

Astérisque

JEAN FRESNEL

Une base normale pour l'algèbre de Banach de Reich

Astérisque, tome 119-120 (1984), p. 140-150

http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__119-120__140_0

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Appendice

UNE BASE NORMALE POUR L'ALGÈBRE DE BANACH DE REICH

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-

Le but de cet appendice est de trouver une base normale pour l'algèbre de Banach de Reich $F_{\varepsilon, \Delta, g}$ définie au §2 de l'article précédent "The Reich trace formula" de M. Boyarsky, base qui essentiellement ne dépend pas de ε et de Δ .

Au § 2 (A. 2) on montre que cette algèbre d'éléments analytiques est une algèbre affinoïde et pour cette dernière on construit au §1 (A.1) une base normale en utilisant des propriétés classiques des algèbres affinoïdes et en particulier la division de Weierstrass.

Les calculs qui suivent n'ont rien d'original, ils sont bien connus des "géomètres rigides"; nous les avons écrits pour aider le lecteur peu habitué au maniement des algèbres affinoïdes.

A. 0. - Quelques rappels sur les algèbres affinoïdes

DÉFINITION 1 (et propriétés). - Soient K un corps valué complet pour une valeur absolue non archimédienne, $K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ la sous-algèbre des séries formelles $\sum a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \dots T_n^{\nu_n}$ telles que $\lim |a_{\nu}| = 0$. Cette algèbre est de Banach pour la norme $\| \cdot \|$ définie par $\| \sum a_{\nu} T^{\nu} \| = \max_{\nu} |a_{\nu}|$, cette norme est multiplicative. L'algèbre $K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ est souvent appelée l'algèbre de Tate, c'est un anneau noethérien ([1], II. 3. 1), factoriel ([1], II. 3. 2) dans lequel tout idéal est fermé ([1], II. 3. 3).

DÉFINITION 2 (algèbre résiduelle). - Si K est un corps valué, on note K° son anneau de valuation, $K^{\circ\circ}$ son idéal de valuation, $\bar{K} = K^\circ / K^{\circ\circ}$ son corps résiduel. Si $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée on note $A^\circ = \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$, $A^{\circ\circ} = \{a \in A \mid \|a\| < 1\}$ et $\bar{A} = A^\circ / A^{\circ\circ}$ s'appelle l'algèbre résiduelle de A et on note $a \mapsto \bar{a}$ la surjection canonique de A° sur \bar{A} . En particulier on a $(K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle)^\circ = K^\circ\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle = \{ \sum a_\nu T^\nu \mid \|a_\nu\| \leq 1, a_\nu \rightarrow 0 \}$ et $K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle = \bar{K}[T_1, T_2, \dots, T_n]$.

DÉFINITION 3. - Un élément $f \in K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ avec $\|f\| = 1$ est dit régulier en T_n de degré d si \bar{f} est de la forme $\bar{f} = c_0 + c_1 T_n + \dots + c_{d-1} T_n^{d-1} + \lambda T_n^d$ où $c_i \in \bar{K}[T_1, \dots, T_{n-1}]$, $\lambda \in \bar{K} - \{0\}$.

THÉORÈME DE DIVISION DE WEIERSTRASS ([1], II.2). - Soient K un corps valué complet, $f \in K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ régulier en T_n de degré d , $g \in K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$. Alors il existe $q \in K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$, $r \in K\langle T_1, \dots, T_{n-j} \rangle [T_n]$ uniques tels que $g = qf + r$ et $\deg_{T_n} r < d$. En plus on a $\|g\| = \max(\|q\|, \|r\|)$.

A.1. - Une base normale pour une algèbre affinofde

PROPOSITION 1. - Soient K un corps valué complet, $\pi, R \in K$ avec $0 < |\pi| \leq 1 \leq |R|$, $g \in K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$, régulier en T_n de degré d (considéré comme élément de $K\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$) et avec $d = \deg_{\text{total}}(g)$. Soient $K\langle T_1/R, \dots, T_n/R, S \rangle$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\pi, R}$ induite par la norme $\|\cdot\|_R$ de $K\langle T_1/R, \dots, T_n/R, S \rangle$ et $\varphi : K\langle T/R, S \rangle \rightarrow A(g, \pi, R)$ la surjection canonique. Alors $A(g, \pi, R)$ est une algèbre intègre et

$$\mathcal{B}(g, \pi, R) = \left\{ \varphi \left(\left(\frac{T_1}{R} \right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R} \right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d} \right)^i, \left(\frac{T_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R} \right)^{\mu_n} S^j \right) \left| \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d, 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0, j > 0 \end{array} \right. \right\}$$

est une base normale de $A(g, \pi, R)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\pi, R}$.

En utilisant (2) successivement, il existe $r_0, r_1, \dots, r_n \in E$, $q_n \in K \langle \frac{T}{R} \rangle$ tels que

$$(3) \quad a = r_0 + r_1 g_R + \dots + r_n g_R^n + q_n g_R^{n+1} \quad \text{avec} \quad \|a\|_R = \max(\|r_0\|_R, \dots, \|r_n\|_R, \|q_n\|_R) .$$

Il suit de (3) et de la relation $g_R S = (g_R S - \frac{\pi}{R d}) + \frac{\pi}{R d}$ que $a S^n$ s'écrit

$$(4) \quad a S^n = \sum_{i \geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j=1}^n v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R d}) \ell (T, S) , \quad \text{où } u_i, v_j \in E ,$$

$$\|a\|_R = \max(\|u_i\|_R, \|v_j\|_R, \|\ell\|_R) \quad \text{et} \quad 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_R .$$

Soit $f \in K \langle \frac{T}{R}, S \rangle$, il suit de (4) qu'il existe $u_i, v_j \in E$, $\ell \in K \langle \frac{T}{R}, S \rangle$ tels que

$$(5) \quad f = \sum_{i \geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j > 0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R d}) \ell , \quad \text{avec} \quad \|f\|_R = \max(\|u_i\|_R, \|v_j\|_R, \|\ell\|_R)$$

$$\text{et} \quad 0 = \lim \|u_i\|_R = \lim \|v_j\|_R .$$

Dans la décomposition (5) u_i, v_j et ℓ sont uniques. En effet, si

$$0 = \sum_{i \geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j > 0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R d}) \ell , \quad \text{on peut supposer que}$$

$$1 = \max(\|u_i\|_R, \|v_j\|_R, \|\ell\|_R) . \quad \text{Ainsi résiduellement on a}$$

$$0 = \sum_{i \geq 0} \bar{u}_i \bar{g}_R^i + \sum_{j > 0} \bar{v}_j S^j + (\bar{g}_R S - (\frac{\pi}{R d})) \bar{\ell} .$$

Si $k = \deg_S \bar{\ell}$, on a $0 = \bar{v}_{k+1} + \bar{g}_R \bar{\ell}_k$ où $\bar{\ell} = \bar{\ell}_0 + \bar{\ell}_1 S + \dots + \bar{\ell}_k S^k$, $\bar{\ell}_i \in \bar{K}[\frac{T}{R}]$.

Or $\deg_{(T_n)/R} v_{k+1} < d$ implique $v_{k+1} = 0$, ce qui est impossible. Ainsi donc

$$0 = u_i = v_j \quad \text{pour tout } i \geq 0 \quad \text{et pour tout } j > 0 .$$

Soient toujours $\varphi : K \langle \frac{T}{R}, S \rangle \longrightarrow A(g, \pi, R)$ la surjection canonique de $K \langle \frac{T}{R}, S \rangle$ sur $A(g, \pi, R) = \frac{K \langle \frac{T}{R}, S \rangle}{(g S - \pi)}$. Soient $f, f' \in K \langle \frac{T}{R}, S \rangle$ et

$$(6) \quad f = \sum_{i \geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j > 0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R d}) \ell , \quad f' = \sum_{i \geq 0} u'_i g_R^i + \sum_{j > 0} v'_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R d}) \ell'$$

leur décomposition selon (5). Alors on a $\varphi(f) = \varphi(f')$ si et seulement si

$$u_i = u'_i , \quad v_j = v'_j \quad \text{pour tout } i, j ; \quad \text{c'est essentiellement l'unicité de (5)} .$$

Il suit alors de (5) et (6) que

$$\|\varphi(f)\|_{\pi, R}' = \left\| \sum_{i \geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j > 0} v_j S^j \right\|_R = \max_{i, j} (\|u_i\|_R, \|v_j\|_R) .$$

Ceci montre bien que

$$\mathfrak{B}(g, \pi, R) = \left\{ \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\nu_1} \left(\frac{T_2}{R}\right)^{\nu_2} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i\right), \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\mu_1} \left(\frac{T_2}{R}\right)^{\mu_2} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\mu_n} S^j\right) \left| \begin{array}{l} (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ i \geq 0, j > 0 \\ 0 \leq \nu_n < d, 0 \leq \mu_n < d \end{array} \right. \right\}$$

est une base normale de $A(g, \pi, R)$ pour $\|\cdot\|_{\pi, R}'$.

Remarque. - On peut montrer que toute algèbre affinofde réduite sur un corps K algébriquement clos admet une base normale pour la norme spectrale ([3]) (voir définition 4 ci-après). Mais on ne peut dire que ce résultat permette d'exhiber "explicitement" des bases normales.

A. 2. - Une base normale pour une algèbre d'éléments analytiques

DÉFINITION 4. - Soient K un corps algébriquement clos, valué complet,

$A(g, \pi, R)$ l'algèbre définie par la proposition 1. On appelle spectre maximal de $A(g, \pi, R)$, et on le note $\text{Spm } A(g, \pi, R)$, l'ensemble des idéaux maximaux de $A(g, \pi, R)$.

Si $\mathfrak{M} \in \text{Spm}(A(g, \pi, R))$ on a $A(g, \pi, R)/\mathfrak{M} = K$ ([1], II.3.5 en tenant compte de K algébriquement clos); ainsi il existe un élément unique $f(\mathfrak{M}) \in K$ tel que $f - f(\mathfrak{M}) \in \mathfrak{M}$. On appelle semi-norme spectrale de $A(g, \pi, R)$ la semi-norme définie par $\|f\|_{\text{sp}} = \sup_{\mathfrak{M} \in \text{Spm}(A(g, \pi, R))} |f(\mathfrak{M})|$.

LEMME 1. - La semi-norme spectrale de l'algèbre $A(g, \pi, R)$ définie par la proposition 1 est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\pi, R}$.

Démonstration. - En effet $A(g, \pi, R)$ est une algèbre (affinofde) intègre (proposition 1), donc réduite et on sait alors que la semi-norme spectrale est une norme et que toute norme de Banach sur $A(g, \pi, R)$ est équivalente à la norme spectrale ([1], II.6.1 ou [2]).

LEMME 2. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet,

$\varphi : K\langle \frac{T}{R}, S \rangle \longrightarrow A(g, \pi, R)$ définis par la proposition 1 ,

$X(g, \pi, R) \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, s) = (x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in K^{n+1} \mid |x_i| \leq |R|, 1 \leq i \leq n, |s| \leq 1\}$.

Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n, s) \mapsto \mathfrak{M}_{x, s} = \varphi((T_1 - x_1)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + \dots + (T_n - x_n)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + (S - s)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle)$ est une bijection de $X(g, \pi, R)$ sur $\text{Spm } A(g, \pi, R)$. Pour tout $f(T, S) \in K\langle \frac{T}{R}, S \rangle$

on a $\varphi(f)(\mathfrak{M}_{x, s}) = f(x, s)$. Ainsi $\|\varphi(f)\|_{\text{sp}} = \sup_{(x, s) \in X(g, \pi, R)} |f(x, s)|$.

Démonstration. - Soient $(x, s) \in X(g, \pi, R)$,

$\mathfrak{M}'_{x, s} = (T_1 - x_1)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + \dots + (T_n - x_n)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + (S - s)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle$ alors la surjection

canonique $\tau : K\langle \frac{T}{R}, S \rangle \longrightarrow K\langle \frac{T}{R}, S \rangle / \mathfrak{M}'_{x, s}$ est définie par $\tau(f(T, S)) = f(x, s)$.

Comme $g(x)s - \pi = 0$, on a $gS - \pi \in \mathfrak{M}'_{x, s}$, ainsi $\varphi(\mathfrak{M}'_{x, s}) = \mathfrak{M}_{x, s}$ est un idéal maximal de $A(g, \pi, R)$ puisque $\mathfrak{M}'_{x, s} \supset \ker \varphi$.

Soit \mathfrak{M} un idéal maximal de $A(g, \pi, R)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K\langle \frac{T}{R}, S \rangle & \xrightarrow{\varphi} & A(g, \pi, R) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \theta \\ \frac{K\langle \frac{T}{R}, S \rangle}{\varphi^{-1}(\mathfrak{M})} & \xrightarrow{\sim} & \frac{A(g, \pi, R)}{\mathfrak{M}} = K \end{array}$$

où τ, θ sont les surjections canoniques.

Comme $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ est un idéal maximal de $K\langle \frac{T}{R}, S \rangle$ il existe

$(x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in K^{n+1}$ avec $|x_i| \leq |R|, |s| \leq 1$ tels que

$\varphi^{-1}(\mathfrak{M}) = (T_1 - x_1)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + \dots + (T_n - x_n)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle + (S - s)K\langle \frac{T}{R}, S \rangle$ ([1], II. 4. 4).

De plus τ est défini par $\tau(f(T, S)) = f(x, s)$, comme $gS - \pi \in \varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$,

on a $0 = \theta \cdot \varphi(gS - \pi) = \tau(gS - \pi) = g(x)s - \pi$. Ainsi l'application $(x, s) \mapsto \mathfrak{M}_{x, s}$ est

surjective. Elle est clairement injective. De plus on a $|\varphi(f)(\mathfrak{M}_{x, s})| = |f(x, s)|$

et donc $\|\varphi(f)\|_{\text{sp}} = \sup_{(x, s) \in X(g, \pi, R)} |f(x, s)|$.

DÉFINITION 5. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, g, π, R définis par la proposition 1, $D(g, \pi, R) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \mid |x_i| \leq |k|, 1 \leq i \leq n, |g(x)| \geq |\pi|\}$, $\mathcal{X}(D)$ les fonctions rationnelles définies sur $D(g, \pi, R)$, c'est-à-dire les éléments $\frac{P}{Q} \in K(T_1, T_2, \dots, T_n)$ tels que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(g, \pi, R)$. L'algèbre $\mathcal{X}(D)$ est normée par $\|\frac{P}{Q}\|_D \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in D} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right|$ (norme de la convergence uniforme sur $D(g, \pi, R)$). L'algèbre des éléments analytiques sur $D(g, \pi, R)$ est le complété de $\mathcal{X}(D)$ pour la norme $\|\cdot\|_D$ et on la note $\mathfrak{K}(D)$.

PROPOSITION 2. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, $g, \pi, R, A(g, \pi, R), \varphi$ définis par la proposition 1.

1°) L'application $(x, s) \mapsto x$ de $X(g, \pi, R)$ dans $D(g, \pi, R)$ est une bijection (définition 5 et lemme 2).

2°) Soit $Q \in K[T_1, T_2, \dots, T_n]$ tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(g, \pi, R)$, alors $\varphi(Q)$ est un élément inversible de $A(g, \pi, R)$; ainsi l'application $P \mapsto \varphi(P)$ de $K[T]$ dans $A(g, \pi, R)$ se prolonge en une application $\psi : \mathcal{X}(D) \rightarrow A(g, \pi, R)$ et ψ est une isométrie de $(\mathcal{X}(D), \|\cdot\|_D)$ dans $(A(g, \pi, R), \|\cdot\|_{sp})$.

3°) L'application ψ se prolonge par continuité en un isomorphisme de $\mathfrak{K}(D)$ sur $A(g, \pi, R)$.

Démonstration

1°) Si $(x, s) \in X(g, \pi, R)$ on a $|x_i| \leq |R|, |s| \leq 1$ et $g(x)s = \pi$, ainsi $|g(x)| \geq |\pi|$, ce qui montre $x \in D(g, \pi, R)$. Il est immédiat que $(x, s) \mapsto x$ est bijectif.

2°) Tout idéal maximal de $A(g, \pi, R)$ est un $\mathfrak{M}_{x, s}$ où $(x, s) \in X(g, \pi, R)$ et on a $\varphi(Q) \notin \mathfrak{M}_{x, s} = Q(x)$ (lemme 2); or d'après 1°) $x \in D(g, \pi, R)$ ainsi $Q(x) \neq 0$, ce qui veut dire que $\varphi(Q) \notin \mathfrak{M}_{x, s}$ (lemme 2). Puisque $\varphi(Q)$ n'appartient à aucun idéal maximal de $A(g, \pi, R)$, il est inversible.

L'application $P \mapsto \varphi(P)$ de $K[T]$ dans $A(g, \pi, R)$ se prolonge en une application $\psi : \mathcal{X}(D(g, \pi, R)) \rightarrow A(g, \pi, R)$ définie par $\psi\left(\frac{P}{Q}\right) = \psi(P) (\psi(Q))^{-1}$. Ainsi on a $\psi\left(\frac{P}{Q}\right) \notin \mathfrak{M}_{x, s} = \varphi(P) \notin \mathfrak{M}_{x, s} \times (\varphi(Q) \notin \mathfrak{M}_{x, s})^{-1} = P(x) (Q(x))^{-1}$ (lemme 2). Il suit de 1°) et du lemme 2 que $\|\frac{P}{Q}\|_{sp} = \|\frac{P}{Q}\|_D$.

3°) D'après le lemme 1, l'algèbre $A(g, \pi, R)$ est complète pour la norme spectrale, ainsi ψ se prolonge par continuité en une isométrie $\tilde{\psi}$ de $\mathcal{K}(D)$ dans $A(g, \pi, R)$. Il reste à montrer que $\tilde{\psi}$ est surjective, c'est-à-dire que $\psi(\mathcal{X}(D))$ est dense dans $A(g, \pi, R)$.

Or $\varphi(K[T, S])$ est dense dans $A(g, \pi, R)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\pi, R}'$ donc pour la norme spectrale (lemme 1), de plus $\psi(K[T, \frac{\pi}{g}]) = \varphi(K[T, S])$ et $K[T, \frac{\pi}{g}] \subset \mathcal{X}(D)$.

Remarque. - On peut montrer que toute algèbre affinofde réduite A peut être considérée comme une algèbre d'éléments analytiques sur $\text{Spm } A$ (considéré comme sous-ensemble d'un polydisque unité).

D'autre part l'algèbre des éléments analytiques sur un ensemble D de la forme $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^{\circ n} \mid |f_i(x)| \geq 1, |g_j(x)| \leq 1 \begin{matrix} 1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq t \end{matrix}\}$ est une algèbre affinofde réduite.

COROLLAIRE 1. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, g, π, R définis par la proposition 1, $D(g, \pi, R)$ défini par la définition 5.

Alors

$$\mathcal{B}'(g, \pi, R) = \left\{ \left(\frac{T_1}{R} \right)^{v_1} \dots \left(\frac{T_n}{R} \right)^{v_n} \left(\frac{g}{R} \right)^i, \left(\frac{T_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R} \right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g} \right)^j \mid \begin{matrix} (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq v_n < d, \quad i \geq 0 \\ 0 \leq \mu_n < d, \quad j \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

est une base normale de l'algèbre $\mathcal{K}(D)$ des éléments analytiques sur $D(g, \pi, R)$ pour une norme équivalente à $\|\cdot\|_D$.

Démonstration. - C'est une application immédiate des propositions 1 et 2.

COROLLAIRE 2. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet pour une valuation de rang 1 notée ord , K° son anneau valuation. Soit

$g(T_1, T_2, \dots, T_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \dots T_n^{\nu_n} \in K[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme de degré total d avec $0 = \inf_{\nu} \text{ord}(a_{\nu}) = \inf_{\substack{\nu \text{ tels que} \\ \nu_1 + \dots + \nu_n = d}} \text{ord} a_{\nu}$. Soient $\varepsilon \geq 0$, $\Delta \geq 0$,

$\pi(\varepsilon) = \pi$, $R(\Delta) = R \in K$ avec $\varepsilon = \text{ord} \pi(\varepsilon)$, $-\Delta = \text{ord} R(\Delta)$ et $1 = \pi(0) = R(0)$,

$D(\varepsilon, \Delta, g) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \text{ord} g(x) \leq \varepsilon, \text{ord} x_i \geq -\Delta \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ et

$F(\varepsilon, \Delta, g)$ l'algèbre des éléments analytiques sur $D(\varepsilon, \Delta, g)$. Alors il existe n formes linéaires $L_i(T) = \sum a_{ij} T_j$, $1 \leq i \leq n$ avec $(a_{ij}) \in \text{Gl}_n(K^\circ)$ et telles que

$$\mathfrak{B}(\varepsilon, \Delta, g) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\nu_1} x_1 \dots x_n \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d} \right)^i, \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g} \right)^j \mid \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d, i \geq 0 \\ 0 \leq \mu_n < d, j > 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

soit une base normale pour une norme équivalente à la norme de la convergence uniforme sur $D(\varepsilon, \Delta, g)$.

Soit $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ où $\Sigma_1 = \mathbb{N}^{n-1} \times \{0, 1, \dots, d-1\} \times \mathbb{N}$,
 $\Sigma_2 = \mathbb{N}^{n-1} \times \{0, 1, \dots, d-1\} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ on pose

$$\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d} \right)^i \quad \text{si } s \in \Sigma_1,$$

$$\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g} \right)^j \quad \text{si } s \in \Sigma_2.$$

Alors on a les propriétés suivantes

- 1) $\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = b_{s, \varepsilon, \Delta} \eta_{s, 0, 0}$ où $b_{s, \varepsilon, \Delta} = R^{-(i + \sum \nu_i)}$
si $s = (\nu, i) \in \Sigma_1$, $b_{s, \varepsilon, \Delta} = R^{-(j + \sum \mu_j)}$ si $s = (\mu, j) \in \Sigma_2$
- 2) on a $\eta_{s, \varepsilon, \Delta} \in K[T]$ si $s \in \Sigma_1$, $g^j \eta_{s, \varepsilon, \Delta} \in K[T]$ si $s = (\mu, j) \in \Sigma_2$,
- 3) si $\varepsilon' < \varepsilon$, $\Delta' < \Delta$ on a $\lim_{s \rightarrow \infty} b_{s, \varepsilon, \Delta} / b_{s, \varepsilon', \Delta'} = 0$ où $s \rightarrow \infty$ signifie
limite selon le filtre des complémentaires des parties finies de Σ .

4) Soient $N \geq 0$, $E_N \subset K[T]$ le sous-espace des polynômes de degré total au plus N . Alors $\mathfrak{B}(\varepsilon, \Delta, g) \cap E_N$ est une base de E_N .

Démonstration. - On a $g = g_0 + g_1 + \dots + g_d$ où g_i est la composante homogène de g de degré i . Soit \bar{g}_i l'image de g_i par la surjection canonique de $K^\circ[T]$ sur $\bar{K}[T]$, \bar{g}_i est un polynôme de degré i ou est nul, g_d est un polynôme homogène de degré d . Comme \bar{K} est infini il existe $(\beta_{ij}) \in \text{Gl}_n(\bar{K})$ tel que $g_d(\sum \beta_{1j} Z_j, \sum \beta_{2j} Z_j, \dots, \sum \beta_{nj} Z_j)$ soit homogène de la forme $u_0(Z_1, \dots, Z_{n-1}) + u_1(Z_1, \dots, Z_{n-1}) Z_n + \dots + u_{d-1}(Z_1, \dots, Z_{n-1}) Z_n^{d-1} + Z_n^d$. Soit $(b_{ij}) \in \text{Gl}_n(K^\circ)$ un relèvement de (β_{ij}) , il est alors clair que $g(\sum b_{1j} Z_j, \sum b_{2j} Z_j, \dots, \sum b_{nj} Z_j) = h(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ est de degré total d et régulier en Z_n de degré d . Ainsi

$$\mathfrak{B}(h, \pi, R) = \left\{ \left(\frac{Z_1}{R} \right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{Z_n}{R} \right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d} \right)^i, \left(\frac{Z_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{Z_n}{R} \right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g} \right)^j \left| \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d, \quad 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0, \quad j > 0 \end{array} \right. \right\}$$

est une base normale de $\mathcal{K}(D(h, \pi, R))$ pour une norme équivalente à

$$\| \cdot \|_{D(h, \pi, R)} \quad (\text{corollaire 1}).$$

Soit $(a_{ij}) \in \text{Gl}_n(K^\circ)$ la matrice inverse de (b_{ij}) alors $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\sum a_{1j} z_j, \sum a_{2j} z_j, \dots, \sum a_{nj} z_j)$ définit une bijection de $D(h, \pi, R)$ sur $D(g, \pi, R)$ et donc un isomorphisme isométrique de $\mathcal{K}(D(h, \pi, R))$ sur $\mathcal{K}(D(g, \pi, R))$. Ce qui montre que

$$\mathfrak{B}(\varepsilon, \Delta, g) = \left\{ \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d} \right)^i, \left(\frac{L_1}{R} \right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R} \right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g} \right)^j \left| \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d, \quad 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0, \quad j > 0 \end{array} \right. \right\}$$

est une base normale de $\mathcal{K}(D(g, \pi, R)) = F_{\varepsilon, \Delta, g}$ pour une norme équivalente à la norme de la convergence uniforme sur $D(\varepsilon, \Delta, g) = D(g, \pi, R)$.

Le reste du corollaire est immédiat.

Remarque. - La condition $\deg_{\text{total}} g = \deg_{\text{total}} \overline{g}$ du corollaire 2 n'est pas restrictive. Si $g \in K[T_1, T_2, \dots, T_n]$ avec $\|g\| = 1$ il existe $g' \in K[T]$ tel que $\|g - g'\| < 1$ et $\deg_{\text{total}} g' = \deg_{\text{total}} \overline{g'}$. On montre facilement que pour ε, Δ assez proches de 0 on a $D(\varepsilon, \Delta, g) = D(\varepsilon, \Delta, g')$ puisque $\|g - g'\| < 1$; ainsi $\mathcal{K}(D(\varepsilon, \Delta, g)) = \mathcal{K}(D(\varepsilon, \Delta, g'))$ et ainsi le corollaire 2 est applicable.

Bibliographie

- [1] FRESNEL Jean et van der PUT Marius, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser P. M. vol. 18, 1981.
- [2] GERRITZEN Lothar, Die Norm der gleichmässigen Konvergenz auf reduzierten k-affinoiden Algebren, Journal f. d. r. u. a. math. Bd 231 (1968), p. 114-120.
- [3] BOSCH Siegfried, Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Manuscripta math. 1 (1969), p. 35-57.

Jean FRESNEL
Université de Bordeaux I
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
L. A. au C. N. R. S. n° 226
351, cours de la Libération
F 33405 TALENCE CEDEX