JEAN-YVES MÉRINDOL

Propriétés élémentaires des surfaces $K3$

Astérisque, tome 126 (1985), p. 45-57

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__45_0>

EXPOSÉ IV

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SURFACES K3

Jean - Yves MÉRINDOL

0. DÉFINITIONS ET INVARIANTS NUMÉRIQUES

Définition 0 . On appelle surface K3 une surface analytique complexe, compacte, lisse et connexe dont la première classe de Chern c_1 et le premier nombre de Betti b_1 sont nuls.

Puisque b_1 est pair, l'exposé précédent nous apprend que q $(= \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X))$ et $h^{1,0}$ $(= \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega_X^1))$ sont nuls. Mais alors la suite longue de cohomologie associée à la suite exponentielle :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

entraîne que $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ s'injecte dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. Ainsi le diviseur canonique de X est trivial. On a donc une définition équivalente des surfaces K3 (d'après l'exposé précédent, $q = 0$ entraîne $b_1 = 0$) :

Définition 0 bis . On appelle surface K3, une surface analytique complexe compacte (lisse et connexe) telle que

$$q = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{et} \quad K_X = 0 \quad (\text{i.e. } \Omega_X^2 = \mathcal{O}_X) \ .$$

On a alors $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega_X^2) = 1$. La dualité de Serre et la formule de Nœther nous conduisent au tableau suivant pour les entiers $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X,\Omega_X^p)$:

$p \backslash q$	0	1	2
0	1	0	1
1	0	20	0
2	1	0	1

La caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de X est 24.
La formule d'Hirzebruch indique que la signature du cup-produit sur $H^2(X,\mathbb{R})$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $b_2 = 22$) est $(3,19)$. Enfin la dimension de Kodaira est évidemment 0.(Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $P_m = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,(\Omega_X^2)^{\otimes m}) = 1$.)

1. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE ENTIÈRE DES SURFACES K3

1.1 Proposition . $H_1(X,\mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration : On sait déjà que $H_1(X,\mathbb{R})$ est nul. Supposons que $H_1(X,\mathbb{Z})$ ait un élément de torsion d'ordre n. On aurait alors un revêtement cyclique non ramifié $\pi : \tilde{X} \to X$. En utilisant les cartes analytiques sur X, on munit $\tilde{X}$ d'une structure analytique. La surface $\tilde{X}$ est lisse et compacte. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré topologique $\chi_{top}(\tilde{X})$ vaut n fois celle de X. Soit ω une 2-forme holomorphe partout non nulle sur X. Alors $\pi^*\omega$ est encore une 2-forme holomorphe partout non nulle sur $\tilde{X}$. Donc $K_{\tilde{X}} = 0$ et la formule de Nœther montre que :

$$12(h^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) + h^0(K_{\tilde{X}})) = 24n$$

c'est-à-dire $2 - h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 2n$ et $n \leq 1$. □

1.2 Corollaire . On a $H^1(X,\mathbb{Z}) = H_1(X,\mathbb{Z}) = H^3(X,\mathbb{Z}) = H_3(X,\mathbb{Z}) = 0$, et $H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq H_2(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 22.

Démonstration : On sait que $H^1(X,\mathbb{Z}) = H_1(X,\mathbb{Z}) = 0$. La dualité de Poincaré donne les résultats similaires sur H^3 et H_3. De plus la formule des coefficients universels ([7], Ch.5, Sec.5, Théorème 3 et corollaire 4) montre que la partie de torsion de $H^2(X,\mathbb{Z})$ est isomorphe à la partie de torsion de $H_1(X,\mathbb{Z})$. L'isomorphisme entre $H^2(X,\mathbb{Z})$ et $H_2(X,\mathbb{Z})$ est donné par la dualité de Poincaré. □

1.3 Le cup-produit sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ définit une forme quadratique notée $\langle\ ,\ \rangle$ sur ce $\mathbb{Z}$-module libre qui, d'après Poincaré, est unimodulaire. On connaît toutes les formes quadratiques unimodulaires indéfinies (i.e. non définies positives ou négatives), voir par exemple ([6], Chap. 5, 2.2, Théorèmes 4 et 5).

1.3.1 Proposition . $\langle\ ,\ \rangle$ est de type II, autrement dit, $\langle x,x\rangle$ est pair pour tout $x \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

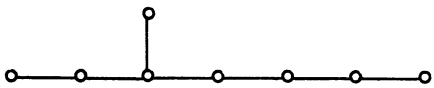
Nous renvoyons à ([1], page 213, Chap. IX, § 3) pour la démonstration de ce résultat de topologie (voir [4] pour tout le vocabulaire employé) qui est basé sur la formule de Wu :

Lemme . Soit M une variété différentielle réelle de dimension 4 telle que $H^1(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$. Alors le cup-produit sur $H^2(M,\mathbb{Z})$ est pair si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney de M est nulle.

La classe totale de Stiefel-Whitney d'un fibré vectoriel réel sous-jacent à un fibré vectoriel complexe est la réduction modulo 2 de la classe totale de Chern de ce fibré. Donc dans le cas des surfaces K3 : $w_2 = c_1 \pmod{2} = 0$ (et même $w_4 = c_2 \pmod{2} = 0$). Puisque $H^1(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, on est dans les hypothèses du lemme. □

En utilisant [6] on a alors :

1.3.2 Corollaire . $\langle\ ,\ \rangle = 3H \oplus 2E_8$ où H est la forme hyperbolique de rang 2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et E_8 la forme définie négative de rang 8 associée au diagramme de Dynkin :



Rappel : Cette forme E_8 est définie en considérant que chaque sommet i du graphe représente un élément e_i de la base canonique de $\mathbb{Z}^8$ et que :

$$E_8(e_i,e_i) = -2$$

$E_8(e_i,e_j)$ = nombre de traits reliant i et j dans le graphe.

2. DÉCOMPOSITION DE HODGE

2.1 Soit ω un générateur de $H^0(X,\Omega_X^2)$. On sait (voir l'appendice A de l'exposé III) que $H^2(X,\mathbb{C})$ admet une décomposition de Hodge :

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{0,2} \oplus H^{1,1} \oplus H^{2,0}$$
$$\simeq H^0(X,\Omega_X^2) \oplus H^1(X,\Omega_X^1) \oplus H^2(X,\mathcal{O}_X) \quad .$$

2.2 Théorème de l'index de Hodge sur X . La restriction de la forme $< , >$ à $H^{1,1} \cap H^2(X,\mathbb{R})$ est de signature (1,19).

Démonstration : Soient α et β les parties réelles et imaginaires de ω, de sorte que

$$H^2(X,\mathbb{R}) = [H^{1,1} \cap H^2(X,\mathbb{R})] \oplus \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta \quad .$$

Un calcul immédiat donne $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = \langle\beta,\beta\rangle = \frac{1}{2}\langle\omega,\bar{\omega}\rangle > 0 \quad .$$

On sait que la signature de $< , >$ sur $H^2(X,\mathbb{R})$ est (3,19) d'où le résultat. □

2.3 Théorème des classes (1-1) de Lefschetz . Soit $c \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) c est la classe de Chern d'un fibré en droites sur X ;

(ii) $c \in H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$;

(iii) $\langle c,\omega\rangle = 0$.

Démonstration : De la suite exacte de l'exponentielle, on tire une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^2(X,\mathcal{O}_X) \quad .$$

Pour que c soit la classe de Chern d'un fibré en droites sur X il faut et il suffit que $i(c) = 0$. L'inclusion $0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}_X$ étend i à tout $H^2(X,\mathbb{C})$. Il suffit pour montrer (2.3) de prouver que la surjection de $H^2(X,\mathbb{C})$ sur $H^{0,2}$ est i, ce qui est fait dans [2], page 163 . □

3. COURBES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

On renvoie à ([2], pages 132-139) pour toutes les définitions de base sur les courbes, les diviseurs et le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ associé à une classe d'équivalence linéaire de diviseurs $|D|$. Si L et L' (resp. D et D') sont deux faisceaux inversibles sur X (resp. deux diviseurs), on écrira parfois $(L . L')$ (resp. $(D . D')$) au lieu de $\langle c_1(L), c_1(L')\rangle$ (resp. $\langle c_1(\mathcal{O}_X(D)), c_1(\mathcal{O}_X(D'))\rangle$). Notons que $(D . D')$ n'est autre que le nombre d'intersection des diviseurs D et D'.

3.1 Si L est un faisceau inversible effectif, c'est-à-dire si il existe une courbe C (qui peut être non irréductible et non réduite) sur X telle que $L = \mathcal{O}_X(C)$, on notera B_L (ou B_C) l'ensemble des points de base associés à L ($B_L = \{x \in X \mid \forall\, s \in H^0(X,L) ; s(x) = 0\}$) et φ_L (ou φ_C) l'application holomorphe de $X - B_L$ dans $\mathbb{P}^*(H^0(X,L))$ définie par : $x \in X - B_L \mapsto \varphi_L(x) = \{s \in H^0(X,L) \mid s(x) = 0\}$.

3.2 Rappelons la formule d'adjonction ([2], pages 145-147) : si M est une sous-variété lisse de dimension n-1 d'une variété lisse N de dimension n, alors $\Omega_M^{n-1} = \mathcal{O}_N(M) \otimes \Omega^n_{N|M}$. En particulier si X est une surface K3 et C une courbe lisse et irréductible sur X, on a $\Omega^1_C = \mathcal{O}_C(C) \otimes \Omega^2_X = \mathcal{O}_C(C)$ et en comparant les degrés de ces faisceaux inversibles sur C, $2g(C) - 2 = (C . C)$.

Nous admettrons que ces résultats s'étendent aux courbes irréductibles réduites singulières de la façon suivante :

3.3 <u>Formule d'adjonction</u> : Soit C une courbe réduite et irréductible plongée dans une surface lisse Y. Soit $p_a(C) = h^1(C,\mathcal{O}_C)$. Alors $\langle c_1(C), c_1(C) + c_1(\Omega^2_Y)\rangle = 2p_a(C) - 2$. Cet entier $p_a(C)$ (que l'on appelle le genre arithmétique de C) est strictement supérieur (resp. égal) au genre géométrique de C, c'est-à-dire au genre de la normalisée de C, si C est singulière (resp. lisse).

<u>Remarque</u> : Signalons pour les lecteurs au courant de la dualité sur les courbes singulières que le faisceau dualisant ω_C de C est localement libre et donné à nouveau par :

$\omega_C = \mathcal{O}_C(C) \otimes \Omega_Y^2$ et $p_a(C) = h^0(C, \omega_C)$.

3.4 Théorème . Soit C une courbe irréductible réduite sur une surface K3 . On est dans l'un des cas suivants :

(i) $(C \cdot C) = -2$, C est une courbe rationnelle lisse et $h^0(\mathcal{O}_X(C)) = 1$;

(ii) $(C \cdot C) = 0$, C est une courbe de genre arithmétique 1, $h^0(\mathcal{O}_X(C)) = 2$ et X est une surface elliptique ;

(iii) $(C \cdot C) \geq 2$, C est une courbe de genre arithmétique $\frac{1}{2}(C \cdot C) + 1$, $h^0(\mathcal{O}_X(C)) = p_a(C) + 1$ et X est algébrique.

Démonstration : On sait déjà que $(C \cdot C) = 2p_a(C) - 2 \geq -2$. De la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & \omega_C & & \end{array}$$

on tire :

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{O}_X(C)) & \longrightarrow & H^0(C,\mathcal{O}_C(C)) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) \\ & & & & \| & & \| \\ & & & & H^0(C,\omega_C) & & 0 \end{array}$$

et donc $h^0(\mathcal{O}_X(C)) = h^0(C,\omega_C) + 1 = p_a(C) + 1$.

Enfin, dans le cas (ii), ω_C est trivial et φ_C n'a pas de points de base. Le morphisme $\varphi_C : X \to \mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{O}_X(C)) = \mathbb{P}_1$ est le morphisme de fibre générique une courbe elliptique lisse qui donne à X la structure de surface elliptique.

Dans le cas (iii), puisque $C^2 > 0$, X est,d'après un résultat de Kodaira (basé sur le théorème de Riemann-Roch) une surface algébrique projective. □

3.5 Nous admettons les résultats suivants qui se trouvent dans [2], pages 246-247 :

Soit C une courbe irréductible et réduite de genre arithmétique ≥ 2 , dont le faisceau dualisant est inversible.

(3.5.1) Le faisceau dualisant ω_C est sans point de base.

(3.5.2) Si C est lisse (de sorte que ω_C est le fibré canonique $\mathcal{O}_C(K)$) de genre g et hyperelliptique (c'est-à-dire s'il existe un revêtement double ramifié en 2g + 2 points $C \to \mathbb{P}_1$), $\varphi_K(C)$ est une courbe rationnelle lisse de degré g-1 dans $\mathbb{P}^{g-1}$ (ces courbes sont traditionnellement appelées courbes rationnelles normales) et $\varphi_K : C \to \varphi_K(C)$ est un revêtement double.

(3.5.3) Si C est lisse et non hyperelliptique, $\varphi_K(C)$ est une courbe lisse de degré 2g-2 dans $\mathbb{P}^{g-1}$ (traditionnellement appelée courbe canonique) et $\varphi_K : C \to \varphi_K(C)$ est un isomorphisme.

(3.5.4) Si C est lisse de genre ≥ 3 (resp. 2), φ_{2K} (resp. φ_{3K}) est un plongement de C dans l'espace projectif correspondant.

Remarque . Dans [2] on ne prouve (3.5.1) que dans le cas où C est lisse et on ne prouve pas (3.5.4). Pour (3.5.1), la preuve de [2] s'étend au cas C singulier en admettant que le théorème de Riemann-Roch ([2], pages 245-246) est vrai sur les courbes singulières en remplaçant le genre géométrique par le genre arithmétique et Ω^1_C par ω_C. On peut démontrer très facilement (3.5.4) en utilisant à nouveau le théorème de Riemann-Roch sur C.

3.6 Corollaire . Soit C une courbe irréductible et réduite sur une surface K3, de genre arithmétique $p_a \geq 2$. Alors φ_C n'a pas de points de base et :

a) si $p_a = 2$, $\varphi_C : X \to \mathbb{P}_2$ est un morphisme de degré 2 ramifié sur une sextique (pas nécessairement lisse) de $\mathbb{P}_2$.

b) Si $p_a \geq 3$, alors

b$_1$) ou bien φ est un morphisme birationnel sur une surface (pas nécessairement lisse) de degré $2p_a - 2$ dans $\mathbb{P}^{p_a}$. Alors les courbes lisses de $|C|$ ne sont pas hyperelliptiques ;

b$_2$) ou bien φ_C est un morphisme génériquement de degré 2 sur une surface (pas nécessairement lisse) de degré $p_a - 1$ dans $\mathbb{P}^{p_a}$. Cette surface est rationnelle. Les courbes lisses de $|C|$ sont hyperelliptiques.

c) Si $p_a \geq 3$, [resp. $p_a = 2$], φ_{2C} [resp. φ_{3C}] est un morphisme birationnel sur une surface -pas nécessairement lisse- de degré $4(2p_a - 2)$ dans $\mathbb{P}^{4p_a-3}$ [resp. $9(2p_a - 2)$ dans $\mathbb{P}^{9p_a-8}$].

Démonstration : D'après la suite exacte (3.4.1), les points de base de $\mathcal{O}_X(C)$ sont aussi ceux (sur C) de ω_C. D'après (3.5.1), il n'y en a pas.

Le théorème de Bertini ([2], pages 137 et 536) montre qu'il existe une courbe lisse irréductible D dans $|C|$.

a) Si $p_a = 2$, cette courbe étant de genre 2 est hyperelliptique, donc revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en 6 points. On sait que $h^0(X, \mathcal{O}_X(C)) = 3$. Ceci montre a).

b) On suppose que D est de genre supérieur ou égal à 3.

b_1) S'il existe une courbe lisse D non hyperelliptique dans $|C|$, $\varphi_{C|D}$ est un isomorphisme. Si D' est une autre courbe lisse de $|C|$, pour tout point $a \in D \cap D'$, la fibre schématique de $\varphi_C(a)$ est a. Ainsi D' n'est pas hyperelliptique. La surface $\varphi_C(X)$ est une surface de degré $2p_a - 2$ dans $\mathbb{P}^{p_a}$ qui est lisse en codimension 1.

b_2) Si toutes les courbes lisses de $|C|$ sont hyperelliptiques, φ_C est génériquement de degré 2 sur une surface de degré $p_a - 1$ dans $\mathbb{P}^{p_a}$. De telles surfaces sont rationnelles. En effet un pinceau générique d'hyperplans découpent sur cette surface des courbes (rationnelles quand elles sont irréductibles) de degré $p_a - 1$ dans $\mathbb{P}^{p_a - 1}$.

c) Il suffit d'appliquer (3.5.4) pour avoir ces valeurs numériques.

3.7 On peut plus précisément étudier ces surfaces $\varphi_C(X)$ et par exemple établir que ces surfaces sont normales et ont comme seules singularités des points doubles rationnels [3]. Pour les revêtements doubles, cf. [5].

4. LE CÔNE POSITIF

4.1 Puisque la signature de la restriction de $<\ ,\ >$ à $H^{1,1} \cap H^2(X, \mathbb{R})$ est (1,19), le cône C_X formé des éléments x de $H^{1,1} \cap H^2(X, \mathbb{R})$ tels que $<x,x> > 0$ a deux composantes connexes. Chacune de ces composantes est convexe.

Proposition . Si X est elliptique ou kählérienne, il existe une composante C_X^+ de C_X qui soit telle que

(i) C_X^+ contienne les courbes irréductibles de genre arithmétique supérieur ou égal à 2 (s'il en existe) et les classes de Kähler de X (si X est kählérienne);

(ii) l'adhérence $\overline{C_X^+}$ contienne les courbes irréductibles de genre arithmétique un (s'il en existe).

Démonstration : L'ensemble des classes de Kähler sur une surface X est toujours un cône convexe dans $H^{1,1} \cap H^2(X, \mathbb{R})$. En effet, si ω_0 et ω_1 sont deux formes de Kähler, $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ est encore une forme de Kähler. D'autre part, si ω est une forme de Kähler,

$$\langle[\omega],[\omega]\rangle = \int_X \omega\wedge\omega > 0 \quad \text{et} \quad [\omega]\in C_X \quad .$$

Ce cône convexe (qu'on appelle cône de Kähler) est donc inclus dans une des deux composantes de C_X.

Considérons la transformation par polaires réciproques qui à y non nul dans $H^{1,1}\cap H^2(X,\mathbb{R})$ associe l'hyperplan H_y orthogonal à y pour $\langle\ ,\ \rangle$. La trace du bord du cône C_X dans l'espace projectif réel $\mathbb{P}(H^{1,1}\cap H^2(X,\mathbb{R}))$ est une sphère (de dimension 18). Ainsi si y est dans l'intérieur de C_X, l'hyperplan H_y ne coupe C_X qu'en 0 ; alors que si y non nul est sur le bord de C_X, H_y ne recoupe C_X qu'en la droite $\mathbb{R}y$. En particulier deux éléments y et z de C_X sont dans la même composante de C_X si et seulement si $\langle y,z\rangle > 0$; deux éléments de $\overline{C_X}$ dont le produit est nul sont proportionnels.

Soient E_0, E_1 (respectivement D_0, D_1) deux courbes irréductibles distinctes de genre arithmétique 1 (resp. ≥ 2), si de telles courbes existent. Les inégalités suivantes sont claires :

$$(D_0 \cdot D_1) \geq 0 \quad ; \quad (E_0 \cdot E_1) \geq 0 \quad ; \quad D_i^2 > 0 \quad ; \quad E_i^2 = 0$$

$$\langle E_i,[\omega_j]\rangle = \int_{E_i} \omega_j > 0 \quad \text{et} \quad \langle D_i,[\omega_j]\rangle = \int_{D_i} \omega_j > 0 \quad .$$

Si $(E_0 \cdot E_1) = 0$, il existe un réel a avec $E_0 = aE_1$ (voir ci-dessus) mais puisque E_0 et E_1 sont effectifs, a est positif et E_0 et E_1 sont encore dans la même composante de C_X. La proposition découle des inégalités ci-dessus et de la discussion précédente. □

4.2 <u>Théorème</u> . <u>Soit</u> L <u>un fibré en droites sur</u> X <u>tel que</u> $L^2 > 0$. <u>Alors</u>, X <u>est algébrique et on peut distinguer un cône positif</u> C_X^+. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) L <u>est ample</u> ;

(ii) $L \in C_X^+$ <u>et pour toute courbe rationnelle lisse</u> C, <u>on a</u> $(L \cdot C) > 0$.

<u>Démonstration</u> : Le fait que X soit alors algébrique est dû à Kodaira (voir l'Exposé III de Demazure). Il est évident que (i) $\Rightarrow$ (ii). Nous allons utiliser le critère d'amplitude de Nakaï-Moishezon : un faisceau inversible M sur une surface algébrique lisse Y est ample si et seulement si $M^2 > 0$ et pour toute courbe irréductible C sur Y, $(C \cdot M) > 0$.

Soit C une courbe irréductible sur X. Si C est une courbe rationnelle lisse, d'après (ii) $(C.L)>0$. Si C est une courbe de genre arithmétique supérieur ou égal à 1, $C\in C_X^+$. Mais $L\in C_X$ et donc $(C.L)>0$. □

5. EXEMPLES

5.1 Plan double. Soit S une sextique lisse dans $\mathbb{P}^2$. C'est une courbe de genre $\frac{5.4}{2}=10$. Soit X le revêtement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de S. On note $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ ce revêtement et $\tilde{S}\subset X$ le lieu critique de π.

Lemme . $\Omega_X^2 = \pi^*(\Omega^2_{\mathbb{P}^2})\otimes \mathcal{O}_X(\tilde{S})$.

Démonstration : Il est clair que ces faisceaux sont égaux en dehors de $\tilde{S}$. Soit $a\in\tilde{S}$, dans une carte convenable autour de a, π est donné par $(x,y)\mapsto(x^2,y)=(u,v)$. L'équation locale de $\tilde{S}$ est $x=0$, et on a

$$\pi^*(du\wedge dv) = d(x^2)\wedge dy = 2x\ dx\wedge dy \quad .$$

Le lemme est ainsi prouvé.□

Proposition : X est une surface K3.

Démonstration . Grâce au lemme, $(\Omega_X^2)^{\otimes 2} = \pi^*((\Omega^2_{\mathbb{P}^2})^{\otimes 2})\otimes\mathcal{O}_X(2\tilde{S})$. Puisque $\Omega^2_{\mathbb{P}^2}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)$, $(\Omega_X^2)^{\otimes 2}=\mathcal{O}_X$. Si Ω_X^2 n'est pas trivial, $H^0(X,\Omega_X^2)=0$. Mais $\chi_{top}(X)=2\chi_{top}(\mathbb{P}^2)-\chi_{top}(S)=2.3-(2-20)=24$ et d'après la formule de Nœther :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 2 = 1-h^1(X,\mathcal{O}_X) \quad ,$$

de qui est absurde.
Ainsi Ω_X^2 est trivial et la formule de Nœther montre que $h^1(X,\mathcal{O}_X)=0$. □

5.2 Intersections complètes. On note $V_{d_1,\dots,d_p}=X$ une surface lisse de $\mathbb{P}^{p+2}$ intersection complète de p hypersurfaces de degré $d_1,\dots,d_p$ $(d_i>1)$. La formule d'adjonction appliquée à plusieurs reprises montre que $\Omega_X^2=\mathcal{O}_X((d_1+\dots+d_p)-(p+3))$. Une condition nécessaire pour que X soit une K3 est donc $d_1+\dots+d_p=p+3$.

Les seules solutions sont : $p = 1 \quad d_1 = 4$

$p = 2 \quad d_1 = 2 \quad d_2 = 3$

$p = 3 \quad d_1 = d_2 = d_3 = 2$.

Inversement si X est une telle intersection complète, X est une surface K3. On s'appuie, pour démontrer que $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$, sur le résultat plus général suivant :

<u>Lemme</u> . <u>Soit</u> M <u>une intersection complète de dimension</u> n. <u>Alors pour tout</u> $p \in \mathbb{Z}$, $H^i(M,\mathcal{O}_M(p)) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq i \leq n-1$.

<u>Preuve</u> : On choisit une variété N intersection complète de dimension n + 1 (ou $\mathbb{P}^{n+1}$) qui découvre M sur une hypersurface de degré m.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_N(-m+p) \longrightarrow \mathcal{O}_N(p) \longrightarrow \mathcal{O}_M(p) \longrightarrow 0 \quad .$$

La suite exacte de cohomologie donne par récurrence le résultat. □

5.3 <u>Surfaces de Kummer</u>. Soit A un tore complexe et $\sigma : A \to A$ l'involution qui envoie a sur -a. Les points fixes de σ sont isolés et au nombre de 16 (les 16 points d'ordre 2 de A). Localement autour de ces points, dans une carte bien choisie, σ s'écrit $(\alpha,\beta) \mapsto (-\alpha,-\beta)$ et les invariants sont α^2, $\alpha\beta$, β^2. Le quotient A/σ est une surface analytique ayant 16 points doubles ordinaires (car $\mathbb{C}[\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[u,v,w]/(uw - v^2)$). Eclatons ces 16 points dans A ; on obtient une surface $\tilde{A}$ et une involution $\tilde{\sigma}$ sur $\tilde{A}$ (extension de σ) qui admet 16 courbes fixes. Localement, dans une carte bien choisie de $\tilde{A}$, en un point sur une de ces courbes l'éclatement $\tilde{A} \xrightarrow{\varepsilon} A$ s'écrit $(x,y) \mapsto (xy,y)$ et $\tilde{\sigma}$ envoie (x,y) sur $(x,-y)$. Le quotient $X = \tilde{A}/\tilde{\sigma}$ est donc lisse et dans la carte précédente le morphisme $\tilde{A} \to X$ est donné par $(x,y) \mapsto (x,y^2)$. La surface X est une résolution de A/σ et contient au moins 16 courbes de carré -2.

<u>Proposition</u> . X <u>est une surface</u> K3.

<u>Démonstration</u> : A est le quotient de $\mathbb{C}^2$ par un réseau Γ. Choisissons des coordonnées α et β sur $\mathbb{C}^2$. La 2-forme $d\alpha \wedge d\beta$ est invariante par Γ et donc définit une 2-forme holomorphe sur A ne s'annulant en aucun point. Alors $\varepsilon^*(d\alpha \wedge d\beta)$ est une 2-forme sur $\tilde{A}$ qui ne s'annule pas sauf éventuellement sur les 16 courbes introduites par l'éclatement. Mais localement en ces courbes, dans les cartes introduites plus haut :

$$(*) \qquad \varepsilon^*(d\alpha \wedge d\beta) = d(xy) \wedge dy = y\, dx \wedge dy = \frac{1}{2}\, dx \wedge (dy^2) \quad .$$

Cette 2-forme est donc holomorphe sur $\tilde{A}$ et invariante par $\tilde{\sigma}$ et définit donc une 2-forme sur X qui ne s'annule certainement pas en dehors du lieu critique de $\tilde{A} \to X$. Le calcul (*) montre qu'elle ne s'annule nulle part. Ainsi le fibré Ω_X^2 est trivial.

La formule de Nœther montre que $\chi_{top}(X) = 12\ \chi(\mathcal{O}_X)$. Puisque $\tilde{A}$ est un revêtement double de X ramifié le long de 16 courbes rationnelles :

$$\chi_{top}(\tilde{A}) = 2\chi_{top}(X) - 16\chi_{top}(\mathbb{P}^1) = 2\chi_{top}(X) - 32 \quad .$$

Par éclatement d'un point, la caractéristique topologique d'Euler-Poincaré augmente de un et donc $\chi_{top}(\tilde{A}) = \chi_{top}(A) + 16 = 16$ (A comme tout tore complexe est topologiquement un produit de cercles). Ainsi

$$\chi_{top}(X) = 24$$

et

$$2 = \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) = 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + 1 \quad .$$

Donc X est bien une surface K3.

5.4 Remarques heuristiques sur le nombre de modules.

5.4.1 Une sextique plane dépend de 27 paramètres (les coefficients de son équation homogène) et la dimension de $PG\ell_2$ est 8. Il faut donc "19 paramètres" pour avoir une surface K3 du type plan double.

5.4.2 Les quartiques de $\mathbb{P}^3$ dépendent de 34 paramètres. Les surfaces K3 qui se plongent comme surface de degré 4 dans $\mathbb{P}^3$ dépendent encore de 19 paramètres (puisque la dimension de $PG\ell_3$ est 15).

Les quadriques de $\mathbb{P}^4$ dépendent de 14 paramètres, les cubiques de $\mathbb{P}^4$ de 34, desquels il faut enlever les 5 paramètres correspondant aux cubiques contenant la quadrique choisie. Les surfaces K3 qui sont intersections complètes de type (2,3) dans $\mathbb{P}^4$ dépendent donc de 14 + 34 - 5 - 24 = 19 modules.

On montre de même que les intersections complètes (2,2,2) dépendent de 19 paramètres.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.R. Chafarevitch et al. : Algebraic surfaces, Proc. of the Steklov Institute, 75 (1965).

[2] P. Griffiths et J. Harris : Principles of algebraic geometry, Wiley, New York (1978).

[3] A. Mayer : Families of K3 surfaces, Nagoya Math. J. 48 (1972),1-17.

[4] J. Milnor et J.D. Stasheff : Characteristic classes, Ann. Math. Studies 76, Princeton University Press,(1974).

[5] M. Reid : Hyperelliptic linear systems on a K3 surface, Journal London Math. Soc. 13 (1976) 427-437.

[6] J.P. Serre : Cours d'arithmétique, P. U. F., Paris (1970).

[7] E.H. Spanier : Algebraic topology, McGraw Hill, New York (1966).

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Boulevard Lavoisier
49045 ANGERS Cedex