussi noté top.

Un morphisme $\Phi : G \to H$ de groupoïdes topologiques induit un morphisme $\mathrm{Top}\,\Phi : \mathrm{Top}(G) \to \mathrm{Top}(H)$ d'espaces topologiques de façon que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{top}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathrm{Top}(G) \arrow[d, "\mathrm{Top}\,\Phi"] \\ H \arrow[r] & \mathrm{Top}(H) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_G \arrow[r, "\mathrm{top}"] \arrow[d] & \mathrm{Top}(G) \arrow[d, "\mathrm{Top}\,\Phi"] \\ E_H \arrow[r] & \mathrm{Top}(H) \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Dans la catégorie des groupoïdes topologiques (pas nécessairement localement connexes) des produits fibrés existent. En particulier, pour une surjection d'espaces topologiques $\varphi : F \to E_G$, le relèvement ${}^{\varphi}G$ de G par rapport à φ (§ 1.1) possède une structure canonique de groupoïde topologique éventuellement non localement connexe. Pour sauvegarder la connexité locale nous ne considérons par la suite que des surjections étales. Une telle surjection $\varphi : F \to E_G$ sera appelée <u>couverture</u>, et, de même, le morphisme associé $\Phi : {}^{\varphi}G \to G$ est appelé <u>couverture</u>. Pour les groupoïdes discrets cette terminologie coïncide avec celle introduite au § 1.1.

De plus, lorsque $\Phi : {}^{\varphi}G \to G$ est une couverture, $\mathrm{Top}\,\Phi : \mathrm{Top}({}^{\varphi}G) \to \mathrm{Top}\,G$ est un homéomorphisme.

Observons qu'une couverture $\Phi : {}^{\varphi}G \to G$ de groupoïdes topologiques est en même temps une couverture pour les structures sous-jacentes de groupoïdes abstraits, i.e. un morphisme surjectif à fibres cohérentes et simplement cohérentes, et que, de plus, Φ est étale.

Tout morphisme $\Phi : H \to G$ de groupoïdes topologiques qui jouit de ces deux propriétés est essentiellement une couverture.

Puisque dans la catégorie des groupoïdes abstraits le pull-back d'une couverture est une couverture, et que le pull-back d'un morphisme étale de groupoïdes topologiques est encore étale, il s'ensuit que le pull-back d'une couverture de groupoïdes topologiques est une couverture.

L'exemple directeur ci-dessus constitue en même temps un exemple d'une couverture. En effet considérons sur V le groupoïde trivial E_V des germes de id_V. Alors le groupoïde $G(\mathcal{U})$ s'identifie au relèvement de E_V par rapport à φ. Le morphisme de couverture $\Phi : G(\mathcal{U}) \to E_V$ fait correspondre à tout $g \in G$ le germe de id_V en $\varphi(\alpha(g)) = \varphi(\beta(g))$.

Remarquons de plus que dans cet exemple $\alpha : G(\mathcal{U}) \to E_{G(\mathcal{U})} \simeq U$ est une surjection étale d'espaces topologiques; cela conduira plus tard à étudier le relèvement de $G(\mathcal{U})$ par rapport à α (§ 3.2).

2.2. Le foncteur Π_o

Pour un groupe topologique (localement connexe) G, l'espace discret $[G]$ de ses composantes connexes admet une structure de groupe discret de façon que la projection canonique $\gamma : G \to [G]$ soit un morphisme de groupes topologiques. Cette construction s'étend au cas des groupoïdes topologiques de la manière suivante.

Soit G un groupoïde topologique. Pour $g \in G$ la composante connexe qui contient g sera désignée par $[g]$; $[G] := \{[g] \mid g \in G\}$, $[E] := \{[e] \mid e \in E_G\}$. *) On définit $\alpha : [G] \to [E]$ par $\alpha([g]) = [\alpha(g)]$ et de même pour β. $[G]$ muni des deux rétractions α, β engendre un groupoïde libre $F([G];\alpha,\beta)$ **), dont $[E]$ est l'ensemble des identités, et $[G]$ un ensemble de générateurs.

Le <u>groupoïde</u> $\Pi_o(G)$ <u>des composantes connexes</u> est défini comme le quotient de $F([G];\alpha,\beta)$ par rapport aux relations $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$, $g_i \in G$; $p : F([G];\alpha,\beta) \to \Pi_o(G)$ désignera la projection canonique.

$\gamma : G \to \Pi_o(G)$ sera le composé $G \xrightarrow{[\ ]} [G] \subset F([G];\alpha,\beta) \xrightarrow{p} \Pi_o(G)$. En munissant $\Pi_o(G)$ de la topologie discrète, γ est un morphisme de groupoïdes topologiques.

Pour le cas d'un groupoïde discret G, γ est un isomorphisme, et, par la suite, on identifiera G et $\Pi_o(G)$ (moyennant γ).

Pour le cas d'un groupe topologique G, $\Pi_o(G)$ s'identifie à $[G]$ et le γ défini ici n'est autre que le γ qu'on a rencontré ci-dessus.

Pour tout morphisme $\Phi : G \to H$ de groupoïdes topologiques on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\gamma} & \Pi_o(G) \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Pi_o(\Phi)} \\ H & \xrightarrow{\gamma} & \Pi_o(H) \end{array}$$

de morphismes de groupoïdes topologiques. En particulier, dans le cas où H est un groupoïde discret, on trouve (en identifiant H et $\Pi_o(H)$) une factorisation de $\Phi : G \xrightarrow{\gamma} \Pi_o(G) \xrightarrow{\Pi_o(\Phi)} H$. La flèche $\gamma : G \to \Pi_o(G)$ est essentiellement caractérisée par cette propriété de factorisation.

On dira que G est Π_o - <u>cohérent</u> resp. Π_o - <u>simplement cohérent</u> suivant le cas que $\Pi_o(G)$ est cohérent resp. simplement cohérent.

G est Π_o - cohérent ssi $\mathrm{Top}(G)$ est connexe.

---

*) Puisque $[e] \cap E_G$ est une composante connexe de E_G (§ 2.1) l'ambiguité de la notation $[E]$ ne prêtera pas à confusion.

**) Voir § 2.2.2 pour la définition.

En conséquence, puisqu'une couverture ne change pas l'espace topologique associé, la propriété de Π_o - cohérence est conservée par une couverture.

Dans la catégorie des groupes topologiques Π_o jouit des propriétés suivantes:

(i) Lorsque $\Phi : G \to H$ est un morphisme surjectif, $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est surjectif.

(ii) Pour une suite exacte $1 \to K \to G \xrightarrow{\Phi} H \to 1$, où Φ est ouvert et K est localement connexe, la suite $\Pi_o(K) \to \Pi_o(G) \xrightarrow{\Pi_o(\Phi)} \Pi_o(H) \to 1$ est exacte.

La propriété (i) se généralise sous forme de la

PROPOSITION 2.2.1 - *Si $\Phi : G \to H$ est une surjection de groupoïdes topologiques à fibres cohérentes telles que $\varphi : E_G \to E_H$ soit ouverte, alors $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est une fibration* (§ 1.1).

et (ii) prend la forme de la

PROPOSITION 2.2.2 - *Pour une surjection ouverte $\Phi : G \to H$ de groupoïdes topologiques à fibres cohérentes et noyau K localement connexe, $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est une fibration dont le noyau est engendré, en tant que sous-groupoïde distingué, par $\Pi_o(I)(\Pi_o(K))$, où $I : K \subset G$ désigne l'inclusion.*

En gardant les hypothèses et les notations de la dernière proposition on obtient comme cas particuliers

COROLLAIRE 1 - *Si K est Π_o - simplement cohérent, $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est une couverture et $\Pi_o(I)(\Pi_o(K))$ en est le noyau.*

COROLLAIRE 2 - *Si E_H est simplement connexe* *) *et $\Phi : G \to H$ est une couverture, $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est une couverture.*

Une autre condition suffisante pour que $\Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ soit une fibration est donnée par la

PROPOSITION 2.2.3 - *Soit $\Phi : G \to H$ un morphisme de groupoïdes topologiques tel que $\Phi(G)$ soit un ensemble de générateurs pour H et que $[\varphi] : [E_G] \to [E_H]$ soit une bijection. Alors $\Pi_o(\Phi) : \Pi_o(G) \to \Pi_o(H)$ est une fibration, par conséquent $\Pi_o(\Phi)_* : F_{\Pi_o(G)} \to F_{\Pi_o(H)}$ est une Gr Typ - surjection de groupes fondamentaux.*

---

*) Un espace topologique connexe et localement connexe est dit simplement connexe si tout revêtement est un homéomorphisme. Un espace localement connexe est dit simplement connexe si toutes les composantes connexes le sont.

2.2.1. $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$

Revenons sur l'exemple directeur du § 2.1 et essayons d'interpréter $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$. Cela permettra en même temps d'expliquer les idées sous-jacentes des §§ 2.3 et 3.

A cet effet introduisons d'abord un complexe simplicial $\Sigma(\mathcal{U})$ dont les simplexes de dimension n seront les $(n+2)$-tuples $(i_o,\ldots,i_n;C)$ où $(i_o,\ldots,i_n) \in I^{n+1}$, $U_{\{i_o,\ldots,i_n\}} := U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$, et C est une composante connexe de $U_{\{i_o,\ldots,i_n\}}$.

Puisque pour toute partie $A \subset \{i_o,\ldots,i_n\}$ la composante connexe de U_A qui contient C est bien déterminée, les opérateurs de face et de dégénérescence se définissent de manière évidente.

Au simplexe $(i_o,i_1;C) \in \Sigma(\mathcal{U})^1$ correspond la composante connexe de $G(\mathcal{U})$ des éléments g tels que $\alpha(g) \in C_{i_o}$, $\beta(g) \in C_{i_1}$, où C_{i_o}, C_{i_1} désignent les copies de C dans U_{i_o}, U_{i_1}, ces derniers étant considérés en tant que termes de la somme topologique $U = \coprod U_i$. Réciproquement toute composante connexe de $G(\mathcal{U})$ correspond à un 1-simplexe. Alors $F([G(\mathcal{U})];\alpha,\beta)$ n'est autre que le groupoïde libre des chemins simpliciaux dans $\Sigma(\mathcal{U})$.

Pour un triple d'éléments $[g_1]$, $[g_2]$, $[g_1g_2]$ de $[G(\mathcal{U})]$ les simplexes correspondants respectifs $(i_o,i_1;C_2) =: \sigma_2$, $(i_1,i_2;C_o) =: \sigma_o$, $(i_2,i_o;C_1) =: \sigma_1$ sont tels que $C_2 \cap C_o \cap C_1 \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe un 2-simplexe $(i_o,i_1,i_2;C) =: \sigma$ tel que $d_i\sigma = \sigma_i$. Par conséquent $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ est le quotient de $F([G(\mathcal{U})];\alpha,\beta)$ par rapport au sous-groupoïde distingué engendré par les lacets simpliciaux $(d_2\sigma)(d_o\sigma)(d_1\sigma)^{-1}$, $\sigma \in \Sigma(\mathcal{U})^2$. Donc $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ s'identifie au groupoide de Poincaré simplicial, $\pi_1(\Sigma(\mathcal{U}))$, et constitue comme tel une approximation grossière du groupoïde de Poincaré $\pi_1(V)$ de V, i.e. le groupoïde des classes d'homotopie (extrémités fixes!) des chemins de V. Les groupes de cohérence de π_1 ne sont autre que les groupes d'homotopie de dimension 1.

2.2.2. Exemples

Avant de discuter quelques exemples, rappelons la définition de $F(A;\alpha,\beta)$ où A est un ensemble muni de deux rétractions α,β sur un sous-ensemble $E \subset A$.

A cet effet on introduit d'abord l'ensemble des mots $M(A;\alpha,\beta) :=$ $\{a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \beta(a_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}) = \alpha(a_i^{\varepsilon_i})\}$, où l'on a posé $\alpha(a^{-1}) = \beta(a)$, $\beta(a^{-1}) = \alpha(a)$. La longueur n d'un mot $a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}$ est donc ≥ 1.

De plus on pose $\alpha(a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}) := \alpha(a_1^{\varepsilon_1})$ et $\beta(a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}) := \beta(a_n^{\varepsilon_n})$. Le produit des mots m_1,m_2 se définit par juxtaposition pourvu que $\beta(m_1) = \alpha(m_2)$.

Puis on introduit une relation $\sim$ comme la plus petite relation d'équivalence qui soit compatible avec les changements de mots des types suivants: (i) On enlève ou insère une syllabe e^{ε} $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$; (ii) on remplace une syllabe $e^{\pm 1}$ $(e \in E)$ par $a^{\varepsilon}a^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, où $\alpha(a^{\varepsilon}) = e$. Cette relation d'équivalence respecte le produit, et l'on définit $F(A;\alpha,\beta) := M(A;\alpha,\beta)/\sim$. On retrouve E comme ensemble des identités et $A-E$ comme système libre de générateurs.

Le calcul de $\Pi_o(G)$, G étant un groupoîde topologique, se fait souvent plus économiquement si l'on adopte un ordre $<$ sur $[E]$. Soit $[G]^+ \subset [G]$ le sous-ensemble des éléments <u>monotones</u>, i.e. les éléments $[g]$ pour lesquels $\alpha[g] \leq \beta[g]$. On s'en convaincra que $\Pi_o(G)$ s'identifie canoniquement au quotient de $F([G]^+;\alpha,\beta)$ par rapport aux relations dites <u>monotones</u> $[g_1][g_2] = [g_1g_2]$, où $[g_1],[g_2],[g_1g_2]$ appartiennent à $[G]^+$.

Effectuons le calcul de $\Pi_o(G)$ dans quelques cas simples, dont les quatre premiers concernent le groupoîde de transition $G(\mathcal{U})$ d'un atlas d'une variété.

(1) $\mathcal{U} = \{U_+,U_-\}$ sera le recouvrement de $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ défini par $U_- = S^2 - (0,0,1)$, $U_+ = S^2 - (0,0,-1)$. Le pseudo-groupe de transition est engendré par id_{U_-}, id_{U_+}, et $\tau : U_- \to U_+$ est donné par $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)$. Les composantes connexes de $G(\mathcal{U})$ sont $E_- := \widehat{id_{U_-}}$, $E_+ := \widehat{id_{U_+}}$, $T_+ := \hat{\tau}$, $T_- := \hat{\tau}^{-1}$, où $\widehat{\ }$ désigne le passage à l'ensemble des germes. De plus dans $[G(\mathcal{U})]$, α et β se définissent par $\alpha(T_+) = \beta(T_-) = E_-$, $\beta(T_+) = \alpha(T_-) = E_+$. En mettant $E_- < E_+$, les éléments monotones sont E_-,E_+,T_+, et $F([G(\mathcal{U})]^+;\alpha,\beta)$ est le groupoîde cohérent et simplement cohérent aux sommets E_-,E_+. Il n'y a que des relations monotones triviales. Donc $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ est un groupoîde cohérent et simplement cohérent à deux sommets.

(2) On remplace S^2 par $S^1 = S^2 \cap \{(0,y,z)\}$; l'atlas sera la restriction de celui de S^2. En retenant les mêmes notations et le même ordre, $T_+ = \hat{\tau}$ se décompose en deux composantes connexes $T_{+-} = \hat{\tau} \mid U_- \cap \{(0,y,z) \mid y < 0\}$ et $T_{++} = \hat{\tau} \mid U_- \cap \{(0,y,z) \mid y > 0\}$. $F([G(\mathcal{U})]^+;\alpha,\beta)$ s-identifie au groupoîde libre aux sommets E_-,E_+ et générateurs T_{++},T_{+-}. Il n'ya que des relations monotones triviales, donc $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ s'identifie à $F([G(\mathcal{U})]^+;\alpha,\beta)$. Les groupes de cohérence sont cycliques d'ordre infini.

(3) Dans le plan projectif complexe, où z_o,z_1,z_2 désignent les coordonnées homogènes, $\mathcal{U}$ sera le recouvrement par les plans affines $U_i : z_i \neq 0$. Toutes les intersections $U_i \cap U_j$, et $U_o \cap U_1 \cap U_2$ sont non-vides et connexes. En désignant les identifications $U_i \to U_j$ par τ_{ij}, les composantes connexes de $G(\mathcal{U})$ sont $E_i := \tau_{ii}$, et $T_{ij} := \tau_{ij}$, $i \neq j$. En mettant $E_o < E_1 < E_2$, les éléments montones de $[G(\mathcal{U})]$ sont E_i, $i = 0,1,2$, T_{ij}, $i < j$. La seule relation

monotone non-triviale est $T_{01}T_{12} = T_{02}$. Par conséquent $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ se réduit au groupoïde cohérent et simplement cohérent aux sommets E_0, E_1, E_2.

(4) On remplace dans l'exemple précédent le corps complexe par le corps réel, et l'on désigne les coordonnées homogènes par x_0, x_1, x_2. Pour le reste on retient les mêmes notations. $U_i \cap U_j$, $i \neq j$, se décompose en deux composantes connexes U^+_{ij}, U^-_{ij}, données respectivement par $x_i x_j > 0$, $x_i x_j < 0$. Par conséquent T_{ij} $(i < j)$ se décompose en deux composantes connexes $T^+_{ij} = \hat{\tau}_{ij} \mid U^+_{ij}$, $T^-_{ij} = \hat{\tau}_{ij} \mid U^-_{ij}$. En retenant toujours le même ordre, les éléments monotones de $[G(\mathcal{U})]$ sont E_i, et T^+_{ij}, T^-_{ij} $(i < j)$. Les relations monotones non-triviales sont: $T^+_{01}T^+_{12} = T^+_{02}$, $T^+_{01}T^-_{12} = T^-_{02}$, $T^-_{01}T^+_{12} = T^-_{02}$, $T^-_{01}T^-_{12} = T^+_{02}$. Évidemment les T^+_{ij}, $i < j$, engendrent un sous-groupoïde cohérent et simplement cohérent maximal dans $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$. Le quotient de $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ par rapport à ce sous-groupoïde est un groupe cyclique d'ordre 2. Donc $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ est un groupoïde cohérent aux sommets E_0, E_1, E_2 dont les groupes de cohérence sont 2-cycliques (voir § 1.2).

Dans les deux exemples suivants le pseudo-groupe qui intervient n'est plus celui d'un atlas d'une variété.

(5) On considère sur $V := \langle -1,+1 \rangle$ le pseudo-groupe engendré par $\tau : x \mapsto \frac{1}{2}x$. τ^n est bien défini pour $n \geq 0$. Pour $n < 0$ on définit $\tau^n : x \mapsto 2^{-n}x$ pour $x \in \langle -2^n, 2^n \rangle$. Les composantes connexes de G sont $T_n := \widehat{\tau^n}$, $n \in \mathbb{Z}$; en particulier $T_o = E = \widehat{id_V}$. De plus on a $\alpha(T_n) = \beta(T_n) = E$. $F([G]; \alpha, \beta)$ est le groupe libre au système de générateurs $\{T_n \mid n \neq 0\}$. $\Pi_o(G)$ est le quotient par rapport aux relations $T_n T_m = T_{n+m}$. Autrement dit $\Pi_o(G)$ est un groupe cyclique d'ordre infini.

(6) Dans l'exemple précédent on change la définition de τ en posant $\tau : x \to \frac{1}{2}x$ pour $x \neq 0$. G sera le groupoïde associé au pseudo-groupe engendré par τ et id_V. En retenant les notations de (5), on trouve que T_n, $n \neq 0$, se décompose en deux composantes connexes T^+_n, T^-_n correspondant aux deux composantes connexes de $V - \{0\}$. $F([G]; \alpha, \beta)$ est un groupe libre aux générateurs T^+_n, T^-_n, $n \neq 0$. $\Pi_o(G)$ est le quotient par rapport aux relations $T^+_n T^+_m = T^+_{n+m}$ (en mettant $T^+_0 = E$), et $T^-_n T^-_m = T^-_{n+m}$ $(T^-_0 := E)$. C'est dire que $\Pi_o(G)$ est un groupe libre à deux générateurs.

2.2.3. Revêtements et $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$

On conserve les notations du § 2.2.1, et l'on suppose, en plus, que V est connexe. On rappelle ci-dessous la théorie des revêtements $p : \tilde{V} \to V$ à $\tilde{V}$

connexe.

Un tel revêtement $p : \tilde{V} \to V$ sera dit <u>compatible avec</u> $\mathcal{U}$ si pour tout $i \in I$, $p^{-1}(U_i)$ est réunion disjointe des copie $\tilde{U}_{ij}$ de U_i, c'est-à-dire on exige que $p : \tilde{U}_{ij} \to U_i$ soit bijective. Alors $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_{ij}\}$ est un recouvrement de V, et p induit un revêtement simplicial $p_\Sigma : \Sigma(\tilde{\mathcal{U}}) \to \Sigma(\mathcal{U})$.*)

Réciproquement tout revêtement $q : \tilde{\Sigma} \to \Sigma(\mathcal{U})$ s'identifie canoniquement à un revêtement $p_\Sigma : \Sigma(\tilde{\mathcal{U}}) \to \Sigma(\mathcal{U})$, où $p : \tilde{V} \to V$ est un revêtement compatible avec $\mathcal{U}$. En particulier lorsque les U_i sont des domaines simplement connexes ou du moins contenus chacun dans un domaine simplement connexe, tout revêtement $p : \tilde{V} \to V$ est compatible avec $\mathcal{U}$, et il y a "correspondance bi-univoque" entre les revêtements de V et les revêtements simpliciaux de $\Sigma(\mathcal{U})$. Dans ce cas le revêtement universel de V correspond au revêtement universel de $\Sigma(\mathcal{U})$ et le groupe fondamental de V (:= groupe des automorphismes du revêtement universel) est isomorphe au groupe fondamental de $\Sigma(\mathcal{U})$. Autrement dit, pour un tel recouvrement $\Pi_o(G(\mathcal{U})) \simeq \pi_1(\Sigma(\mathcal{U}))$ est une bonne approximation du groupoïde de Poincaré $\pi_1(V)$, en ce sens que les groupes de cohérence de $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ s'avèrent canoniquement $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\mathrm{Typ}}$ - isomorphes au groupe fondamental de V et, par conséquent, $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\mathrm{Typ}}$ - isomorphes aux groupes $\pi_1(V,x)$. En particulier, on trouve que pour V simplement connexe, $\Sigma(\mathcal{U})$ est simplement connexe pour n'importe quel recouvrement.

Dans les exemples (1) - (4) du § 2.2.2 on a donc récupéré $\pi_1(V,x)$ à l'aide de $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$. En général pour V non-simplement connexe l'homotopie de V et de $\Sigma(\mathcal{U})$ peuvent être sensiblement différentes. Par exemple si l'on prend $\mathcal{U} = \{V\}$, $\Sigma(\mathcal{U})$ est le complexe associé à un seul point, et est donc simplement connexe.

Rappelons de plus que tout revêtement de complexes simpliciaux $\tilde{\Sigma} \to \Sigma$ se traduit par un déroulement $\pi_1(\tilde{\Sigma}) \to \pi_1(\Sigma)$. Par conséquent tout revêtement $p : \tilde{V} \to V$ compatible avec $\mathcal{U}$ - $\mathcal{U}$ étant supposé quelconque - se traduit par un déroulement $\Delta_p : \Pi_o(G(\tilde{\mathcal{U}})) \to \Pi_o(G(\mathcal{U}))$.

De plus, le revêtement $p : \tilde{V} \to V$ définit de façon canonique un morphisme

---

*) Un morphisme $f : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$ de complexes simpliciaux connexes est appelé <u>revêtement</u> si pour tout opérateur de face d_i et tout diagramme $\begin{matrix} \tilde{\tau} \\ p \downarrow \\ \tau \xleftarrow[d_i]{} \sigma \end{matrix}$ il existe une complétion unique $\begin{matrix} \tilde{\tau} & \xleftarrow{d_i} & \tilde{\sigma} \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ \tau & \xleftarrow[d_i]{} & \sigma \end{matrix}$.

$\Phi_p : G(\tilde{\mathcal{U}}) \to G(\mathcal{U})$, et il s'avère que $\Delta_p = \Pi_o(\Phi_p)$. C'est-à-dire on a un diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G(\tilde{\mathcal{U}}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\Phi_p"'] & \Pi_o(G(\tilde{\mathcal{U}})) \arrow[d, "\Pi_o(\Phi_p)"] \\ G(\mathcal{U}) \arrow[r, "\gamma"] & \Pi_o(G(\mathcal{U})) \end{tikzcd}$$

De plus, en identifiant $\tilde{V}$ et V respectivement à $\mathrm{Top}(G(\tilde{\mathcal{U}}))$ et $\mathrm{Top}(G(\mathcal{U}))$, on trouve que $p = \mathrm{Top}(\Phi_p)$.

La théorie des revêtements $p : \tilde{V} \to V$ compatibles avec $\mathcal{U}$ se transpose donc complètement en la théorie des diagrammes (*), où $\Pi_o(\Phi_p)$ est un déroulement. § 2.3 fait l'étude de ces diagrammes pour un groupoïde topologique quelconque, et les résultats sont appliqués dans § 3 au cas des S-atlas.

2.3. Π_o - <u>déroulements</u>

Dans cette section nous supposons que les groupoïdes topologiques envisagés sont Π_o - COHÉRENTS, en particulier les groupoïdes discrets qui interviennent sont supposés cohérents.

Soit G un tel groupoïde topologique et $\Delta : \tilde{\Pi} \to \Pi_o(G)$ un déroulement. Par pull-back suivant $\gamma : G \to \Pi_o(G)$ on obtient un diagramme commutatif de groupoïdes topologiques

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Delta'"'] & \tilde{\Pi} \arrow[d, "\Delta"] \\ G \arrow[r, "\gamma"] & \Pi_o(G) \end{tikzcd}$$

Δ étant étale, Δ' l'est également. De plus, $\tilde{\Pi}$ et $\Pi_o(G)$ étant discrets, Δ' induit sur chaque composante connexe de G' un homéomorphisme sur une composante connexe de G . Finalement Δ' , en tant que pull-back du déroulement Δ , est lui aussi un déroulement.

On a en plus la

PROPOSITION 2.3.1 - <u>Dans la factorisation de</u> $p : G' \xrightarrow{\gamma} \Pi_o(G') \xrightarrow{\Pi_o(p)} \tilde{\Pi}$ (§ 2.2), $\Pi_o(p)$ <u>est un isomorphisme et</u> $\Delta \circ \Pi_o(p) = \Pi_o(\Delta')$.

Un déroulement $\Delta' : G' \to G$, qui induit sur chaque composante connexe de G' un homéomorphisme sur une composante connexe de G , sera appelé Π_o - <u>déroulement</u>. Cette définition est justifiée par la

PROPOSITION 2.3.2 - *Pour tout* Π_o *- déroulement* $\Delta' : G' \to G$, *le morphisme* $\Pi_o(\Delta') : \Pi_o(G') \to \Pi_o(G)$ *est un déroulement.*

En définissant la notion de morphisme de Π_o - déroulements d'un G fixe de manière évidente, les Π_o - déroulements de G et leurs morphismes constituent une catégorie $\underline{\underline{D}}_G$; pour G discret c'est la catégorie de tous ses déroulements.

Évidemment le pull-back P_γ par rapport à γ , et Π_o sont des foncteurs

$$\underline{\underline{D}}_G \underset{P_\gamma}{\overset{\Pi_o}{\rightleftarrows}} \underline{\underline{D}}_{\Pi_o(G)} .$$

On a

PROPOSITION 2.3.3 - Π_o *et* P_γ *sont des foncteurs réciproques* (§ 1.2). *Autrement dit,* Π_o *et* P_γ *sont des équivalences de catégories.*

Un Π_o - déroulement de G qui correspond par Π_o à un déroulement universel de $\Pi_o(G)$ sera dit Π_o - *universel* et l'image fonctorielle du groupe fondamental de $\Pi_o(G)$ sera appelé le *groupe* Π_o - *fondamental* ou souvent, par négligence, *groupe fondamental*, et sera désigné par F_G .

De plus, Π_o étant un foncteur de la catégorie des groupoïdes topologiques vers celle des groupoïdes discrets, la dernière proposition permet de transposer toute la théorie galoisienne des déroulements d'un groupoïde discret au cas des Π_o - déroulements. En particulier tout morphisme de groupoïdes topologiques $\Phi : G \to H$ entraîne un $\underline{\underline{Gr}}\ \underline{\underline{Typ}}$ - morphisme $\Phi_* : F_G \to F_H$.

Supposons que $\Phi : G_1 \to G$ soit une couverture de groupoïdes topologiques, et $\Delta : \tilde{G} \to G$ un Π_o - déroulement. Par pull-back on obtient un diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{G}_1 & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{G} \\ {\scriptstyle \Delta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ G_1 & \xrightarrow{\Phi} & G \end{array}$$

$\tilde{\Phi}$, en tant que pull-back de Φ , est une couverture.

$\tilde{G}$ étant Π_o - cohérent, cela entraîne la Π_o - cohérence de $\tilde{G}_1$. Alors Δ_1 , en tant que pull-back de Δ , est un Π_o - déroulement de groupoïdes Π_o - cohérents.

Supposons en plus que E_G soit simplement connexe. Puisque Δ induit sur chaque composante connexe de $\tilde{G}$ un homéomorphisme sur une composante connexe de G , δ fait de même relativement $E_{\tilde{G}}$ et E_G . En conséquence $E_{\tilde{G}}$ est également simplement connexe.

Alors dans le diagramme commutatif

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} \Pi_o(\tilde{G}_1) \arrow[r, "\Pi_o(\tilde{\Phi})"] \arrow[d, "\Pi_o(\Delta_1)"'] & \Pi_o(\tilde{G}) \arrow[d, "\Pi_o(\Delta)"] \\ \Pi_o(G_1) \arrow[r, "\Pi_o(\Phi)"'] & \Pi_o(G) \end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont des déroulements, alors que les flèches horizontales sont des couvertures d'après le corollaire 2 du § 2.2. De plus, le lemme du § 1.2 montre que (**) est un diagramme de pull-back (relativement $\Pi_o(\Phi)$ et $\Pi_o(\Delta)$).

Puisque Π_o est une équivalence de la catégorie des Π_o - déroulements de G vers celle de $\Pi_o(G)$ (prop. 2.3.3), que le pull-back (**) est une équivalence de $\underline{\underline{D}}_{\Pi_o(G)}$ vers $\underline{\underline{D}}_{\Pi_o(G_1)}$ (de la catégorie des déroulements de $\Pi_o(G)$ vers celle de $\Pi_o(G_1)$), on obtient, en appliquant de nouveau la proposition 2.3.3, le résultat que le pull-back diagramme (*) établit une équivalence de $\underline{\underline{D}}_G$ vers $\underline{\underline{D}}_{G_1}$.

Cela montre que, étant donné un Π_o - déroulement $E_1 : G_1' \to G_1$, on peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G_1' \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "E_1"'] & G' \arrow[d, "E"] \\ G_1 \arrow[r, "\Phi"'] & G \end{tikzcd}$$

où Φ' est une couverture, et E un déroulement, en prenant $G' = K_1'\backslash G_1'/K_1'$ où $K_1' = E_1^{-1}(\ker \Phi)$, et en prenant Φ' comme projection canonique. Le passage $E_1 \to E$ sera désigné par Q.

En résumant on a le pendant de la proposition 1.2.1 que voici

PROPOSITION 2.3.4 - <u>Soit</u> G <u>un groupoïde topologique</u> (Π_o - <u>cohérent!</u>) <u>tel que</u> E_G <u>soit simplement connexe. Alors le pull back</u> P_Φ <u>par rapport à une couverture</u> $\Phi : G_1 \to G$ <u>établit une équivalence de la catégorie des</u> Π_o - <u>déroulements de</u> G <u>vers celle de</u> G_1. <u>L'opérateur</u> Q <u>est réciproque à</u> P_Φ.

<u>En particulier le</u> $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$ - <u>morphisme</u> $\Phi_* : F_{G_1} \to F_G$ <u>de groupes fondamentaux est un</u> $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$ - <u>isomorphisme. De plus</u> F_G <u>est canoniquement</u> $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$ - <u>isomorphe au groupe fondamental</u> $F_{\Pi_o(G)}$ <u>de</u> $\Pi_o(G)$.

2.3.1. Exemples

Pour illustrer les constructions précédentes reprenons les exemples (2) et (5) du § 2.2.2.

(2) On conserve les notations. Le changement de carte $\tau : U_- \to U_+$ se décompose en deux parties τ_+, τ_- telles que $T_{++} = \hat{\tau}_+$, $T_{+-} = \hat{\tau}_-$. $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ est le groupoïde libre aux sommets E_-, E_+ et générateurs T_{++}, T_{+-}, $\alpha(T_{++}) = \alpha(T_{+-}) = E_-$, $\beta(T_{++}) = \beta(T_{+-}) = E_+$. En introduisant $R := T_{++}T_{+-}^{-1}$, le couple R, T_{++} constitue également un système de générateurs. On pose $A := \alpha^{-1}(E_-) = \{R^n, R^n T_{++} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. D'après § 1.2, $\Delta : A \times A \to \Pi_o(G(\mathcal{U}))$ donné par $(R^k T_{++}^\delta, R^m T_{++}^\varepsilon) \mapsto T_{++}^{-\delta} R^{m-k} T_{++}^\varepsilon$, $\delta = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$ est un déroulement universel. On va compléter le diagramme de pull-back

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\gamma} & A \times A \\ {\scriptstyle\tilde{\Delta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ G(\mathcal{U}) & \xrightarrow[\gamma]{} & \Pi_o(G(\mathcal{U})) \end{array}$$

en définissant $\tilde{G}$ comme un groupoïde du type $G(\tilde{\mathcal{U}})$.

A cet effet introduisons pour tout $n \in \mathbb{Z}$ des copies U_{-n} et U_{+n} respectivement de U_- et U_+. $\varphi_n : U_- \to U_{-n}$, et $\psi_n : U_+ \to U_{+n}$ désignerons les identifications canoniques. De plus on pose (notation à droite!) $\tau_{+n} := \varphi_n^{-1}\tau_+\psi_n : U_{-n} \to U_{+n}$ et $\tau_{-n} := \varphi_n^{-1}\tau_-\psi_{n-1} : U_{-n} \to U_{+(n-1)}$. $\tilde{G}$ sera le groupoïde associé au pseudo-groupe engendré par id_{U_+}, id_{U_-}, τ_{+n}, τ_{-n}, $n \in \mathbb{Z}$. De plus on pose $\tilde{U} := \coprod_{n \in \mathbb{Z}} (U_{+n} \amalg U_{-n})$. Alors $(\tilde{U};\tilde{G})$ est l'atlas d'une hélice $\mathcal{R}$ au-dessus S^1. On définit $\gamma : \tilde{G} \to A \times A$ par $\hat{\tau}_{+n} \to (R^n, R^n T_{++})$, $\hat{\tau}_{-n} \to (R^n, R^{n-1}T_{++})$, et $\tilde{\Delta}(\varphi_{n,p}^{-1}\tau_{+,p}\psi_{n,p}^{-1}) := \tau_{+,p}$, où $p \in U_-$ et la notation f_p désigne le germe de f en p; de même on pose $\tilde{\Delta}(\varphi_{n,p}^{-1}\tau_{-,p}\psi_{n-1,p}^{-1}) := \tau_{-,p}$.

L'élément générateur du groupe fondamental de $\tilde{\Delta}$ consiste en le changement $n \mapsto n+1$ de l'indice n. Interprété sur $\mathcal{R}$ cela revient à faire "monter chaque point d'un étage".

(5) $\Pi_o(G) =: H$ est engendré par le générateur T_1, $\alpha(T_1) = \beta(T_1) = E$. Le déroulement universel $H \times H \to H$ est donné par $(T^k, T^m) \mapsto T^{m-k}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, U_n sera une copie de $V := \langle -1,+1 \rangle$; $\varphi_n : V \to U_n$ sera l'identification canonique. De plus on définit $\tau_{n,n+1} := \varphi_n^{-1}\tau\varphi_{n+1} : U_n \to U_{n+1}$ (notation à droite). $G(\tilde{\mathcal{U}})$ sera le groupoïde engendré par $\widehat{id_{U_n}}$ et $\hat{\tau}_{n,n+1}$, où n parcourt $\mathbb{Z}$.

Alors $(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} U_n ; G(\tilde{\mathcal{U}}))$ est un atlas de la droite réelle, où U_n représente l'intervalle $\langle -2^n, 2^n \rangle =: V_n$, la représentation $U_n \to V_n$ étant $x \mapsto 2^n x$.
$\gamma : G(\tilde{\mathcal{U}}) \to H \times H$ se définit en prolongeant en un morphisme les applications $\gamma : \hat{\tau}_{n,n+1} \to (T_1^n, T_1^{n+1})$; $\tilde{\Delta} : G(\tilde{\mathcal{U}}) \to G$ s'obtient comme le morphisme qui prolonge $\varphi_{n,p}^{-1} \hat{\tau}_p \varphi_{n+1,p} \mapsto \tau_p$. De nouveau le générateur du groupe fondamental agit par le changement $n \mapsto n+1$ de l'indice n . En tant que transformation sur la droite réelle cela revient à une multiplication par 2 .

§ 3 - Les S - atlas

Notations

$P, P', P_1, \ldots, V, V', V_1, \ldots$ désigneront des variétés (séparées ou non), dont toutes les composantes connexes ont la même dimension.

$M_{P,P'}$:= faisceau des germes d'applications continues $U \to P'$, où $U \subset P$ est ouvert.

$\alpha : M_{P,P'} \to P$ et $\beta : M_{P,P'} \to P'$ sont les applications "source" et "but"; α est étale. S'il est besoin α_M, β_M désignent les restrictions $\alpha|M$ et $\beta|M$ où $M \subset M_P$ est un ouvert.

Dans le cas où $\dim P = \dim P'$, $\Gamma_{P,P'}$ désigne le sous-faisceau $\subset M_{P,P'}$ des germes d'homéomorphismes locaux; $\Gamma_{P,P'} = \Gamma^{-1}_{P',P}$. On mettra $\Gamma_P := \Gamma_{P,P}$, $E_P := E_{\Gamma_P}$; on identifiera souvent E_P et P moyennant α.

Pour une application continue $\varphi : U \to P'$ définie sur U, $\hat{\varphi}$ sera l'ensemble de ses germes, et $\hat{\varphi}_u$ désignera le germe de φ en u.

Pour conformer aux règles de composition dans un groupoïde il convient de considérer les applications locales $\varphi : U \to P'$ comme des opérateurs à droite. En tant qu'opérateurs à droite $\varphi_1\varphi_2$ notera la composition de deux applications, tandis que leur composition en tant qu'opérateurs à gauche sera toujours notée $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Quant aux germes d'applications, ils seront toujours considérés comme opérateurs à droite.

De cette façon Γ_P est un groupoïde topologique au sens des paragraphes précédents.

3.1. S - atlas, généralités

Pour une application locale $\varphi : U \to P'$, où $U \subset P$ est ouvert, $\hat{\varphi}$ est ouvert dans $M_{P,P'}$, et l'on a $\alpha_{\hat{\varphi}}\varphi = \beta_{\hat{\varphi}}$ (composition d'opérateurs à droite!). En passant de cette équation d'applications à l'équation correspondante pour les germes, et en mettant $\hat{\varphi}_u =: f$, on obtient la "première identité tautologique"

$$\hat{\alpha}_f f = \hat{\beta}_f \tag{1}$$

ou, $\alpha_{\hat{\varphi}}$ étant étale,

$$f = \hat{\alpha}_f^{-1}\, \hat{\beta}_f\,. \tag{1a}$$

Un groupoïde agissant sur une variété P, ou groupoïde sur P tout court, sera un sous-groupoïde ouvert de Γ_P qui contient E_P. L'identité tautologique permet de caractériser les groupoïdes sur des variétés parmi les groupoïdes topologiques par la

PROPOSITION 3.1.1 - *Pour qu'un groupoïde topologique* T *soit réalisable comme un groupoïde sur une variété* P *convenable il faut et il suffit que* (i) E_T *soit une variété,* (ii) $\alpha : T \to E_T$ *soit étale,* (iii) E_T *soit l'intérieur de* $\ker(\alpha,\beta)$.

En prenant $P := E_T$, $f \to \hat{\alpha}_f^{-1}\hat{\beta}_f$ *est une telle réalisation, et c'est essentiellement la seule.*

En effet, pour démontrer la suffisance, on observe d'abord qu'une section locale σ par rapport à α entraîne une application locale $\sigma\beta : E_T \to E_T$, et que (ii) permet d'associer à tout $t \in T$ un germe $\tilde{t}$ d'application locale $E_T \to E_T$. De plus, puisque β n'est autre que le composé $t \mapsto t^{-1} \mapsto \alpha(t^{-1})$, et que l'inversion est un homéomorphisme, β est étale aussi. Par conséquent $t \mapsto \tilde{t}$ est un morphisme ouvert $T \to \Gamma_{E_T}$ qui conserve α et β . La condition (iii) garantit que le noyau de ce morphisme se réduit à E_T . En tenant compte du fait que α et β sont conservées, cela implique l'injectivité de $t \mapsto \tilde{t}$, i.e. $t \mapsto \tilde{t}$ est un plongement ouvert.

Supposons que T soit un groupoïde sur P , et que $\Phi : T' \to T$ soit un morphisme étale de groupoïdes topologiques. Alors $\varphi : E_{T'} \to E_T$ est étale aussi, d'où l'on conclut que les conditions (i), (ii) de la proposition précédente sont vérifiées pour T' . Si, en plus, Φ induit une injection sur chaque groupe de cohérence de T' , la condition (iii) est également vérifiée.

Or les couvertures et les Π_o - déroulements de T sont des morphismes de telle sorte, d'où le

COROLLAIRE - *Soit* T *un groupoïde sur une variété et* $\Phi : T' \to T$ *une couverture ou un* Π_o *- déroulement. Alors* T' *est également un groupoïde sur une variété.*

Soit G un pseudo-groupe qui opère (à droite) sur une variété P . On met $T_G := \{\hat{g} \mid g \in G\}$; T_G est un sous-groupoïde ouvert de Γ_P . Réciproquement pour tout sous-groupoïde ouvert T , $E_P \subset T \subset \Gamma_P$, les homéomorphismes locaux g tels que $\hat{g} \subset T$ constituent un pseudo-groupe G_T .

Un S - *atlas* ou *schéma de variété* est un couple $(P;T)$ où T est un groupoïde sur P ; dans le cas où T provient d'un pseudo-groupe G donné à l'avance on écrira souvent $(P;G)$ au lieu de $(P;T_G)$.

Les composantes connexes de P sont appelées *cartes*, les éléments de G_T sont les *transitions* ou *changements de carte*.

$(P;T)$ est dit à <u>holonomie triviale</u> lorsque $\ker(\alpha_T,\beta_T) = E_P$.
Tout atlas d'une variété au sens usuel est un S - atlas à holonomie triviale.

<u>Remarques</u>

Puisque P se retrouve comme sous-espace $E_T \subset T$, et que l'action de T sur P est entièrement déterminée par sa structure de groupoïde topologique (selon l'identité (1a)), la première coordonnée dans la notation $(P;T)$ est en effet superflue, et divers auteurs préfèrent parler de groupoïde tout court, voir p. ex. [13]. Cependant l'interprétation de $(P;T)$ comme un "atlas", ce qui est peut-être mieux suggérée par la notation introduite, rend les définitions, qui suivent, plus intelligibles.

Un <u>morphisme</u> $\Lambda : (P_1;T_1) \to (P_2;T_2)$ <u>de</u> S - <u>atlas</u> est un ouvert $\Lambda \subset M_{P_1,P_2}$ tel que (i) $T_1 \Lambda T_2 \subset \Lambda$, (ii) $\alpha(\Lambda) = P_1$, (iii) pour tout $p \in P_1$, $\alpha_\Lambda^{-1}(p)$ est une T_2 - orbite, i.e. $\alpha_\Lambda^{-1}(p) = \ell T_2$ pour $\ell \in \alpha_\Lambda^{-1}(p)$

Dans le cas où $(P_i;T_i)$ est l'atlas d'une variété V_i , $i = 1,2$, la notion de morphisme n'est autre que la traduction de la notion d'une application continue $V_1 \to V_2$ en termes de leurs atlas.

La composition $\Lambda' \circ \Lambda$ de deux morphismes $\Lambda : (P_1;T_1) \to (P_2;T_2)$, $\Lambda' : (P_2;T_2) \to (P_3;T_3)$, en tant qu'opérateurs à gauche, est définie comme le produit $\Lambda\Lambda'$.

Les S - atlas avec leurs morphismes constituent une catégorie $\underline{\underline{SV}}$.

Le morphisme $\Lambda : (P_1;T_1) \to (P_2;T_2)$ est une $\underline{\underline{SV}}$ - équivalence si l'on a en outre (iv) $\Lambda \subset \Gamma_{P_1,P_2}$, (v) $\beta(\Lambda) = P_2$, (vi) $\beta_\Lambda^{-1}(q)$ est une T_1 - orbite pour $q \in P_2$. En particulier $T_1 : (P_1;T_1) \to (P_1;T_1)$ et $T_2 : (P_2;T_2) \to (P_2;T_2)$ sont les identités.

Soit $(P;T)$ un S - atlas, et $U \subset P$ un ouvert. On pose ${}_UT := \alpha_T^{-1}(U)$, $T_U := \beta_T^{-1}(U)$, ${}_UT_U = {}_UT \cap T_U$, et l'on a $E_U \subset {}_UT_U$, $T_U\, {}_UT_U = T_U$, ${}_UT_U\, {}_UT = {}_UT$, ${}_UT\, T_U = {}_UT_U$. U est dit <u>ouvert fondamental</u> (relatif T) lorsque $\beta({}_UT) = P = \alpha(T_U)$.

Le S - atlas $(U;{}_UT_U)$ sera dit <u>ouvert</u> dans $(P;T)$ et ${}_UT : (U;{}_UT_U) \to (P;T)$ est le morphisme d'<u>inclusion</u>. L'inclusion est une équivalence ssi U est un ouvert fondamental; dans ce cas on dira que ${}_UT$ est une <u>équivalence d'inclusion</u>.

Soit L un groupe d'automorphismes de $(P;T)$. Alors $T_L := \bigcup_{\Lambda\in L} \Lambda$ est un groupoïde sur P , et $(P;T_L)$ est appelé le <u>quotient</u> $L\backslash(P;T)$ <u>de</u> $(P;T)$ <u>par rapport à</u> L ; $T_L : (P;T) \to (P;T_L)$ est la <u>projection canonique</u>. En général pour tout groupoïde T' sur P tel que $T \subset T'$, le morphisme $T' : (P;T) \to (P;T')$ s'appelle la <u>projection canonique</u>.

On définit $\mathrm{Top}(P;T) := \mathrm{Top}(T) = P/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence sur P définie par $\alpha(t) \sim \beta(t)$, $t \in T$ (§ 2.1). Dans ce cas $\mathrm{top} : P \to \mathrm{Top}(P;T)$ et $\mathrm{top} : T \to \mathrm{Top}(P;T)$ sont des applications ouvertes.

$(P;T)$ sera dit <u>connexe</u> si c'est le cas pour $\mathrm{Top}(P;T)$; la connexité de $(P;T)$ revient à la Π_o - cohérence de T (§ 2.2).

A toute variété V on associe le S-atlas $(V;E_V)$. Alors $V \mapsto (V;E_V)$ est un plongement de la catégorie des variétés dans $\underline{\underline{SV}}$. Un S-atlas équivalent à un atlas $(V;E_V)$ sera appelé <u>variété</u> par abus de langage. Pour que $(P;T)$ soit une variété il faut et il suffit que $\mathrm{top} : P \to \mathrm{Top}(P;T)$ soit étale; dans ce cas $V := \mathrm{Top}(P;T)$ est une variété et $\widehat{\mathrm{top}} : (P;T) \to (V;E_V)$ est une équivalence.
Pour tout morphisme $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ on définit $\mathrm{Top}\,\Lambda : \mathrm{Top}(P;T) \to \mathrm{Top}(P';T')$ par $\mathrm{Top}\,\Lambda : \mathrm{top}(p) \mapsto \mathrm{top}(p')$, où $p' \in \beta(\alpha_\Lambda^{-1}(p))$, en observant que ni un changement de choix de p' ni un changement de p dans leur $\sim$-classe fait changer $\mathrm{top}(p')$ ou $\mathrm{top}(p)$. En bref, Top est un foncteur de la catégorie $\underline{\underline{SV}}$ vers celle des espaces topologiques.

Finalement dans le cas où P est une C^k-variété $(0 \le k \le \omega)$, et T consiste de germes de C^k-difféomorphismes, $(P;T)$ est dit (de classe) C^k. En prenant des morphismes constitués de germes de classe C^k, on obtient la C^k-sous-catégorie de $\underline{\underline{SV}}$.

3.1.1. <u>Comparaison de langages</u>

Reprenons encore une fois l'exemple directeur. Comme on a déjà remarqué ci-dessus un morphisme $V \to V'$ de variétés se traduit en un morphisme $(U;G(\mathcal{U})) \to (U';G(\mathcal{U}'))$, où les deux S-atlas sont associés à des recouvrements $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ de V et V'. Un isomorphisme $V \to V'$ se traduit par une équivalence. Autrement dit, tous les atlas de V sont équivalents en tant que S-atlas. Puisque $(V;E_V)$ se trouve parmi les atlas de V, on pourrait dire, par abus de langage, que V est équivalente à chacun de ses atlas.

Rappelons (§ 2.1) que $G(\mathcal{U}) = \hat{\varphi}\hat{\varphi}^{-1}$, où $\varphi : U \to V$ est la projection canonique, $U = \coprod U_i$, $\{U_i\} = \mathcal{U}$. Plus généralement soit $\psi : W \to V$ une surjection étale quelconque, et mettons $G_W := \hat{\psi}\hat{\psi}^{-1}$. Alors $(W;G_W)$ est un S-atlas, et, comme on vérifiera, $\hat{\psi} : (W;G_W) \to (V;E_V)$ est une équivalence. Supposons en particulier que $\psi : W \to V$ soit un revêtement universel, et que F soit le groupe fondamental, i.e. le groupe des automorphismes de W qui commutent à ψ. En tenant compte du fait que F agit transitivement sur les fibres il s'avère qu $\hat{\psi}\hat{\psi}^{-1} = \hat{F} = \bigcup_{f \in F} \hat{f}$.
D'autre part $(W;\hat{F})$ n'est autre que le S-atlas quotient ${}_F\backslash(W;E_W)$, et l'on trouve que ${}_F\backslash(W;E_W)$ et $(V;E_V)$ sont canoniquement équivalents (moyennant $\hat{\psi}$).

De plus, si $U \subset W$ est un ouvert fondamental au sens classique, i.e. toute orbite de F coupe U, on sait bien qu'on peut "récupérer V de U à l'aide des identifications induites par les éléments de F". C'est précisément ce qu'on retrouve en langage de S-atlas: Le morphisme composé ${}_U\hat{F}\hat{\psi} : (U; {}_U\hat{F}_U) \to (W;\hat{F}) \to (V;E_V)$ est une équivalence.

3.2. Morphismes de groupoïdes et de S-atlas

Soient T et T' des groupoïdes sur P resp. P', et $\Phi : T \to T'$ un morphisme de groupoïdes topologiques.

L'application φ induite par Φ est une application $P \to P'$ en identifiant toujours P à E_T et P' à $E_{T'}$. En prenant un couple $t, t' := \Phi(t)$, et des voisinages ouverts W, W' de t, t' tels que $\Phi(W) \subset W'$ et que $\alpha_W : W \to P$, $\alpha_{W'} : W' \to P'$ soient des plongements, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\alpha_W"'] \arrow[dr, "\beta_W"] \arrow[dd, "\Phi"] & \\
\alpha(W) \arrow[rr, "\alpha_W^{-1}\beta_W"'] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \beta(W) \arrow[dd, "\varphi"] \\
 & W' \arrow[dl, "\alpha_{W'}"'] \arrow[dr, "\beta_{W'}"] & \\
\alpha(W') \arrow[rr, "\alpha_{W'}^{-1}\beta_{W'}"'] & & \beta(W')
\end{tikzcd} .$$

En passant aux germes en t resp. t', et en tenant compte de la première identité tautologique, on obtient la seconde identité tautologique

$$\hat{\varphi}_{\alpha(t)}\, \Phi(t) = t\, \hat{\varphi}_{\beta(t)}, \tag{2}$$

d'où l'inclusion

$$T\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\,\Phi(T) \subset \hat{\varphi}\,T' .$$

La dernière inclusion permet de vérifier que

$$\Lambda(\Phi) := \hat{\varphi}T'$$

est un morphisme $(P;T) \to (P';T')$.

De plus si $\Phi' : T' \to T''$ est un morphisme, où T'' est un groupoïde sur P'', on a $\Lambda(\Phi' \circ \Phi) = \Lambda(\Phi') \circ \Lambda(\Phi)$, i.e. $\Lambda(\ )$ est un foncteur de la catégorie des groupoïdes sur des variétés vers celle des S - atlas.

Lorsque Φ est étale, φ est étale (§ 2.1) et en conséquence $\Lambda(\Phi)$ est *étale*, i.e. $\Lambda(\Phi) \subset \Gamma_{P,P'}$. Inversement, si $\Lambda(\Phi)$ est étale, φ est étale, et, en tenant compte du diagramme ci-dessus où α est étale, il s'ensuit que Φ est étale. Dans ce cas il découle de (2) que $\ker \Phi \subset \hat{\varphi}\hat{\varphi}^{-1}$, ce qui fait apparaître que les fibres sont simplement cohérentes; les fibres ne sont cohérentes que si $\ker \Phi = \hat{\varphi}\hat{\varphi}^{-1}$. Par conséquent Φ est une couverture ssi Φ est étale surjectif et $\ker \Phi = \hat{\varphi}\hat{\varphi}^{-1}$.

Cette caractérisation permet de vérifier que pour une couverture Φ, $\Lambda(\Phi)$ est une équivalence. Une équivalence de ce type sera également appelée *couverture*. Dans ce cas on dira que $(P';T')$ est un *recollement* de $(P;T)$ (moyennant $\Lambda(\Phi)$) et $(P;T)$ est un *décollement* de $(P';T')$ (moyennant $\Lambda(\Phi)^{-1}$).

Toujours dans le cas de Φ étale, on trouve que $\varphi(P) = U'$ est un ouvert de P', et que $\operatorname{im} \Phi \subset {}_{U'}T'_{U'}$; Φ se factorise en un morphisme étale $\Phi_1 : T \to {}_{U'}T'_{U'}$ et l'inclusion $\Phi_2 : {}_{U'}T'_{U'} \subset T'$. Par conséquent $\Lambda(\Phi) = \Lambda(\Phi_2) \circ \Lambda(\Phi_1)$ où $\Lambda(\Phi_1) : (P;T) \to (U';{}_{U'}T_{U'})$ et où $\Lambda(\Phi_2)$ n'est autre que l'inclusion ${}_{U'}T' : (U';{}_{U'}T_{U'}) \to (P';T')$ (§ 3.1).

Par des vérifications simples on obtient la

PROPOSITION 3.2.1 - $\Lambda(\Phi)$ *est une équivalence ssi il est le produit d'une couverture et une équivalence d'inclusion* (§ 3.1).

En général une équivalence $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ ne provient pas de cette façon d'une couverture. Cependant on a la

PROPOSITION 3.2.2 - *Pour toute équivalence* $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ *il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & (P'';T'') \arrow[dl, "\Lambda(\Phi)"'] \arrow[dr, "\Lambda(\Phi')"] & \\ (P;T) \arrow[rr, "\Lambda"'] & & (P';T') \end{tikzcd}$$

où $\Lambda(\Phi)$ *et* $\Lambda(\Phi')$ *sont des couvertures*.

Autrement dit, on peut passer de $(P;T)$ à $(P';T')$ par un décollement suivi d'un recollement.

Pour démontrer la proposition on observe que Λ a une structure de variété étalée par α et β respectivement sur P et P'. On met $T'' := \hat{\alpha}_\Lambda T \hat{\alpha}_\Lambda^{-1}$ et Φ : $\hat{\alpha}_{\ell_1} t \hat{\alpha}_{\ell_2}^{-1} \mapsto t$, où $\alpha(\ell_1) = \alpha(t)$, $\alpha(\ell_2) = \beta(t)$, $\ell_1, \ell_2 \in \Lambda$, $t \in T$. Puisque Λ est une équivalence (d'où $T' = \Lambda^{-1} T \Lambda$, $T = \Lambda T' \Lambda^{-1}$) et que $\Lambda = \hat{\alpha}_\Lambda^{-1} \hat{\beta}_\Lambda$ (en vertu de la première identité tautologique), on trouve que $T'' = \hat{\beta}_\Lambda T' \hat{\beta}_\Lambda^{-1}$. En mettant Φ' : $\hat{\beta}_{\ell_1} t' \hat{\beta}_{\ell_2}^{-1} \mapsto t'$, où $\beta(\ell_1) = \alpha(t')$, $\beta(\ell_2) = \beta(t')$; $\ell_1, \ell_2 \in \Lambda$, $t' \in T$, et en utilisant à nouveau la première identité tautologique, la proposition s'établit.

Un morphisme $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ est dit à *isotropie triviale* s'il jouit de la propriété: $(\ell t' = \ell,\ \ell \in \Lambda,\ t' \in T') \Rightarrow (t' \in E_{P'})$. Par exemple si $(P';T')$ est à holonomie triviale, tout morphisme $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ est à isotropie triviale. Un autre cas qui garantit l'isotropie triviale est celui où Λ est *ouvert*, c.-à-d. Λ consiste de germes d'applications ouvertes.

Dans le cas d'isotropie triviale on a un analogue à la proposition précédente, notamment la

PROPOSITION 3.2.3 - *Pour un morphisme* $\Lambda : (P;T) \to (P';T')$ *à isotropie triviale il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & (P'';T'') \arrow[dl, "\Lambda(\Phi)"'] \arrow[dr, "\Lambda(\Psi)"] & \\ (P;T) \arrow[rr, "\Lambda"'] & & (P';T') \end{tikzcd}$$

où $\Phi : T'' \to T$ *est une couverture et* $\Psi : T'' \to T'$ *un morphisme de groupoïdes topologiques.*

La démonstration est analogue à la précédente.

A titre d'exemple reprenons la situation de 3.1.1 où $\varphi : U \to V$ est une surjection étale et $G(\mathcal{U}) = \hat{\varphi}\hat{\varphi}^{-1}$. Pour $g \in G(\mathcal{U})$ la factorisation $g = f_1 f_2^{-1}$, $f_i \in \hat{\varphi}$, est unique, et gg', où $g' = f_3 f_4^{-1}$ est défini ssi $f_3 = f_2$. Alors $\Phi : f_1 f_2^{-1} \mapsto f_1^{-1} f_1 = e_{\beta(f)} \in E_V$ est un morphisme étale de groupoïdes topologiques qui induit φ sur $E_{\mathcal{U}} \simeq U$. Puisque $\ker \Phi = G(\mathcal{U})$, Φ est bien une couverture; apparamment $\Lambda(\Phi)$ s'identifie à $\hat{\varphi}$.

Dans le cas d'une surjection étale $\psi : W \to V$, $\hat{\psi} : (W;E_W) \to (V;E_V)$ et $\hat{\psi} : (W;\hat{\psi}\hat{\psi}^{-1}) \to (V;E_V)$ sont des morphismes; le premier décrit le morphisme ψ de variétés, tandis que le second est une couverture.

3.3. Revêtements

Tous les groupoïdes T, T', ..., T_1, ..., envisagés dans cette section sont des groupoïdes sur des variétés P, P', ..., P_1, ..., et sont supposés Π_o - COHÉRENTS.

Au § 2.2.3 on a fait remarquer que, pour une variété connexe V à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ en domaines simplement connexes, la théorie des revêtements de V se réduit à la théorie des diagrammes commutatifs

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} G(\tilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\gamma} & \Pi_o(G(\tilde{\mathcal{U}})) \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ G(\mathcal{U}) & \xrightarrow[\gamma]{} & \Pi_o(G(\mathcal{U})) \end{array}$$

où Δ est un déroulement.

Dans le cas où $\mathcal{U}$ est quelconque, le diagramme (*) permet toujours de récupérer les revêtements de V compatibles avec $\mathcal{U}$.

De toute façon pour les recouvrements $\mathcal{U}$ en domaines simplement connexes le groupe fondamental de $\Pi_o(G(\mathcal{U}))$ s'avère indépendant du choix particulier de $\mathcal{U}$.

Puisque (*) ne fait intervenir que des notions définies pour la catégorie des S - atlas, on est conduit à développer une théorie de revêtements de S - atlas à partir de (*), où l'on a remplacé $G(\mathcal{U})$ par le groupoïde de transition T d'un S - atlas connexe (P;T), et la flèche $\Delta : \Pi_o(G(\tilde{\mathcal{U}})) \to \Pi_o(G(\mathcal{U}))$ par un déroulement de groupoïdes discrets, le reste du diagramme étant complété par pull-back. Toutefois, comme l'exemple d'une variété fait déjà voir, on ne peut espérer aboutir à une notion de groupe fondamental invariante par rapport à des équivalences que si l'on passe à la classe des S - atlas (P;T) à P simplement connexe. En effet on va établir ci-dessous que pour deux S - atlas équivalents $(P_i;T_i)$, $i=1,2$, à P_i simplement connexe, les groupes fondamentaux de $\Pi_o(T_1)$ et $\Pi_o(T_2)$ sont isomorphes. Cela permettra de développer une bonne théorie de revêtements pour les S - atlas connexes. Au § 5 il s'avérera que le groupe fondamental, introduit ici par analogie au cas d'une variété, s'identifie (au sens de $\underline{\underline{\text{Gr}}}$ $\underline{\underline{\text{Typ}}}$) à celui du classifiant BT de Haefliger.

On dira que $\Lambda(\Delta') : (P';T') \to (P;T)$ est un <u>revêtement</u> <u>déroulant</u> de S - atlas connexes si $\Delta' : T' \to T$ est un Π_o - déroulement. Un <u>morphisme</u> $\Lambda : \Lambda(\Delta') \to \Lambda(\Delta'')$ <u>de</u> <u>revêtements</u> <u>déroulants</u>, où $\Lambda(\Delta'') : (P'';T'') \to (P;T)$ est un deuxième revêtement déroulant, est un morphisme $\Lambda : (P';T') \to (P'';T'')$ tel que $\Lambda\Lambda(\Delta'') = \Lambda(\Delta')$.

Aut $\Lambda(\Delta')$ désignera le groupe des automorphismes $\Lambda : \Lambda(\Delta') \to \Lambda(\Delta')$. On a, tout en conservant les notations,

PROPOSITION 3.3.1 - *Pour tout morphisme* $\Lambda : \Lambda(\Delta') \to \Lambda(\Delta'')$ *il existe un unique morphisme* $\Phi : T' \to T''$ *tel que* $\Delta'' \circ \Phi = \Delta'$ *et que* $\Lambda = \Lambda(\Phi)$.

et

PROPOSITION 3.3.2 - *Pour un endomorphisme de revêtement déroulant* $\Lambda : \Lambda(\Delta') \to \Lambda(\Delta')$ *la propriété* $\Lambda \cap T' \neq \emptyset$ *entraîne* $\Lambda = \Lambda(\mathrm{id}_{T'}) = T'$.

Un morphisme $\Lambda : (P'';T'') \to (P'';T'')$ est dit *localement stable* lorsque $\Lambda \cap T \neq \emptyset$. La propriété de stabilité locale est conservée par toute équivalence.

Un groupe d'automorphismes d'un S - atlas opère de manière *génériquement libre* si l'automorphisme identique est le seul élément localement stable.

La proposition 3.3.1 dit que le foncteur $\Lambda(\ldots)$ établit une équivalence entre la catégorie des Π_o - déroulements de T et celle des revêtements déroulants de $(P;T)$. La proposition 3.3.2 dit que $\mathrm{Aut}(\Lambda(\Delta'))$ opère de manière génériquement libre.

Remarque

Pour une variété $(V;E_V)$ la notion de morphisme localement stable se réduit à la notion usuelle, i.e. celle d'un morphisme $\lambda : V \to V$ pour lequel il existe un ouvert $U \subset V$ de façon que $\lambda|U = \mathrm{id}_U$. De plus, dans ce cas, la comparaison ci-dessous entre la définition d'action génériquement libre et celle d'action libre d'un groupe L fournira peut-être une justification du vocable "génériquement libre".

"génériquement libre": $(\lambda \in L,\ U \subset V$ ouvert, $\lambda|U = \mathrm{id}_U) \Rightarrow (\lambda = \mathrm{id}_V)$

"libre" : $(\lambda \in L,\ p \in V,\ \lambda|(p) = \mathrm{id}_{(p)}) \Rightarrow (\lambda = \mathrm{id}_V)$.

Supposons que $\Lambda : (P;T) \to (P_1;T_1)$ soit une équivalence de S - atlas et que P, P_1 soient simplement connexes. D'après la proposition 3.3.2 il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & (P_2;T_2) \arrow[dl, "\Lambda(\Phi)"'] \arrow[dr, "\Lambda(\Psi)"] & \\ (P;T) \arrow[rr, "\Lambda"'] & & (P_1;T_1) \end{tikzcd}$$

où Φ et Ψ sont des couvertures.

Alors pour tout Π_o - déroulement $\Delta : T' \to T$ on obtient un diagramme commutatif de Π_o - déroulements

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[d, "\Delta"'] & T'_2 \arrow[l, "\Phi'"'] \arrow[r, "\Psi'"] \arrow[d, "\Delta_2"] & T'_1 \arrow[d, "\Delta_1"] \\
T & T_2 \arrow[l, "\Phi"] \arrow[r, "\Psi"'] & T_1
\end{tikzcd}$$

où Δ_2 est le pull-back de Δ, Δ_1 est obtenu de Δ_2 par l'opérateur Q (§ 2.3), et où Φ' et Ψ' sont des couvertures. De cette façon on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(P';T') \arrow[r, "\Lambda(\Phi')^{-1}\Lambda(\Psi')"] \arrow[d, "\Lambda(\Delta)"'] & (P'_1;T'_1) \arrow[d, "\Lambda(\Delta_1)"] \\
(P;T) \arrow[r, "\Lambda"'] & (P_1;T_1)
\end{tikzcd}$$

de revêtements déroulants, et les propositions 2.3.4 et 3.3.1 montrent que le passage $\Lambda(\Delta) \to \Lambda(\Delta_1)$ est une équivalence de catégories de revêtements déroulants.

Un *revêtement de S-atlas connexes* est un morphisme $\Lambda : (P';T') \to (P;T)$ qui fait partie d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(P';T') \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda"'] & (P'_1;T'_1) \arrow[d, "\Lambda(\Delta)"] \\
(P;T) \arrow[r] & (P_1;T_1)
\end{tikzcd}$$

où $\Lambda(\Delta)$ est un revêtement déroulant et où les flèches horizontales sont des équivalences.

Puisque tout S-atlas $(P_1;T_1)$ admet une couverture $(P_2;T_2) \xrightarrow{\Lambda(\Phi)} (P_1;T_1)$ à P_2 simplement connexe, et que tout déroulement $\Delta_1 : T'_1 \to T_1$ fait partie d'un diagramme de pull-back

$$\begin{tikzcd}
T'_2 \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_2"'] & T'_1 \arrow[d, "\Delta_1"] \\
T_2 \arrow[r] & T_1
\end{tikzcd}$$

, où Δ_2 est un déroulement et les flèches horizontales sont des couvertures, on peut toujours supposer dans la définition précédente que P_1 est simplement connexe.

$(P;T)$ est dit *simplement connexe* si tout revêtement $(P';T') \to (P;T)$ est une équivalence.

Un revêtement $\Delta : (P';T') \to (P;T)$ est dit *universel* si $(P';T')$ est simplement connexe ; dans ce cas $\mathrm{Aut}(\Delta)$ s'appelle le *groupe fondamental*.

En rassemblant les remarques précédentes et en tenant compte des propositions 3.3.2, 3.3.1, 2.3.4 et du résumé au § 1.2 on arrive finalement au

THÉORÈME 1 - *Pour tout* S - *atlas connexe* $(P;T)$ *il existe un seul revêtement universel* $\Lambda : (P';T') \to (P;T)$ *à une équivalence de revêtements près. Le groupe fondamental* $F := \mathrm{Aut}(\Lambda)$ *opère de façon génériquement libre. Pour tout sous-groupe* $F_1 \subset F$, *le quotient de* Λ *par rapport à* F_1, $F_1\backslash(P';T') \xrightarrow{F_1\backslash\Lambda} (P;T)$ *est un revêtement; tout revêtement* $(P'';T'') \to (P;T)$ *est équivalent à un revêtement de ce type.*

$F\backslash(P';T') \xrightarrow{F\backslash\Lambda} (P;T)$ *est une équivalence.*

A l'aide de la proposition 3.2.3 on obtient un complément que voici

THÉORÈME 1A - *Soient* $\Delta_i : (P_i';T_i') \to (P_i;T_i)$, $(i = 1, 2)$, *des revêtements universels et* $\Lambda : (P_1;T_1) \to (P_2;T_2)$ *un morphisme à isotropie triviale. Alors il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (P_1';T_1') \arrow[r, "\Lambda'"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & (P_2';T_2') \arrow[d, "\Delta_2"] \\ (P_1;T_1) \arrow[r, "\Lambda"'] & (P_2;T_2) \end{tikzcd} .$$

Λ' *est déterminé à un multiplicateur à droite* $\in \mathrm{Aut}(\Delta_2)$ *près, et constitue un opérateur d'entrelacement pour les actions de* $\mathrm{Aut}(\Delta_1)$ *et* $\mathrm{Aut}(\Delta_2)$. *De cette façon* Λ *détermine un* $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\mathrm{Typ}}$ - *morphisme bien défini* $\Lambda_* : \mathrm{Aut}(\Delta_1) \to \mathrm{Aut}(\Delta_2)$. *En particulier, lorsque* Λ *est une équivalence,* Λ_* *est un* $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\mathrm{Typ}}$ - *isomorphisme.*

De plus on a le

THÉORÈME 2 - *Soit* $(P;T)$ *connexe et simplement connexe et soit* F *un groupe d'automorphismes qui opère de manière génériquement libre. Alors la projection canonique* $T_F : (P;T) \to F\backslash(P;T)$ *est un revêtement universel et* F *en est le groupe fondamental.*

Pour démontrer le théorème 2 on constate d'abord que la condition d'action génériquement libre peut s'écrire sous la forme: $(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset,\ \Lambda_1 \in F) \Rightarrow (\Lambda_1 = \Lambda_2)$. Autrement dit, $\{\Lambda \mid \Lambda \in F\}$ est une partition de $T_F := \bigcup_{\Lambda\in F} \Lambda$ en ouverts. Par conséquent, en munissant F de la topologie discrète, la projection canonique $T_F \to F$ est un morphisme de groupoïdes topologiques. Par pull-back du déroulement universel $\tilde{F} \to F$ on obtient un Π_o - déroulement $\Phi : \tilde{T_F} \to T_F$ et un revêtement déroulant associé $\Lambda(\Phi) : (\tilde{P};\tilde{T_F}) \to (P;T_F)$ de S - atlas connexes. On retrouve

$(P;T)$ comme ouvert de $(\tilde{P};\tilde{T}_F)$ de façon que P soit un ouvert fondamental de $\tilde{P}$ par rapport à $\tilde{T}_F$. Autrement dit, l'inclusion $(P;T) \subset (\tilde{P};\tilde{T}_F)$ est une équivalence. Par conséquent $(\tilde{P};\tilde{T}_F)$ est simplement connexe et $\Lambda(\Phi)$ est un revêtement universel. Puisque F est le groupe fondamental du déroulement universel $\tilde{F} \to F$, le groupe fondamental de $\Lambda(\Phi)$ est canoniquement isomorphe à F. Sur le sous-S-atlas équivalent $(P;T)$ le groupe F est induit par $\mathrm{Aut}(\Lambda(\Phi))$, d'où le théorème.

Supposons que V soit une variété connexe et simplement connexe. Le S-atlas associé $(V;E_V)$ a donc une seule carte simplement connexe V ; par conséquent son groupe fondamental, qui s'identifie dans ce cas à celui de $\Pi_o(E_V)$, est trivial. Supposons qu'un groupe F opère librement de façon discontinue sur V. Alors $W = F\backslash V$ est une variété et $F\backslash(V;E_V)$ s'identifie à $(W;E_W)$. Le théorème précédent montre alors que pour les variétés la théorie des revêtements (non-ramifiés) coïncide avec celle des variétés en tant que S-atlas.

Le théorème 2 est un cas particulier d'un théorème un peu plus général.

Pour un groupe G d'automorphismes d'un S-atlas on désigne par $G_{\ell s}$ le sous-groupe engendré par les éléments localement stables (§ 3.3). $G_{\ell s}$ est un sous-groupe distingué.

THÉORÈME 2' - <u>Soit G un groupe d'automorphismes du S-atlas connexe et simplement connexe $(P;T)$. Alors $G_{\ell s}\backslash(P;T) = (P;T_{G_{\ell s}})$ est simplement connexe, et la projection canonique $T_G : (P;T_{G_{\ell s}}) \to G\backslash(P;T) = (P;T_G)$ est un revêtement universel dont le groupe fondamental s'identifie à $G/G_{\ell s}$.</u>

Supposons que V soit une variété connexe à un feuilletage $\mathcal{F}$. Alors V admet un recouvrement $\{V_i\}$ en domaines simplement connexes tels que le feuilletage $\mathcal{F}_i$ induit sur V_i soit une fibration en disques; un tel recouvrement sera dit <u>simple</u>. En conséquence l'espace quotient $V_i/\mathcal{F}_i =: W_i$ est une variété connexe et simplement connexe; $\varphi_i : V_i \to W_i$ désignera la projection canonique. De plus on pose $P := \coprod V_i$; $\psi : P \to V$ sera la projection canonique telle que $\psi_i := \psi|V_i$ soit l'inclusion $V_i \subset V$; $T := {}^{\psi}E_V$.

Pour tout ouvert $U \subset V_{ij} := V_i \cap V_j$, on met $U_i := \psi_i^{-1}(U)$, $U_i' := \varphi_i(U_i)$, $\tau_{ij}^U := \psi_i(\psi_j^{-1}|U) : U_i \to U_j$. Si U est "suffisamment petit" on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\tau_{ij}^U} & U_j \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_j} \\ U_i' & \xrightarrow[(\tau_{ij}^U)']{} & U_j' \end{array}$$

où $(\tau^U_{ij})'$ est un homéomorphisme. L'ensemble des $(\tau^U_{ij})'$, où U parcourt les ouverts suffisamment petits de $\coprod_{(i,j)} V_{ij}$, engendre un pseudo-groupe G' sur $P' := \coprod W_i$ et, par conséquent, un groupoïde $T' := T_{G'}$ sur P'. Le passage $\tau^U_{ij} \to (\tau^U_{ij})'$ définit un morphisme $\Phi : T \to T'$ de groupoïdes topologiques; $\Lambda(\Phi) : (P;T) \to (P';T')$ est la <u>projection canonique</u>.

Le passage du recouvrement simple $\{V_i\}$ à un autre recouvrement simple fait subir une équivalence à $(P;T)$ et $(P';T')$ de façon que la projection canonique soit conservée. Grâce à ces équivalences (qui sont canoniques) on peut introduire la notion du <u>quotient</u> $V/\mathcal{F}$ <u>de</u> V <u>par rapport à</u> $\mathcal{F}$, et de la projection canonique $\Lambda : V \to V/\mathcal{F}$. Finalement, en constatant que Φ satisfait aux conditions de la proposition 2.2.3, on aboutit au

THÉORÈME 3 - <u>Pour toute variété connexe</u> V <u>à un feuilletage</u> $\mathcal{F}$ <u>la projection canonique</u> $\Lambda : V \to V/\mathcal{F}$ <u>induit une</u> <u>Gr Typ</u> - <u>surjection</u> $\Lambda_* : F_V \to F_{V/\mathcal{F}}$ <u>de groupes fondamentaux</u>.

En gardant les notations précédentes, soit $\tilde{V} \to V$ le revêtement universel de V, et $\tilde{\mathcal{F}}$ le relèvement correspondant de $\mathcal{F}$. F_V opère sur $\tilde{V}$ en conservant $\tilde{\mathcal{F}}$, et opère, par suite, sur $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$; G désigne le sous-groupe correspondant du groupe des automorphismes de $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$. Désignons par $(F_V)_o$ l'image réciproque de $G_{\ell s}$. En s'appuyant sur le théorème 2' on obtient le

THÉORÈME 3' - $(F_V)_o = \ker \Lambda_*$. On a $G\backslash(\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}) = V/\mathcal{F}$.

§ 4 - Deux applications

4.1. Sphères elliptiques

A titre d'exemple on va calculer le groupe fondamental d'une sphère elliptique $\mathbb{P}(\sigma)$ (voir ci-dessous) et étudier ses revêtements.

$\mathbb{P}$ désignera la sphère de Riemann. Une signature sur $\mathbb{P}$ sera une fonction $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ telle que son support $|\sigma| := \sigma^{-1}(1+\mathbb{N})$ soit un ensemble fini ([28]).

Supposons que pour une signature σ donnée on ait $|\sigma| = \{z_1,\ldots,z_k\} \subset \mathbb{P}-\{\infty\}$ et de plus $|z_i - z_j| \geq 1$. Comme cartes de $\mathbb{P}(\sigma)$ on prend $\mathbb{P}-|\sigma|$ et k copies $D_1,\ldots,D_k$ du disque unitaire $|\zeta| < 1$. Comme générateurs du pseudo-groupe des changements de carte on prend les applications $\tau_j : D_j - \{0\} \to \mathbb{P} - |\sigma|$ et $\rho_j : D_j \to D_j$ définies respectivement par $\zeta \mapsto z_j + \zeta^{n_j}$, où $n_j := \sigma(z_j)$, et $\zeta \mapsto \varepsilon_j\zeta$, où $\varepsilon_j := \exp(2\pi i/n_j)$. Bien entendu les τ_j ne sont que des applications étales, mais ça suffit pour définir le pseudo-groupe et le groupoïde associé $T(\sigma)$ sur $P(\sigma) := (\mathbb{P}-|\sigma|) \coprod D_1 \coprod \ldots \coprod D_k$. On met $\mathbb{P}(\sigma) := (P(\sigma); T(\sigma))$.

Quelques remarques s'imposent:

1) Soit pour tout j, $U_j \subset D_j$ un ouvert qui contient 0. Alors $U = (\mathbb{P}-|\sigma|) \coprod U_1 \coprod \ldots \coprod U_k$ est un ouvert fondamental (§ 3.1) par rapport à $T(\sigma)$. Autrement dit, l'inclusion $(U; {}_U T(\sigma)_U) \subset \mathbb{P}(\sigma)$ est une équivalence. Par abus de notation on désignera dans ce cas $(U; {}_U T(\sigma)_U)$ toujours par $\mathbb{P}(\sigma)$..

2) La remarque précédente permet de supprimer la condition $|z_i - z_j| \geq 1$ dans la définition de $\mathbb{P}(\sigma)$. Il suffit de prendre des disques circulaires D_j suffisamment petits pour que τ_j définisse une application $D_j - \{0\} \to P - |\sigma|$.

3) Supposons que $M : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ soit une transformation de Möbius telle que $\sigma \circ M^{-1} = \sigma'$, et que $|\sigma'| \subset \mathbb{P} - \{\infty\}$. Alors il existe une unique équivalence $\Lambda_M : \mathbb{P}(\sigma) \to \mathbb{P}(\sigma')$ qui coïncide avec M sur $\mathbb{P} - |\sigma|$.

4) La remarque précédente permet de définir $\mathbb{P}(\sigma)$ pour une signature quelconque en effectuant une transformation de Möbius M de sorte que $|\sigma \circ M| \subset \mathbb{P} - \{\infty\}$.

Evidemment $\operatorname{Top}\mathbb{P}(\sigma)$ s'identifie à $\mathbb{P}$ de telle manière que $\operatorname{top}|(\mathbb{P}-|\sigma|)$ soit l'inclusion $\mathbb{P} - |\sigma| \subset \mathbb{P}$ et que $\operatorname{top}|D_j : \zeta \mapsto z_j + \zeta^{n_j}$; de plus top est visiblement un morphisme holomorphe $\mathbb{P}(\sigma) \to (\mathbb{P}; E_{\mathbb{P}})$.

Pour calculer le groupe fondamental, on observe que celui-ci dépend exclusivement de la C^0-structure de $\mathbb{P}(\sigma)$. Quitte à une C^0-équivalence on peut supposer que $z_1,\ldots,z_k$ sont situés dans l'ordre cyclique positif sur le cercle $|z| = 1$, et que $z_1 = 1$. Puis on va remplacer $\mathbb{P}(\sigma)$ par une variété simplement connexe. Pour cela il suffit de décomposer $\mathbb{P} - |\sigma|$ en deux ouverts simplement connexes E_∞ et E_0. A cet effet on pose $Z_j := \{tz_j \mid 1 \leq t < 2\}$, $Z = \bigcup_{j=1}^{k} Z_j$,

$E_0 := \{z \mid |z| < 2,\ z \notin Z\}$, $E_\infty := \{1/\bar{z} \mid z \in E_0\}$. Les composantes connexes $A_1,\dots,A_k$ de $E_0 \cap E_\infty$ sont décrites par
$A_j = \{z \mid \arg z_j < \arg z < \arg z_{j+1},\ \tfrac{1}{2} < |z| < 2\}$,
$A_k = \{z \mid \arg z_k < \arg z < 2\pi,\ \tfrac{1}{2} < |z| < 2\}$, $(0 \le \arg z_i < 2\pi)$.
On remplace $\mathbb{P} - |\sigma|$ par $E_0 \amalg E_\infty$. T' désignera le groupoïde sur $E_\infty \amalg E_0 \amalg D_1 \amalg \dots \amalg D_k$ qui correspond à $T(\sigma)$. L'ensemble ${}_{E_0}T'_{E_\infty}$ des germes de transition $E_0 \to E_\infty$ se décompose en k composantes connexes $a_1,\dots,a_k$ qui correspondent respectivement à $A_1,\dots,A_k$.

On suppose de plus que les disques $D_1,\dots,D_k$ soient de rayon assez petit pour que $\tau_i(D_i - \{0\}) \cap \tau_j(D_j - \{0\}) = \emptyset$ pour $i \neq j$, et que $\tau_j(D_j - \{0\}) \subset \{z \mid \tfrac{1}{2} < |z| < 2\}$, $j = 1,\dots,k$. Chaque $\tau_j : D_j - \{0\} \to \mathbb{P} - |\sigma|$ se décompose en $\tau_j^o : D_j - \{0\} \to E_0$ resp. $\tau_j^\infty : D_j - \{0\} \to E_\infty$.

Le domaine de définition de τ_j^o consiste de n_j secteurs angulaires ouverts d'aperture $2\pi/n_j$, $B_{1,j},\dots,B_{n_j,j}$ (énumérés dans l'ordre cyclique positif), et de même le domaine de définition de τ_j^∞ consiste de n_j secteurs $C_{1,j},\dots,C_{n_j,j}$ (dans l'ordre cyclique positif). On fixe les numérotations de façon que $B_{1,j} \cap C_{1,j} \neq \emptyset$ et $B_{1,j} \cap C_{2,j} \neq \emptyset$. Alors $B_{i,j} \cap C_{i,j} \neq \emptyset$ et $B_{i,j} \cap C_{i+1,j} \neq \emptyset$ (n_k+1 se lit comme 1). Les composantes connexes de l'ensemble $\widehat{\tau_j^o}$ seront désignées $b_{1,j},\dots,b_{n_j,j}$ (correpondant à $B_{1,j},\dots,B_{n_j,j}$) et celles de $\widehat{\tau_j^\infty}$ seront désignées par $c_{1,j},\dots,c_{n_j,j}$. Soit $d_j := \widehat{\rho_j}$, d_j est une composante connexe de ${}_{D_j}T_{D_j}$ et l'on a $\widehat{\rho^p} = d_j^p$.

Cela montre que le groupoïde $\Pi_o(T')$ est à $k+2$ sommets $e_0,e_1,\dots,e_k,e_\infty$ qui correspondent respectivement à $E_0,D_1,\dots,D_k,E_\infty$. De plus T' n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, notamment $a_j, b_{i,j}, c_{i,j}, d_j^p$, $j = 1,\dots,k$, $i = 1,\dots,n_j$, $1 \le p \le n_j$ et leurs inverses. Par conséquent $\Pi_o(T')$ est engendré par $a_j, b_{i,j}, c_{i,j}, d_j$. De plus, en écrivant toutes les relations du type $[t_1][t_2] = [t_1t_2]$, $t_i \in T'$, il suffit de retenir les suivantes

$$b_{i,j}b_{i+1,j}^{-1} = d_j \qquad c_{i,j}c_{i+1,j}^{-1} = d_j$$

$(i = 1,\dots,n_j,\ n_k+1$ se lit comme 1).

$$b_{i,j}^{-1}c_{i,j} = a_j \qquad c_{i+1,j}^{-1}b_{i,j} = a_{j-1}^{-1}$$

$(i = 1,\dots,n_j,\ n_k+1$ se lit comme 1).

De ces relations il découle que $d_j^{n_j} = 1$ et que $b_{i+1,j} = d_j^{-i}b_{1,j}$, $c_{i+1,j} = d_j^{-i}c_{1,j}$. De plus il en découle que $a_{j-1}^{-1}a_j = c_{i+1,j}^{-1}c_{ij} = c_{1j}^{-1}d_jc_{1j}$, et que le groupe de cohérence en e_∞ est engendré par les éléments

$R_i = a_{i-1}^{-1}a_i$ assujettis aux relations

$$(*) \qquad R_1^{n_1} = R_2^{n_2} = \dots = R_k^{n_k} = R_1R_2 \dots R_k = 1 .$$

Pour $k \geq 3$ c'est un groupe de type Fuchsien (puisque $n_j \geq 2$ pour $j = 1,\dots,k$).

Pour $k = 1$ on obtient comme relations $R_1^{n_1} = R_1 = 1$; c'est donc un groupe trivial.

Formellement le cas $k = 1$ rentre dans le cas $k = 2$ si l'on admet que $n_2 = 1$.

Dans le cas $k = 2$ on ne considère que deux cas extrêmes, à savoir $(n_1,n_2) = 1$ et $n_1 = n_2 = n$.

$(n_1,n_2) = 1$: $\mathbb{P}(\sigma)$ est simplement connexe. On l'obtient comme S-atlas quotient en feuilletant $\mathbb{C}^2 - (0)$ par la famille des courbes $z_1^{n_1} - \lambda z_2^{n_2} = 0$ où λ parcourt $\mathbb{P}$. Puisque $\mathbb{C}^2 - (0)$ est simplement connexe, il faut bien, selon le théorème 3, que le S-atlas quotient soit simplement connexe.

$n_1 = n_2 = n \geq 2$: Le groupe fondamental de $\mathbb{P}(\sigma)$ est n-cyclique.

$P' := E_0 \coprod D_1 \coprod \dots \coprod D_k \coprod E_\infty$ étant simplement connexe, tout revêtement de $(P';T')$ est un revêtement déroulant à une équivalence près. Soit $\Delta : \tilde{T}' \to T'$ un déroulement et $\Lambda(\Delta) : (\tilde{P}';\tilde{T}') \to (P';T')$ le revêtement associé. Puisque les cartes de $\tilde{P}'$ sont des copies de celles de P' , et que les changements de carte en haut se projettent par Δ sur des changements de carte en bas, il s'ensuit que $(\tilde{P}';\tilde{T}')$ est un S-atlas holomorphe.

Pour mieux voir l'application $\mathrm{Top}\,\Lambda(\Delta) : \mathrm{Top}(\tilde{P}';\tilde{T}') \to \mathrm{Top}(P';T')$ on va tout d'abord simplifier les deux atlas.

Par recollement de E_0 et E_∞ on passe de $(P';T')$ à l'atlas initial $(P(\sigma);T(\sigma))$. De même, en recollant dans $\tilde{P}'$ les copies de E_0 et E_∞ suivant les changements de carte entre eux, on obtient une surface de Riemann Q (éventuellement non-connexe pour l'instant), et le morphisme $Q \to \mathbb{P} - |\sigma|$ induit par $\Lambda(\Delta)$ (en tenant compte des recollements) est un revêtement de surfaces de Riemann.

De plus, pour $j \in \{1,\dots,k\}$, le sous-atlas $\mathcal{D}_j$ de $(P';T')$, qui consiste de toutes les copies de D_j et les changements de carte entre eux, se décompose en composantes connexes $\mathcal{D}_{j,i}$; $\Lambda(\Delta)$ induit sur chacune un revêtement déroulant au-dessus de $(D_j;F_j)$, où F_j est le groupe n_j-cyclique engendré par ρ_j (§ 3.3) . Puisque D_j est simplement connexe et que F_j agit de manière génériquement libre, $\mathcal{D}_{j,i}$ est équivalent à $(D_{j,i};F_{j,i})$, où $D_{j,i}$ est une copie de D_j et $F_{j,i} \subset F_j$ est un sous-groupe; $F_{j,i}$ possède un générateur $\rho_j^{m_i}$ tel que $|F_{j,i}| = n_j/m_i =: n_{j,i}$. Le revêtement induit par $\Lambda(\Delta)$ se réduit alors à la projection canonique $(D_{j,i};F_{j,i}) \to (D_j;F_j)$ associée à l'inclusion $F_{j,i} \subset F_j$.

$\mathcal{D}_{j,i_1}$ et $\mathcal{D}_{j,i_2}$ étant des composantes connexes différentes de $\mathcal{D}_j$ pour $i_1 \neq i_2$, il n'y a pas de changement de carte entre D_{j,i_1} et D_{j,i_2}.

De cette façon on obtient un revêtement $\Lambda : (\tilde{P};\tilde{T}) \to \mathbb{P}(\sigma)$, où $\tilde{P} := Q \coprod_j (\coprod_i D_{j,i})$, et où ${}_Q\tilde{T}_Q$ se réduit à l'identité. En gardant toujours l'hypothèse que $\tau_j(D_j - \{0\} \cap \tau_{j'}(D_{j'} - \{0\}) = \emptyset$ pour $j \neq j'$, l'ensemble des changements de carte entre $D_{j,i}$ et $D_{j',i'}$ est vide pour $(j,i) \neq (j',i')$.

Puisque ${}_Q\tilde{T}_Q$ se réduit à id_Q on a ${}_{D_{j,i}}\tilde{T}_Q = \hat{\tau}_{j,i}$, où $\tau_{j,i} : D_{j,i} - \{0\} \to Q$ est une application holomorphe. De plus $(t_1, t_2 \in \hat{\tau}_{j,i}$, $\beta(t_1) = \beta(t_2))$ entraîne $t_1 t_2^{-1} \in {}_{D_{j,i}}T_{D_{j,i}} = \widehat{F}_{j,i}$. Cela montre que $\tau_{j,i}$ induit un plongement holomorphe $F_{j,i} \backslash (D_{j,i} - \{0\}) \to Q$.

Chaque point $q \in Q$ au-dessus de la couronne $\tau_j(D_j - \{0\})$ provient d'un point q' d'une copie de E_0 ou E_∞ dans $\tilde{P}'$ au-dessus de $\tau_j(D_j - \{0\})$. Le revêtement $\Lambda(\Delta)$ étant déroulant, q' est dans le but d'un $\tilde{\tau}_j^o$ (ou $\tilde{\tau}_j^\infty$) au-dessus de τ_j^o (τ_j^∞). En conséquence q est dans le but d'un $\tau_{j,i}$.

On passe à $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$ en recollant les disques $D_{j,i}$ à la surface Q à l'aide des $\tau_{j,i}$. La constatation ci-dessus qu'il n'y a pas de changement de carte entre deux disques différentes, montre que les images des $D_{j,i}$ dans $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$ sont disjointes l'une à l'autre, d'où il s'ensuit que $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$ est de Hausdorff.

En désignant l'image de l'origine de $D_{j,i}$ par $p_{j,i}$, et en désignant toujours la coordonnée standard dans $D_{j,i}$ par ζ, $u_{j,i} = \zeta^{n_{j,i}}$ est une variable uniformisante en $p_{j,i}$. De même $u_j = \zeta^{n_j}$ est une coordonnée locale en z_j. La projection $\mathrm{Top}\,\Lambda$ s'écrit localement $u_{j,i} \to u_j = (u_{j,i})^{m_i}$.

Finalement, par définition de revêtement, $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$ est connexe.

En résumant on a trouvé:

- $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$ est une surface de Riemann connexe;
- $\mathrm{Top}\,\Lambda : \mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T}) \to \mathrm{Top}\,\mathbb{P}(\sigma) = \mathbb{P}$ est une application holomorphe;
- les $p_{j,i}$ sont les points de ramification de $\mathrm{Top}\,\Lambda$ et l'indice de ramification en $p_{j,i}$ est un diviseur de $n_j = \sigma(z_j)$;
- tout point de Q au-dessus de la couronne $\tau_j(D_j - (0)) \subset \mathbb{P}$ fait partie d'un disque centré à un point $p_{j,i}$;
- Q, en tant que complément d'un sous-ensemble discret de $\mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T})$, est connexe.

En bref, $f := \mathrm{Top}\,\Lambda : \mathrm{Top}(\tilde{P};\tilde{T}) \to \mathbb{P}$ est un revêtement ramifié de surfaces de Riemann dont l'ensemble critique se trouve au-dessus de $|\sigma|$, et tel que l'indice de ramification en chaque point x est un diviseur de $\sigma(f(x))$.

En suivant le raisonnement précédent en sens inverse on montre que tout revêtement ramifié de ce type provient d'un revêtement de S-atlas.

Finalement il est classique que le revêtement universel de $\mathbb{P}(\sigma)$ pour $k \geq 3$

est du type $\mathbb{P} \to \mathbb{P}(\sigma)$, $\mathbb{C} \to \mathbb{P}(\sigma)$, $D \to \mathbb{P}(\sigma)$ suivant le cas que $\chi_{\mathbb{P}(\sigma)} := 2 - \sum_{j=1}^{k} (1 - 1/n_j)$ est positif, nul, ou négatif ([27], [31]).

4.2. Les S - atlas à holonomie unilatère triviale

Comme on a fait remarquer dans l'introduction, le théorème de Haefliger sur les feuilletages analytiques de codimension 1 ([10], p. 324)*) est une conséquence du fait que le groupe fondamental d'un S - atlas analytique compact de dimension 1 est d'ordre infini. Il est peut-être justifié d'appeler ce dernier énoncé le véritable "théorème de Haefliger" (voir [8], [15]).

Une analyse de la démonstration dans [8] montre que le même type de théorème subsiste pour les S - atlas de dimension 1 à holonomie unilatère triviale. De cette manière le théorème de Haefliger prend une forme purement topologique d'où le cas analytique ressort comme corollaire.

La démonstration ci-dessous est calquée sur celle pour le cas analytique dans [8]; en particulier les préliminaires ci-dessous sont pris de cet article.

4.2.1. Définitions et préliminaires

Une variété à une dimension connexe et simplement connexe s'appelle arbre

Tout domaine (:= ouvert connexe non-vide) d'un arbre est encore un arbre. L'intersection de deux domaines d'un arbre est toujours connexe (éventuellement vide).

Un couple de points a, a' d'un arbre A est dit couple associé lorsque $a \neq a'$ et que tout voisinage de a rencontre tout voisinage de a' ; a et a' sont appelés points de branchement.

CRITÈRE ([8]) - Une immersion d'arbres $\sigma : A \to B$ est un plongement ssi pour tout couple associé a, a' on a $\sigma(a) \neq \sigma(a')$, autrement dit, ssi $\sigma(a), \sigma(a')$ est encore un couple associé.

Une transition (= homéomorphisme local) $\tau : A \to B$ d'arbres, sera toujours supposée à domaine de définition, $\mathrm{dom}(\tau)$, connexe.

Si $\tau : A \to B$ est une transition d'arbres, alors le recollement de A et B suivant τ , désigné par $A \underset{\tau}{*} B$, est encore un arbre.

Soient $\sigma : A \to B$, $\tau : B \to C$ des transitions d'arbres, et $\mathrm{im}\,\sigma \cap \mathrm{dom}\,\tau \neq \emptyset$ alors $\sigma\tau$ est encore une transition en vertu de la connexité de $\mathrm{im}\,\sigma \cap \mathrm{dom}\,\tau$.

Soient $\tau_i : A \to B$, $i = 1,2$, des transitions, $D_i := \mathrm{dom}\,\tau_i$, $D_{12} := D_1 \cap D_2$. Lorsque $\tau_1|D_{12} = \tau_2|D_{12}$, on écrira $\tau_1 \cup \tau_2$ pour l'immersion $D_1 \cup D_2 \to B$ définie par $\tau_1 \cup \tau_2|D_i = \tau_i$, $i = 1,2$, et l'on écrira $\tau_1 \cap \tau_2$ pour la transition

*) Pour certains raffinements voir A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Sc. Norm. Pisa (3) 16 (1964), 367-397.

$\tau_1|D_{12}$ $(= \tau_2|D_{12})$.

La notion $\tau_1 \subset \tau_2$ signifie que $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1$, ou bien, que $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau_2$.

Pour un couple de transitions $\tau_i : A \to B$, $i = 1,2$, on écrira $\tau_1 = \tau_2$ q.p. (quelque part) lorsque $\hat{\tau}_1 \cap \hat{\tau}_2 \neq \emptyset$, autrement dit, lorsqu'il existe un ouvert sur lequel τ_1 et τ_2 coïncident.

Dans toute la suite on ne considère que des S - atlas (P;T) où P est RÉUNION DISJOINTE $\coprod_{i\in I} A_i$ d'arbres A_i .

Pour un tel S - atlas on introduit la terminologie suivante:

T - <u>immersion</u> (T -<u>transition</u>) := immersion (transition) $\sigma : D \to P$ définie sur un domaine D telle que $\hat{\sigma} \subset T$.

La T - transition τ est dite <u>maximale</u> si pour toute inclusion $\tau \subset \tau'$ de T - transitions on a $\tau = \tau'$.

(P;T) est dit <u>serré</u> si E_P est fermé dans T .

Tout sous-schéma ouvert d'un S - atlas serré est encore serré; en particulier pour toute composante connexe A_i de P , $(A_i;T_i)$, $T_i := {}_{A_i}T_{A_i}$, est encore serré. Réciproquement, si tout $(A_i;T_i)$ est serré, (P;T) est serré.

PROPOSITION 4.2.1 - <u>Les énoncés suivants sont équivalents</u>:

(i) (P;T) <u>est serré</u>.

(ii) <u>Pour toute</u> T - <u>immersion</u> $\sigma : D \to P$, <u>telle que</u> $\sigma = id_P$ q.p., <u>on a</u> $\sigma = id_D$.

(iii) <u>Pour tout couple</u> τ_1,τ_2 <u>de</u> T - <u>transitions tel que</u> $\tau_1 = \tau_2$ q.p., $\tau_1 \cup \tau_2$ <u>est une</u> T - <u>transition bien définie</u>.

(iv) <u>Toute</u> T - <u>transition</u> τ <u>est contenue dans une unique</u> T - <u>transition maximale</u>.

(v) <u>Toute composante connexe de</u> T <u>s'écrit comme</u> $\hat{\tau}$ <u>pour une</u> T - <u>transition maximale</u> τ <u>convenable, et vice versa</u>.

<u>Démonstration</u>:

(i) $\Rightarrow$ (ii). L'hypothèse revient à dire que $\hat{\sigma} \subset T$ est un ouvert connexe et que $\hat{\sigma} \cap E_P \neq \emptyset$. E_P étant ouvert fermé ((i)), cela entraîne que $\hat{\sigma} \subset E_P$, d'où $\sigma = id_D$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). En mettant dom $\tau_i = D_i$, l'hypothèse implique que $\tau_1^{-1}\tau_2 : \tau_1(D_1 \cap D_2) \to P$ est une T - transition qui est égale à id_P q.p. . Alors $\tau_1^{-1}\tau_2 = id_{\tau_1(D_1 \cap D_2)}$ en vertu de (ii). Autrement dit, on a $\tau_1|D_1 \cap D_2 = \tau_2|D_1 \cap D_2$ ce qui implique que $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$ est une T - immersion.

Pour montrer que τ est une transition il faut montrer, d'après le critère, que pour tout couple associé d_1,d_2 on a $\tau(d_1) \neq \tau(d_2)$. Dans le cas contraire, $\tau(d_1) = \tau(d_2)$, on pourrait choisir des intervalles $J_i \ni d_i$ tels que $\tau(J_1) =$

$\tau(J_2)$, et que $\tau|J_i = \tau_i$ soit une transition. $J_1 \cap J_2$ étant non-vide, on trouverait que $\tau_1\tau_2^{-1} = id_{J_1}$. Puisque $\tau_1\tau_2^{-1}(d_1) = d_2$, et que $d_1 \in J_1$, on trouverait $d_1 = d_2$. Contradiction.

(iii) ⇒ (iv). Soit $D'' = \bigcup_{\tau\subset\tau'} \mathrm{dom}\,(\tau')$, τ' étant toujours une T-transition. Pour tout $d'' \in D''$ et tout $\tau' \supset \tau$ tel que $d'' \in \mathrm{dom}(\tau')$, $\tau'(d'')$ est indépendant du choix particulier de τ' en vertu de (iii). De plus, pour $d''_i \in D''$, $i = 1,2$, $d''_1 \neq d''_2$, on trouve que $\tau'_1(d''_1) \neq \tau'_2(d''_2)$, $\tau'_i \supset \tau$, puisque $\tau'_1 \cup \tau'_2$ est encore une transition. Autrement dit, $\tau'' = \bigcup_{\tau\subset\tau'} \tau'$ est une transition bien définie qui contient τ ; évidemment τ'' est l'unique transition maximale qui contient τ .

(iv) ⇒ (v). Puisque $T = \cup\,\hat{\tau}$, où τ parcourt les T-transitions, on trouve en conséquence que $T = \cup\,\widehat{\tau'}$, où τ' parcourt les T-transitions maximales. $\tau'_1 \cap \tau'_2 \neq \emptyset$ entraîne l'existence d'une T-transition τ telle que $\tau \subset \tau'_i$ $(i = 1,2)$, et l'on obtient en conséquence ((iv)) $\tau'_1 = \tau'_2$. Autrement dit, $\{\tau'\}$ est une décomposition de T en domaines disjoints ou bien $\{\tau'\}$ est la décomposition de T en composantes connexes.

(v) ⇒ (i). id_{A_i} est une T-transition maximale pour toute composante connexe A_i de P . Selon (v) $E_{A_i} = \widehat{id_{A_i}}$ est une composante connexe de T . Par suite $E_P = \cup\, E_{A_i}$, en tant que réunion de composantes connexes de l'espace localement connexe T , est fermé.

La proposition précédente permet de conclure que certains recollements d'un S-atlas serré conservent le caractère serré.

Soit $(P;T)$, $P = \coprod_{i\in I} A_i$, un S-atlas serré, et $\tau : A_1 \to A_2$, $\{1,2\} \subset I$, une T-transition maximale. Alors $N = E_P \cup \hat{\tau} \cup \hat{\tau}^{-1}$ est un sous-groupoïde ouvert à holonomie triviale; par suite N est un sous-groupoïde distingué ouvert de T . Le groupoïde $T' := N\backslash T/N$ s'identifie à un sous-groupoïde ouvert de $\Gamma_{P'}$ où $P' := (A_1 \underset{\tau}{*} A_2) \coprod (\coprod_{j\in I-\{1,2\}} A_j)$.

En désignant par Φ la projection canonique $T \to T'$, et en posant $\varphi := \Phi|P$, on a $T = {}^{\varphi}T'$ et $\Lambda(\Phi) : (P;T) \to (P';T')$ est une couverture. On a $\Phi^{-1}(E_{P'}) = N = E_P \cup \hat{\tau} \cup \hat{\tau}^{-1}$. D'après la proposition précédente $\hat{\tau}$ et $\hat{\tau}^{-1}$ sont les composantes connexes de T . Par conséquent $\Phi^{-1}(E_{P'})$ est fermée dans T , i.e. $E_{P'}$ est fermé dans T' , ou bien, $(P';T')$ est serré.

De plus on a, en mettant $\varphi_i := \varphi|A_i$, $\varphi_1\varphi_2^{-1} = \tau$, $\varphi_i = id_{A_i}$ pour $i \in I - \{1,2\}$.

Dans la situation ci-dessus, φ ainsi que P' est appelé un <u>recollement de</u> P (<u>suivant la</u> T-<u>transition</u> τ). De même $\Lambda(\Phi)$ ainsi que $(P';T')$ est appelé <u>recollement de</u> $(P;T)$ (<u>suivant la</u> T-<u>transition</u> τ).

On a obtenu la

PROPOSITION 4.2.2 - Tout recollement $(P';T')$ d'un S - atlas serré $(P;T)$ suivant une T - transition maximale $\tau : A_1 \to A_2$ est encore serré. En désignant la projection canonique $P \to P'$ par φ, et en mettant $\varphi_i := \varphi|A_i$, on a: $T = {}^{\varphi}T'$, $\varphi_1\varphi_2^{-1} = \tau$, $\varphi_i = id_{A_i}$, $i \in I - \{1,2\}$.

Supposons maintenant qu'on se soit donné un S - atlas serré $(P';T')$ et une immersion $\varphi : P = \coprod_{i\in I} A_i \to P'$ telle que $\varphi_i := \varphi|A_i$ soit un plongement pour tout $i \in I$. En désignant la projection canonique $T := {}^{\varphi}T' \to T'$ toujours par Φ et en mettant $T_i := {}_{A_i}T_{A_i}$, le morphisme $\Phi_i := \Phi|T_i : T_i \to {}_{\varphi(A_i)}T'_{\varphi(A_i)}$ est un isomorphisme de groupoïdes topologiques. $(P';T')$ étant serré, $E_{\varphi(A_i)}$ est fermé dans ${}_{\varphi(A_i)}T'_{\varphi(A_i)}$. C'est dire que E_{A_i} est fermé dans T_i. Puisque T_i est fermé dans T, E_{A_i} est fermé dans T, c.à-d. E_{A_i} est une composante connexe de T, par suite $E_A = \cup E_{A_i}$ est fermé dans T, i.e. $(P;T)$ est serré.

Supposons que τ' soit une T' - transition maximale et que $\tau = \varphi_i\tau'\varphi_j^{-1}$ soit définie. Alors τ est une T - transition $A_i \to A_j$ et $\varphi_i^{-1}\tau\varphi_j = id_{\varphi(A_i)}\tau' id_{\varphi(A_j)} =: {}_i\tau'_j$. Pour toute T - transition $\sigma \supset \tau$ on a toujours $\sigma : A_i \to A_j$. Par suite $\varphi_i^{-1}\sigma\varphi_j$ est une T' - transition telle que $\sigma' := \varphi_i^{-1}\sigma\varphi_j \supset {}_i\tau'_j$. $(P';T')$ étant serré, $\sigma' \cup \tau'$ est encore une T' - transition, et, en vertu de la maximalité de τ', on a $\sigma' \subset \tau'$, ou bien $\sigma' \subset {}_i\tau'_j$, d'où résulte $\sigma' = {}_i\tau'_j$. Par conséquent on a $\sigma = \tau$, c.-à-d., τ est une T - transition maximale.

En résumant on a la

PROPOSITION 4.2.3 - Soit $(P';T')$ un S - atlas serré, et $\varphi : P = \coprod A_i \to P'$ une immersion telle que $\varphi|A_i =: \varphi_i$ soit un plongement pour tout A_i. Alors le relèvement $(P;T)$ de $(P';T')$ par rapport à φ est encore serré. De plus toute transition du type $\varphi_i\tau'\varphi_j^{-1}$, où τ' est une T' - transition maximale, est une T - transition maximale. En particulier quand $\varphi_i\varphi_j^{-1}$ est défini, c'est une T - transition maximale.

Supposons maintenant que $(P';T')$ soit serré et que $\Lambda(\Delta) : (P;\tilde{T}') \to (P';T')$ soit un revêtement déroulant, $\Delta : \tilde{T}' \to T'$ étant le déroulement; par abus de langage on dira aussi que $(P;\tilde{T}')$ est un revêtement déroulant de $(P';T')$.

En mettant $\delta := \Delta|P = \Delta|E_P$, $\delta : P \to P'$ est une immersion telle que $\delta|A_i$ est un plongement. En désignant ${}^{\delta}T'$ par T, $(P;T)$ est serré d'après la proposition précédente. Puisque $\tilde{T}' \subset T$, et que E_P est fermé dans T, E_P est automatiquement fermé dans $\tilde{T}'$, d'où s'ensuit la

PROPOSITION 4.2.4 - <u>Tout revêtement déroulant d'un</u> S - <u>atlas serré est encore serré</u>.

Un S - atlas est dit <u>resserrable</u> lorsqu'il est équivalent à un S - atlas serré. La resserrabilité peut être détectée par inspection de l'holonomie comme nous allons voir.

$\tau \in T$ sera dit <u>germe d'holonomie unilatère</u> en p si $\alpha(t) = \beta(t) = p$ et s'il existe une T - transition τ et un intervalle ouvert $J \ni p$ tels que $t = \hat{\tau}_p$ et que τ induise l'identité sur l'une des composantes connexes de $J - \{p\}$; t sera dit germe d'holonomie unilatère <u>triviale</u> si en plus $t = \widehat{id}_p$.

$(P;T)$ sera dit à <u>holonomie unilatère triviale</u> lorsque E_P est l'ensemble des germes d'holonomie unilatère.

On remarquera que <u>si</u> $(P;T)$ <u>est à holonomie unilatère triviale, tout</u> S-<u>atlas équivalent à</u> $(P;T)$ <u>est également à holonomie unilatère triviale</u>.

De plus, tout germe d'holonomie unilatère est visiblement dans l'adhérence de E_P relative T . En conséquence on trouve: <u>Un</u> S - <u>atlas serré est à holonomie unilatère triviale</u>.

Supposons maintenant que les composantes connexes de P soient des intervalles ouverts, et que $t \in T$ soit dans l'adhérence de E_P dans T . Alors il existe une T - transition τ telle que $t = \hat{\tau}_q$, $q := \alpha(t)$, et que $\hat{\tau} \cap E_P$ est un ouvert non-vide dont t est point adhérent. Cela entraîne que $\tau|U = id_U$ où $U = \alpha(\hat{\tau} \cap E_P)$, et que $q \in \bar{U}$. On a $\operatorname{dom} \tau - U = \operatorname{supp} \tau := \overline{\{x | \tau(x) \neq x\}}$.

Puisque les composantes connexes de P sont des intervalles ouverts et que le domaine d'une transition ainsi que son image est connexe, on trouve que $\operatorname{dom} \tau \subset J'_q$, $\operatorname{im} \tau \subset J'_q$, où J'_q est la composante connexe de q relative P . Puisque $\tau(q) \in J'_q$, que $q \in \bar{U}$ et que $\tau|U = id_U$, on trouve que $\tau(q) = q$, ou bien que t est un élément d'holonomie.

U étant un ouvert non-vide de $\operatorname{dom} \tau$ ayant $q \in \operatorname{dom} \tau$ comme point adhérent, il existe $p \in \operatorname{dom} \tau$ qui est point frontière d'une composante connexe U_i de U ; on a encore $\alpha(\hat{\tau}_p) = \beta(\hat{\tau}_p) = p$. Lorsque $p = q$, $\hat{\tau}_q$ est évidemment élément d'holonomie unilatère (on prend $J := U_i \cup q \cup$ (composante de $\operatorname{dom} \tau - \{q\}$ qui ne contient pas U_i)).

Lorsque $p \neq q$ on a évidemment que $p \in \operatorname{supp} \tau$ ou bien que $\hat{\tau}_p \notin E_P$; autrement dit, $\hat{\tau}_p$ est élément d'holonomie unilatère non-trivial, et $\hat{\tau}_p$ est encore dans l'adhérence de E_P .

On a obtenu: <u>Si</u> P <u>est réunion disjointe d'intervalles ouverts et</u> $t \in T$ <u>est adhérent à</u> E_P , $t \notin E_P$, <u>alors</u> T <u>contient un germe d'holonomie unilatère non-trivial</u>.

En observant que tout S - atlas est équivalent à un S - atlas dont les cartes sont des intervalles ouverts on arrive au

CRITÈRE DE RESSERRABILITÉ - Pour qu'un S-atlas $(P;T)$ soit resserrable il faut et il suffit que $(P;T)$ soit à holonomie unilatère triviale.

En conséquence on obtient:

COROLLAIRE 1 - Un S-atlas analytique est resserrable.

COROLLAIRE 2 - Un S-atlas à holonomie triviale est resserrable.

4.2.2. Groupoïdes locaux

Un groupoïde local est un ensemble L muni

- de deux rétractions α, β sur un sous-ensemble E, dit l'ensemble des identités,
- d'une involution $(\ldots)^{-1} : L \to L$, dite inversion,
- d'une multiplication $\ldots \wedge \ldots$ partiellement définie, telles que les axiomes suivants soient vérifiés

(GL1) $\ell_1 \wedge \ell_2 \Rightarrow \beta(\ell_1) = \alpha(\ell_2)$

(GL2) $\alpha(\ell) \wedge \ell = \ell \wedge \beta(\ell) = \ell$

(GL3) $\ell \wedge \ell^{-1} = \alpha(\ell)$, $\ell^{-1} \wedge \ell = \beta(\ell)$

(GL4) $\ell_1 \wedge \ell_2 \Rightarrow \ell_2^{-1} \wedge \ell_1^{-1} = (\ell_1 \wedge \ell_2)^{-1}$

(GL5) $\ell_1 \wedge \ell_2$, $\ell_2 \wedge \ell_3$, $\ell_1 \wedge (\ell_2 \wedge \ell_3) \Rightarrow (\ell_1 \wedge \ell_2) \wedge \ell_3 = \ell_1 \wedge (\ell_2 \wedge \ell_3)$.

Les axiomes comportant "$\Rightarrow$" doivent être interpretés comme: dans l'hypothèse que les produits à gauche soient définis les produits à droite le sont aussi et les égalités écrites ont lieu. Les autres axiomes expriment que les produits écrits sont toujours définis.

Tout groupoïde est un groupoïde local. La notion de morphisme de groupoïdes locaux se définit de façon évidente.

En particulier, pour tout groupoïde local L, (α, β) est un morphisme $L \to E \times E$. L est dit cohérent lorsque $\mathrm{im}(\alpha,\beta)$ engendre $E \times E$, L est dit simplement cohérent lorsque (α,β) est injectif.

On associe à l'ensemble L une copie $v(L)$ dont les éléments sont notés $v(\ell)$, $\ell \in L$, et l'on définit $\alpha(v(\ell)) = v(\alpha(\ell))$, $\beta(v(\ell)) = v(\beta(\ell))$. $v(L)$ aux rétractions α, β engendre un groupoïde libre $F(v(L))$. Le quotient $U(L)$ de $F(v(L))$ par rapport aux relations $v(\ell_1)v(\ell_2) = v(\ell_1 \wedge \ell_2)$ sera appelé le groupoïde universel associé à L ; $\rho : F(v(L) \to U(L)$ sera la projection quotient. $u : L \to U(L)$ sera le composé $L \xrightarrow{v} v(L) \subset F(v(L) \xrightarrow{\rho} U(L)$. u est un morphisme. Tout morphisme $\varphi : L \to G$ du groupoïde local L dans un groupoïde G se factorise de façon unique $L \xrightarrow{u} U(L) \xrightarrow{u\backslash\varphi} G$. C'est cette propriété de factorisation unique pour les morphismes de L dans un groupoïde qui caractérise (à un morphisme près) le diagramme universel $L \xrightarrow{u} U(L)$.

L est dit *faiblement intégrable* quand u est injectif; L est dit *intégrable* si l'on a en plus: $u(\ell_1)u(\ell_2) \in u(L) \Rightarrow \ell_1 \wedge \ell_2$ est défini.

PROPOSITION 4.2.5 - *Si L est un groupoïde local faiblement intégrable tel que $U(L)$ soit simplement cohérent, alors L est simplement cohérent.*

En effet u identifie l'ensemble des identités de L à celui de $U(L)$. De plus u étant injectif, l'injectivité de $(\alpha,\beta) : L \to E \times E$ s'ensuit alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "(\alpha{,}\beta)"'] & & U(L) \arrow[dl, "(\alpha{,}\beta)"] \\ & E \times E & \end{tikzcd}$$

Une suite $\ell_1,\dots,\ell_n$, $\ell_i \in L$, est dite *locale* si le produit $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$ est calculable pour un placement convenable de parenthèses. Si en plus le produit est le même pour tout placement de parenthèses qui permet une évaluation du produit, on dira que la suite locale est à *produit stable*.

On dira que la multiplication dans L est *saturée* lorsqu'un couple ℓ_1,ℓ_2 est toujours une suite locale dès qu'il existent des suites locales $m_1,\dots,m_p$ et $m_{p+1},\dots,m_n$ telles que (i) $m_1,\dots,m_p, m_{p+1},\dots,m_n$ soit encore une suite locale, et que (i) $\ell_1 = m_1 \ \dots \ m_p$, $\ell_2 = m_{p+1} \wedge \dots \wedge m_n$ aient lieu pour un placement convenable de parenthès.

On dit que la loi d'*associativité générale* a lieu si toute suite locale est à produit stable.

Maintenant on peut formuler le

CRITÈRE DE MALCEV ([8]) - *Pour qu'un groupoïde L soit faiblement intégrable il faut et il suffit que la loi d'associativité générale ait lieu.*

Pour que L soit intégrable il faut et il suffit que L soit faiblement intégrable et que la multiplication soit saturée. *)

Remarque: Les définitions de $U(L)$, de l'associativité générale et de la saturation de la multiplication gardent un sens aussi bien dans le cas où l'axiome (GL5) n'est pas vérifié; en revanche l'associativité générale et la saturation de la multiplication à la fois entraînent (GL5).

*) Dans [8] le critère est formulé pour un groupe local. Cependant la démonstration du critère pour le cas d'un groupoïde reste la même.

4.2.3. L(T) <u>et le groupe fondamental</u>

Dans toute cette section on suppose que $(P;T)$ est un S-atlas connexe et serré, $P = \coprod A_i$, A_i des arbres.

$L(T)$ désignera l'ensemble des T-transitions maximales. Le produit $\tau_1\tau_2$ de deux T-transitions maximales est encore une T-transition, bien qu'elle ne soit pas maximale en général. $(P;T)$ étant serré, $\tau_1\tau_2$ se prolonge en une unique T-transition maximale qu'on notera $\tau_1 \wedge \tau_2$.

De plus, on définit pour tout $\tau \in L(T)$, $\alpha_L(\tau) := \mathrm{id}_{A_i}$ où $A_i \supset \mathrm{dom}\,\tau$, $\beta_L(\tau) = \alpha_L(\tau^{-1})$.

$L(T)$ avec les rétractions α_L, β_L, l'inversion usuelle, et la multiplication $\ldots \wedge \ldots$ vérifie les axiomes (GL1) - (GL4).

Dans la section 4.2.4 on établira que la loi d'associativité générale a lieu et que la multiplication est saturée. En admettant ces deux propriétés on constate que

$L(T)$ <u>est un groupoïde local intégrable</u>.

En tenant compte du fait que pour tout $\tau \in L(T)$, $\hat{\tau}$ est une composante connexe de T (proposition 4.2.1), et de la définition du groupoïde $\Pi_o(T)$, on constatera que $U(L(T))$ n'est autre que $\Pi_o(T)$ à un changement de notation près.

En faisant appel à la proposition 4.2.5 on trouve en conséquence: Si $(P;T)$ est simplement connexe, $L(T)$ est simplement cohérent. Cela conduit au

THÉORÈME 5 - <u>Un S-atlas connexe de dimension 1 à holonomie unilatère triviale est simplement connexe ssi il est (équivalent à) un arbre</u>.

et

THÉORÈME 6 - <u>Un S-atlas connexe de dimension 1 est à holonomie unilatère triviale ssi il est équivalent à un quotient d'un arbre par rapport à un groupe d'automorphismes qui opère de façon génériquement libre</u>.

En effet supposons d'abord que $(P;T)$ soit simplement connexe et à holonomie unilatère triviale. D'après le critère de resserrabilité $(P;T)$ est resserrable. Alors on peut supposer d'emblée que $(P;T)$, $P = \coprod A_i$, soit serré et simplement connexe. Cette dernière propriété entraîne la cohérence simple de $L(T)$ d'après la remarque ci-dessus. En particulier pour toute composante connexe A_i, ${}_{A_i}T_{A_i}$ se réduit alors à E_{A_i}. C'est dire que $\mathrm{top} : P \to \mathrm{Top}((P;T))$ est une immersion, i.e. $\mathrm{Top}((P;T))$ est une variété et $(P;T)$ est équivalent à $\mathrm{Top}((P;T))$. $(P;T)$ étant simplement connexe, $\mathrm{Top}((P;T))$ est un arbre.

La réciproque est triviale, d'où le théorème 5.

Pour démontrer le théorème 6 on peut supposer, en vertu de l'hypothèse et le critère de resserrabilité, que $(P;T)$ est serré. Le revêtement universel de $(P;T)$ est encore serré (proposition 4.2.4); c'est par conséquent un arbre A. Le groupe fondamental G opère de façon génériquement libre sur A, et $G\backslash A = (A;\hat{G})$ est équivalent à $(P;T)$. Réciproquement soit A un arbre et G un groupe d'automorphismes qui opère de façon génériquement libre, alors $G\backslash A = (A;\hat{G})$. Puisque G opère de manière génériquement libre $\{C_g | C_g = \hat{g},\ g \in G\}$ est une décomposition de $\hat{G}$ en domaines deux à deux disjoints. Cela entraîne que $\widehat{id_A} = E_A$ est fermé dans $\hat{G}$, ou bien, que $(A;\hat{G})$ est serré.

Comme conséquence immédiate on en tire

COROLLAIRE 1 - <u>Tout S-atlas connexe analytique à une dimension est le quotient d'un arbre analytique par rapport à un groupe d'automorphismes analytiques qui opère de façon génériquement libre; ce groupe d'automorphismes s'identifie au groupe fondamental.</u>

et

COROLLAIRE 2 - <u>Tout S-atlas connexe à holonomie triviale de dimension 1 est le quotient d'un arbre par rapport à un groupe d'automorphismes qui opère librement (mais pas nécessairement de façon discontinue); ce groupe s'identifie au groupe fondamental. En particulier toute Q-variété au sens de BARRE ([2]) admet une telle présentation.</u>

En effet un S-atlas analytique resp. à holonomie triviale de dimension 1 est resserrable. Dans le premier cas le revêtement universel est un arbre analytique et le groupe fondamental est automatiquement un groupe d'automorphismes analytiques.

Dans le second cas le groupe fondamental G opère de telle façon que le quotient de l'arbre par rapport à G soit un S-atlas à holonomie triviale. Cela entraîne que G opère "sans points fixes". Puisqu'une Q-variété n'est autre qu'un type particulier de S-atlas à holonomie triviale, l'énoncé s'ensuit pour les Q-variétés.

COROLLAIRE 3 - <u>Soit V une variété à un feuilletage $\mathcal{F}$ de co-dimension 1 à feuilles simplement connexes, $\tilde{V}$ le revêtement universel de V, et $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé. Alors $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$ est un arbre et le groupe fondamental G du revêtement $\tilde{V} \to V$ opère librement sur $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$. En particulier les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont fermées. $V/\mathcal{F}$ s'identifie à $G\backslash(\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}})$.</u>

Puisque $\mathcal{F}$ est à feuilles simplement connexes et que $\tilde{V} \to V$ est un revêtement, les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont simplement connexes. En conséquence $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$ est à holonomie triviale. D'autre part $\tilde{V}$ étant simplement connexe $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$ est simplement connexe (théorème 3). D'après le corollaire précédent $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$ est un arbre. Puisque tout point d'un arbre est fermé en tant qu'ensemble, toute feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ est fermée.

Les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont simplement connexes; par conséquent aucun élément non-trivial du groupe fondamental G du revêtement $\tilde{V} \to V$ ne peut admettre de feuille stable $(\in \tilde{\mathcal{F}})$. C'est dire que G opère librement sur $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$.

Remarques: (1) Les deux derniers corollaires sont valables (convenablement interprétés) pour toute catégorie différentielle C^k $(k = 0,1,2,\ldots)$.

(2) Si l'on remplace l'hypothèse de connexité simple des feuilles de $\mathcal{F}$ par l'hypothèse que pour toute feuille $F \in \mathcal{F}$ l'inclusion $(F,f_o) \to (V,f_o)$, $f_o \in \mathcal{F}$, induise une injection $\pi_1(F,f_o) \to \pi_1(V,f_o)$, on peut toujours affirmer que $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$ est un arbre et que $V/\mathcal{F} = G\backslash(\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}})$. Cependant dans le cas du corollaire, G est en même temps, en tant que groupe opérant sur $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}$, le groupe fondamental du revêtement universel $\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}} \to V/\mathcal{F}$; dans le cas-ci le revêtement universel de $V/\mathcal{F}$ s'identifie à $G_o\backslash(\tilde{V}/\tilde{\mathcal{F}}) \to V/\mathcal{F}$ où $G_o := \{g \mid g \in G,\ g = \mathrm{id}_{V/\mathcal{F}}\ \text{q.p.}\}$, et G/G_o est le groupe fondamental associé.

4.2.4. L'intégrabilité de $L(T)$

On suppose toujours que $(P;T)$ est serré, $P = \coprod_{i\in I} A_i$.

Supposons qu'on se soit donné une suite locale $\tau_1,\ldots,\tau_n$ dans $L(T)$. Puisque $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ est évaluable pour une insertion convenable de parenthèses, il existe une suite $A_{i_o},\ldots,A_{i_n}$ telle que $\operatorname{dom} \tau_j \subset A_{i_{j-1}}$, $\operatorname{im} \tau_j \subset A_{i_j}$. On pose $P' := A_{i_o} \amalg A_{i_1} \amalg \ldots \amalg A_{i_n}$, et l'on définit $\rho : P' \to P$ par $\rho|A_{i_j} = \mathrm{id}_{A_j}$. Alors $(P';T')$, $T' := {}^{\rho}T$ est encore serré (proposition 4.2.2) et $\tau_j : A_{i_{j-1}} \to A_{i_j}$ sont des T'-transitions maximales. Plus généralement toute T-transition maximale $A_{i_p} \to A_{i_q}$ est une T'-transition maximale et vice versa. En conséquence toute évaluation de $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ dans $L(T)$ correspond à une évaluation de $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ dans $L(T')$ et réciproquement.

Alors pour montrer que $\tau_1,\ldots,\tau_n$ est à produit stable dans $L(T)$, il suffit de le prouver relativement $L(T')$. C'est-à-dire on peut se placer dans la situation où P est somme directe $A_o \amalg A_1 \amalg \ldots \amalg A_n$ des arbres A_i $(i = 1,\ldots,n)$, et où $\tau_1,\ldots,\tau_n$, $\tau_i : A_{i-1} \to A_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, est une suite locale de $L(T)$. Dans ces conditions on a la

PROPOSITION 4.2.6 - Il existe un S-atlas serré $(A^*;T^*)$, où A^* est un arbre, et des plongements $\sigma_i : A_i \to A^*$ tels que $\sigma_{i-1}\sigma_i^{-1} = \tau_i$ et que T soit le relèvement de T^* par rapport à $\sigma := \coprod_{i=o}^{\infty} \sigma_i$.

et, en gardant les mêmes notations,

PROPOSITION 4.2.7 - Toute évaluation de $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ rend $\sigma_o\sigma_n^{-1}$ comme résultat. Réciproquement, si $\sigma_o\sigma_n^{-1}$ est défini, $\tau_1,\ldots,\tau_n$ est une suite locale.

Démonstration de 4.2.6: On va procéder par recollement successif. Tout d'abord on passe de $(P;T)$ au recollement $(P';T')$ suivant τ_1. Alors $P' = A_1' \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$, où $A_1' = A_o \underset{\tau_1}{*} A_1$. En désignant par φ la projection canonique $P \to P'$ et en mettant $\varphi_i := \varphi|A_i$, on a $T = {}^{\varphi}T'$; $\varphi_o\varphi_1^{-1} = \tau_1$; $\varphi_i = id_{A_i}$, $i \geq 2$ (proposition 4.2.2). Evidemment $\varphi_1^{-1}\tau_2 = \varphi_1^{-1}\tau_2\varphi_2 : A_o \underset{\tau_1}{*} A_1 = A_1' \to A_2$ est une T'-transition qui peut être non-maximale. Soit $\tau_2' : A_1' \to A_2$ l'unique T'-transition qui prolonge $\varphi_1^{-1}\tau_2$. Alors $\varphi_1\tau_2'$ $(= \varphi_1\tau_2'\varphi_2^{-1})$ est une T-transition qui prolonge τ_2. Comme τ_2 est maximale on a $\varphi_1\tau_2' = \tau_2$. On désigne par $(P'';T'')$ le recollement de $(P';T')$ suivant τ_2' et par $\tilde{\varphi} : P' \to P''$ la projection canonique. $(P'';T'')$ est encore serré, $P'' = A_1' \underset{\tau_2'}{*} A_2 \coprod A_3 \ldots \coprod A_n$, $T' = {}^{\tilde{\varphi}}T''$. On pose $\tilde{\varphi}_1 := \tilde{\varphi}|A_1'$, $\tilde{\varphi}_i := \tilde{\varphi}_i|A_i$, $i \geq 2$, $\varphi' := \varphi\tilde{\varphi} : P \to P''$, $\varphi_i' := \varphi'|A_i$, $i = 0,\ldots,n$. Alors $\varphi_o' = \varphi_o\tilde{\varphi}_1$, $\varphi_1' = \varphi_1\tilde{\varphi}_1$, $\varphi_2' = \tilde{\varphi}_2$, $\varphi_i' = \tilde{\varphi}_i = id_{A_i}$, $i \geq 3$. Et l'on obtient:

$$T = {}^{\varphi}T' = {}^{\varphi}({}^{\tilde{\varphi}}T'') = {}^{\varphi'}T'',$$

$$\varphi_o'\varphi_1'^{-1} = \varphi_o\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_1^{-1}\varphi_1^{-1} = \varphi_o\varphi_1^{-1} = \tau_1,$$

$$\varphi_1'\varphi_2'^{-1} = \varphi_1\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2^{-1} = \varphi_1\tau_2' = \tau_2.$$

En passant de $(P'';T'')$ au recollement $(P''';T''')$ suivant τ_3', où τ_3' est la T''-transition maximale qui prolonge $\varphi_2'^{-1}\tau_3$, on obtient (en projetant P'' canoniquement sur P''') une projection $\varphi'' : P \to P'''$, tel que $T = {}^{\varphi''}T'''$, et que $\varphi_{i-1}''\varphi_i''^{-1} = \tau_i$ pour $i = 0,1,2,3$. En poursuivant ce procédé de recollement, on aboutit à un S-atlas serré $(A^*;T^*)$ où

$$A^* := P^{(n)}, \quad T^* := T^{(n)}, \quad \sigma := \varphi^{(n-1)} : P \to A^*,$$

$$\sigma_i := \sigma|A_i, \text{ tel que } T = {}^{\sigma}T^* \text{ et que } \sigma_{i-1}\sigma_i^{-1} = \tau_i.$$

Démonstration de 4.2.7: On procède par récurrence. Pour $n = 2$ on a $\tau_1 = \sigma_o\sigma_1^{-1}$, $\tau_2 = \sigma_1\sigma_2^{-1}$ et $\tau_1\tau_2 = (\sigma_o\sigma_1^{-1})(\sigma_1\sigma_2^{-1}) \subset \sigma_o\sigma_2^{-1}$. D'après la proposition 4.2.3, $\sigma_o\sigma_2^{-1}$ est une T-transition maximale $A_o \to A_2$, qui prolonge visiblement $\tau_1\tau_2$, d'où $\tau_1 \wedge \tau_2 = \sigma_o\sigma_2^{-1}$.

Supposons maintenant que $n = k+1$ et que soit donnée une évaluation du produit $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{k+1}$, qui commence par l'évaluation, disons, du produit $\tau_j \wedge \tau_{j+1}$ $(= \tau')$. Alors l'évaluation donnée est en même temps une évaluation du produit $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{j-1} \wedge \tau' \wedge \tau_{j+2} \wedge \ldots \wedge \tau_{k+1}$. C'est dire que $\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, \tau', \tau_{j+2}, \ldots, \tau_{k+1}$ est une suite locale de $L(T')$, où $T' := {}_{P'}T_{P'}$, $P' := P - A_j$. Les plongements $\sigma_o, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_{k+1}$ vérifient les hypothèses de la proposition relativement la suite $\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, \tau', \tau_{j+1}, \ldots, \tau_{k+1}$. Cela nous ramène au cas $n = k$, d'où par récurrence,

$$\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{j-1} \wedge \tau_j \wedge \tau_{j+1} \wedge \tau_{j+2} \wedge \ldots \wedge \tau_{k+1} =$$
$$\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{j-1} \wedge \tau' \wedge \tau_{j+2} \wedge \tau_{k+1} = \sigma_o \sigma_{k+1}^{-1} .$$

Supposons maintenant que $\sigma_o \sigma_n^{-1}$ soit défini, ou, ce qui revient au même, que $\sigma_o(A_o) \cap \sigma_n(A_n) \neq \emptyset$. Puisque $\tau_i = \sigma_{i-1}\sigma_i^{-1}$, $\sigma_{i-1}(A_{i-1}) \cap \sigma_i(A_i) \neq \emptyset$. Cela entraîne que $B := \sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_{n-1}(A_{n-1})$ est connexe, que $\sigma_o(A_o) \cap B \neq \emptyset$, et que $B \cap \sigma_n(A_n) \neq \emptyset$. Selon le théorème de Helly pour les arbres ([8]) cela entraîne que $D := \sigma_o(A_o) \cap B \cap \sigma_n(A_n) \neq \emptyset$, ou bien, qu'il existe $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ et $p \subset A_j$ tel que $\sigma_j(p) \in B$. Autrement dit, $(\sigma_o\sigma_j^{-1})(\sigma_j\sigma_n^{-1})$ est défini. En raisonnant par récurrence on peut supposer que $\sigma_0\sigma_j^{-1} = \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_j$, $\sigma_j^{-1}\sigma_n = \tau_{j+1} \wedge \ldots \wedge \tau_n$, et que, par conséquent, $(\sigma_o\sigma_j^{-1})(\sigma_j^{-1}\sigma_n) = (\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_j)(\tau_{j+1} \wedge \ldots \wedge \tau_n)$, d'où l'on tire que $(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_j) \wedge (\tau_{j+1} \wedge \ldots \wedge \tau_n)$ est défini, i.e. que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ est une suite locale.

Le théorème de Helly que nous avons utilisé dans la dernière démonstration permet de prouver par la même méthode

PROPOSITION 4.2.8 - Si $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $(\tau_1,\ldots,\tau_p)$, $(\tau_{p+1},\ldots,\tau_n)$ sont des suites locales de $L(T)$, alors le produit $(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_p) \wedge (\tau_{p+1} \wedge \ldots \wedge \tau_n)$ est défini.

Les propositions 4.2.6-4.2.8 établissent l'intégrabilité de $L(T)$.

§ 5 - Le second groupe d'homotopie

Pour définir le second groupe d'homotopie d'un S-atlas rappelons encore une fois l'exemple directeur d'une variété V à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Si les U_i sont simplement connexes, les groupes d'homotopie $\pi_1(\Sigma(\mathcal{U}),\sigma^o)$, $\sigma^o \in \Sigma(\mathcal{U})^o$, s'identifient canoniquement (au sens de $\underline{\underline{\mathrm{Gr}}}\ \underline{\underline{\mathrm{Typ}}}$) aux groupes $\pi_1(V,x)$. Les groupes $\pi_1(\Sigma(\mathcal{U}),\sigma^o)$ sont définis de manière purement combinatoire. De même pour le second groupe d'homotopie d'un complexe simplicial quelconque on dispose d'une définition combinatoire due à Whitehead-Peiffer-Smith ([29], [19], [26]) qui donne une présentation de π_2 en tant que π_1-module par générateurs et relations, et qui jouit de bonnes propriétés. Pour que $\pi_2(\Sigma(\mathcal{U}))$ s'identifie à $\pi_2(V)$ il suffit que les U_i soient simplement connexes et acycliques en dimension 2, et que les intersections $U_i \cap U_j$ soient acycliques en dimension 1 ; on dira dans ce cas que $\mathcal{U}$ est 2-<u>simple</u>. En effet en remontant au revêtement universel $\tilde{V}$ de V, $\mathcal{U}$ se relève en un recouvrement $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_i^k\}$, où $\tilde{U}_i^k$ se projet bijectivement sur U_i. De plus toute composante de $\tilde{U}_i^k \cap \tilde{U}_j^\ell$ se projet sur une composante connexe de $U_i \cap U_j$. Cela montre que $\tilde{\mathcal{U}}$ aussi est 2-simple. Mais alors on a $\pi_2(V) = H_2(\tilde{V}) = H_2(\Sigma(\tilde{\mathcal{U}}))$. De plus $\Sigma(\tilde{\mathcal{U}})$ est simplement connexe puisque V l'est et que les $\tilde{U}_i^k$ sont simplement connexes. Autrement dit, $\Sigma(\tilde{\mathcal{U}})$ est le revêtement universel de $\Sigma(\mathcal{U})$. En conséquence on a $H_2(\Sigma(\tilde{\mathcal{U}})) = \pi_2(\Sigma(\tilde{\mathcal{U}})) = \pi_2(\Sigma(\mathcal{U}))$, d'où l'on obtient $\pi_2(V) = \pi_2(\Sigma(\mathcal{U}))$.

Pour le cas d'un recouvrement quelconque $\mathcal{U}$ on dispose de la suite spectrale d'Artin-Mazur-Quillen ([1], [22]) pour relier l'homotopie de V à l'homotopie semi-simpliciale à la Kan de $\Sigma(\mathcal{U})$.

Le cas d'un recouvrement 2-simple suggère comment, dans certain cas, on peut définir à la Čech le second groupe d'homotopie d'un S-atlas. Pour cela supposons que T soit un groupoïde sur une variété P tel que $(P;T)$ soit un S-atlas connexe. On définit comme d'habitude le nerf NT par $(NT)^n :=$ $\{(t_1,\dots,t_n) \mid t_i \in T,\ t_1t_2\dots t_n \in T\}$, les opérateurs de bord et de dégénérescence étant définis à la Eilenberg-MacLane. $(NT)^n$ est en même temps un sous-espace localement connexe de T^n, et cela définit NT comme complexe simplicial topologique. En conséquence l'ensemble discret $[NT]$ de ses composantes connexes se munit de façon unique d'une structure simpliciale telle que la projection canonique $NT \to [NT]$ soit un morphisme de complexes simpliciaux. Le groupoïde de Poincaré de $[NT]$ s'identifie à $\Pi_o(T)$. En conséquence le groupe fondamental de $[NT]$ s'identifie à celui de $(P;T)$ si P est simplement connexe.

On dira que NT est 2-<u>simple</u> si P est simplement connexe et acyclique en dimension 2 et les composantes connexes de NT sont acycliques en dimension 1. On a la

PROPOSITION 5.1 - Pour deux S - atlas $(P;T)$, $(P';T')$ 2 - simples qui sont équivalents l'un à l'autre on a $\pi_2([NT]) \simeq \pi_2([NT'])$.

Cela nous amène à définir le second groupe d'homotopie pour un S - atlas $(P_o;T_o)$, qui est équivalent à un S - atlas 2 - simple $(P;T)$, comme $\pi_2(NT)$.

Les sphères elliptiques $\mathbb{P}(\sigma)$ (§ 4.1) admettent des S - atlas 2 - simples. Puisque le π_2 s'identifie à celui du revêtement universel, on trouve dans le cas où $\#(|\sigma|) \geq 3$, que $\pi_2(\mathbb{P}(\sigma)) \simeq \mathbb{Z}$ si $\chi_{\mathbb{P}(\sigma)} > 0$, et $= 0$ dans les autres cas. Désignons par $\mathbb{P}(n_1,n_{-1})$ la sphère elliptique associée à la signature σ définie par $\sigma(1) = n_1$, $\sigma(-1) = n_{-1}$, $\sigma(z) = 1$, $z \notin \{1,-1\}$. On suppose de plus que n_1 et n_{-1} sont premiers entre eux. Dans ce cas $\mathbb{P}(n_1,n_{-1})$ est simplement connexe. Pour le cas non-trivial le plus simple, $\mathbb{P}(2,1)$, on trouve que $\pi_2(\mathbb{P}(2,1) \simeq \mathbb{Z}$, et, en identifiant $\pi_2(\mathbb{P})$ également à $\mathbb{Z}$, le morphisme $\pi_2(\mathbb{P}(2,1)) \to \pi_2(\mathbb{P})$, induit par top, revient à une multiplication par 2 (pourvu que les générateurs des deux groupes soient convenablement choisis). Le calcul laisse entrevoir que , pour le cas général , on aura $\pi_2(\mathbb{P}(n_1,n_{-1})) = \mathbb{Z}$ et que le morphisme $\pi_2(\mathbb{P}(n_1,n_{-1})) \to \pi_2(\mathbb{P})$, induit par top, revient à une multiplication par $n_1 n_{-1}$.

Pour arriver à une définition des groupes d'homotopie d'un S - atlas on observe que pour une variété V à un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ le bi-complexe $\underline{\underline{S}}U^*$ a le même type d'homotopie - dans un sens qui reste à préciser - que le complexe $\underline{\underline{S}}V$; ici U^* est la somme directe des puissances fibrées U^{p+1} , $p \geq 0$, sur V , où $U := \coprod U_i$, et $\underline{\underline{S}}$ désigne le foncteur qui associe à un espace topologique son complexe singulier. La suite spectrale d'Artin-Mazur-Quillen s'en obtient. Pour un S - atlas cela conduit à définir les groupes d'homotopie comme ceux du bi-complexe $\underline{\underline{S}}\, NT$; il faut alors démontrer l'invariance par rapport à une équivalence de S - atlas. Lorsque NT possède assez d'asphéricité, $\pi_*((P;T))$ et $\pi_*([NT])$ s'identifient jusqu'à une certaine dimension, comme c'est le cas ci-devant pour les dimensions 1 et 2 . Cependant pour les dimensions ≥ 3 on ne dispose pas d'algorithmes généraux pour calculer ces groupes.

D'autre part $\underline{\underline{S}}\, NT$ peut servir de modèle bi-simplicial pour BT , d'où l'on conclut à $\pi_*((P;T)) \simeq \pi_*(BT)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN and B. MAZUR - On the van Kampen theorem, Topology 5 (1966), 179 - 189.

[2] R. BARRE - De quelques aspects de la théorie des Q - variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 227 - 312.

[3] L.G. BOUMA and W.T. van EST - Manifold schemes and foliations on the 2 - torus and the Klein bottle, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. A 81 (1978), 313 - 347.

[4] J.-Ph. BUFFET et J.-C. LOR - Une construction d'un universel pour une classe assez large de Γ - structures, CRAS A-B 270 (1970), A 640 - A 642.

[5] C. EHRESMANN - Structures feuilletées, Proc. 5th Canadian Congress, 109 - 172, Montreal 1961.

[6] W.T. van EST - Fundamental groups of manifold schemes, Topological Structures II, Math. Centre Tracts 115, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).

[7] W.T. van EST - Sur le groupe fondamental d'un schéma de variété (revêtements ramifiés, pseudogroupes), Journée de géométrie transverse, Univ. Paris VII, 1979, preprint.

[8] W.T. van EST - Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété à une dimension, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 45 - 77.

[9] C. GODBILLON et G. REEB - Fibrés sur le branchement simple, L'Ens. Math. (2), 12 (1966), 277 - 287.

[10] A. HAEFLIGER - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv. 32 (1958), 248 - 329.

[11] A. HAEFLIGER et G. REEB - Variétés (non-séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, L'Ens. Math. (2), 3 (1957), 107 - 125.

[12] A. HAEFLIGER - Homotopy and integrability, Manifolds Amsterdam 1970, Lecture Notes 197, 133 - 163.

[13] A. HAEFLIGER - Some remarks on foliations with minimal leaves, J. Diff. Geometry 15 (1980), 269 - 284.

[14] P.J. HIGGINS - Notes on categories and groupoids, van Nostrand Reinhold Math. Studies 32, London 1971.

[15] S. JEKEL - On two theorems of A. Haefliger concerning foliations, Topology 15 (1976), 267 - 271.

[16] S. JEKEL - Loops on the classifying space for foliations, Am. J. Math. 102 (1980), 13 - 23.

[17] G.W. MACKEY - Ergodic theory and virtual groups, Math. Ann. 166 (1956), 359 - 363.

[18] P. MOLINO - Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 279 - 284.

[19] R. PEIFFER - Ueber Identitäten zwischen Relationen, Math. Ann. 121 (1949), 67 - 99.

[20] M. PLAISANT - Sur l'intégrabilité des algèbres de Lie Banachiques dans le cadre des Q - variétés, Thèse de 3ème cycle, Valenciennes, 1980.

[21] J. PRADINES et J. WOUAFO-KAMGA - La catégorie des QF - variétés, CRAS A 288 (1979), 717 - 719.

[22] D.G. QUILLEN - Spectral sequences of a double semi-simplicial group, Topology 5 (1966), 155 - 157.

[23] A. RAMSAY - Virtual groups and group actions, Advances in Math. 6 (1971), 253 - 322.

[24] I. SATAKE - On a generalization of the notion of manifold, Proc. NAS 42 (1956), 359 - 363.

[25] G. SEGAL - Classifying spaces and spectral sequences, Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 105 - 112.

[26] P.A. SMITH - The complex of a group relative to a set of generators, Ann. of Math. 54 (1951), 371 - 424.

[27] W.P. THURSTON - The geometry and topology of 3 - manifolds, Notes polycopiées, Princeton 1978, 1979, ...

[28] A. WEIL - Généralisation des fonctions abéliennes, J. Math. Pures et Appl. (9) 17 (1938), 47 - 87.

[29] J.H.C. WHITEHEAD - Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups", Ann. of Math. 47 (1946), 806 - 810.

[30] J. WOUAFO-KAMGA - Décomposition des G - structures d'ordre supérieur. Structures transverses des feuilletages, Thèse, Toulouse, 1979.

[31] H. ZIESCHANG, E. VOGT, H.-D. COLDEWEY - Surfaces and planar groups, Lectures Notes 835, Springer 1980.

W.T. van EST
Mathematisch Instituut
Roetersstraat 15
1018 WB AMSTERDAM.