MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

Conjecture de Shafarevich pour les corps de fonctions sur $\mathbb{Q}$ [Appendice à l'exposé IX]

Astérisque, tome 127 (1985), p. 256-259

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__256_0>

Appendice à l'exposé IX

CONJECTURE DE SHAFAREVICH POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR $\mathbb{Q}$

M. MARTIN-DESCHAMPS

On se propose d'étendre au cas d'un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$ la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres, c'est-à-dire de montrer le résultat suivant :

<u>*THÉORÈME*</u> *: Soient* L *une extension de type fini de* $\mathbb{Q}$, g *un entier positif, et* X *un schéma normal de type fini sur* Spec $\mathbb{Z}$, *de corps de fractions* L . *L'ensemble des classes de* L*-isomorphismes de* L*-variétés abéliennes de dimension* g , *principalement polarisées, qui ont bonne réduction en tout point de codimension* 1 *de* X, *est fini.*

<u>Démonstration</u> : Elle se fait par récurrence sur l'entier d, degré de transcendance de L sur $\mathbb{Q}$.

- $d = 0$: c'est la conjecture de Shafarevich pour un corps de nombres
- $d \neq 0$: quitte à restreindre X, on peut supposer que c'est un schéma affine $X = \operatorname{Spec} R$, où R est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini : $R = \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_r]$.

Pour tout $i = 1,\dots,r$:

$$0 \leq \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1,\dots,\alpha_{i+1}] - \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1,\dots,\alpha_i] \leq 1$$

donc il existe $s \leq r-1$ tel que l'anneau $R' = \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_s]$ définisse un schéma X' de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique de la projection canonique $f : X \longrightarrow X'$ induite par l'homomorphisme $\mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_s] \subset \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_r]$, soit une courbe.

Soit Y un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de X, qui domine X' :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[j]{} & X \\ & & \downarrow f \\ & & X' \end{array}$$

et Y^o l'ouvert des points normaux de Y, qui est donc un schéma normal de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, dont le corps de fractions M est de degré de transcendance d-1 sur K.

LEMME 1.- *Soit* A *une* L-*variété abélienne qui a bonne réduction aux points de codimension* 1 *de* Y, *et* B *la* M-*variété abélienne qu'elle définit par restriction. Alors* B *a bonne réduction en tout point de codimension* 1 *de* X *qui est un point régulier de* X.

Démonstration : La variété abélienne A se prolonge en un schéma abélien $\mathcal{A}$ au-dessus d'un ouvert U de X contenant tous les points de codimension 1. Soit ℓ un nombre premier. Par pureté $\mathcal{A}_{\ell^m}$ qui est un revêtement étale de $U \otimes \mathbb{Z}[1/\ell]$ se prolonge en tous les points réguliers de X dont la caractéristique résiduelle est première à ℓ, donc le module de Tate $T_\ell(\mathcal{A})$ se prolonge en un schéma $\mathcal{C}_\ell$ au-dessus d'un voisinage U_ℓ de tous ces points.

Soit y un point de codimension 1 de Y, qui est un point de codimension 2 régulier de X. Soit ℓ un entier premier à la caractéristique résiduelle de y. D'après de ce qui précède, y apartient à U_ℓ et on a des isomorphismes :

$$T_\ell(B) \approx T_\ell(\mathcal{A}) \times_U \operatorname{Spec} M \approx \mathcal{C}_\ell \times_{U_\ell} \operatorname{Spec} M$$

ce qui prouve que $T_\ell(B)$ se prolonge sur l'ouvert $U_\ell \cap Y^o$ en un schéma pro-étale $\mathcal{C}_\ell|_{U_\ell \cap Y^o}$. D'après le critère de Serre - Tate, appliqué à l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{Y,y}$, on en déduit que B a bonne réduction en y.

Fin de la démonstration du théorème

Le lieu singulier de X est de codimension au moins 2, donc il existe un ouvert non vide Y^1 de Y^o dont tous les points de codimension 1 sont des points réguliers de X.

L'hypothèse de récurrence s'applique à Y^1 et il suffit par prouver le théorème de montrer que l'ensemble des classes de L-isomorphismes de L-variétés abéliennes A, principalement polarisées, ayant bonne réduction aux points de codimension 1 de X, dont les restrictions au point Spec M sont isomorphes à une M-variété abélienne donnée B, est fini.

Soit S la fibre générique de $f : X \longrightarrow X'$. Les points fermés de S sont des points de codimension 1 de X, donc une variété abélienne A ayant les propriétés annoncées se prolonge en un S-schéma abélien, et on est ramené à montrer le résultat suivant :

<u>LEMME 2.</u>- *Soit* S *un schéma de type fini sur un corps* k *de caractéristique* 0 s *un point fermé de* S, A_o *une* k(s)*-variété abélienne. L'ensemble* $\mathcal{E}$ *des classes d'isomorphismes de* S*-schéma abéliens de dimension* g , *principalement polarisés, munis d'un isomorphisme* $\lambda : \mathcal{A} \times_S \operatorname{Spec} k(s) \approx A_o$ *est fini.*

<u>Démonstration</u> : Des arguments standard (utilisant le fait que $\pi_1(S \otimes_k \mathbb{C})$ est de type fini) permettent de mettre sur tous ces schémas abéliens une structure de niveau. D'après les résultats de [F], la famille considérée est une famille limitée : il existe un k-schéma de type fini T , un schéma abélien $\mathcal{A}_T$ sur $S \times T$ et pour tout élément A de un point rationnel t de T tel que A soit isomorphe (en tant que S-schéma abélien principalement polarisé) à la fibre de $\mathcal{A}_T$ en t :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_T \arrow[d] \\ S \times k(t) \arrow[r, hook] & S \times T \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{A}'_T = \mathcal{A}_T \times_S \operatorname{Spec} k(s)$. C'est une famille de k(s)-variétés abéliennes, principalement polarisées et munies d'une structure de niveau, paramétrisée par T. Il existe un plus grand sous-schéma fermé T' de T tel que $\mathcal{A}'_{T|T'}$ soit isomorphe à $A_o \times T'$. Soit T'' une composante irréductible de T' .

$$\begin{tikzcd} A_o \times T'' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{A}_{T}|_{T''} = \mathcal{A}_{T''} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k(s) \times T'' \arrow[r, hook] & S \times T'' \end{tikzcd}$$

Soit t un point rationnel de T'' et $A = \mathcal{A}_T \times_T \operatorname{Spec} k(t)$. Nous allons montrer que $\mathcal{A}_{T''}$ et $A \times T''$ sont isomorphes :

soient ℓ un nombre premier et n un entier. On obtient deux revêtements étales de $S \times T''$ en considérant les deux schémas ${}_{\ell^n}\mathcal{A}_{T''}$ et $({}_{\ell^n}A) \times T''$, qui sont isomorphes d'une part sur $\operatorname{Spec} k(s) \times T''$ et d'autre part sur $S \times \operatorname{Spec} k(t)$ (les deux isomorphismes coïncidant sur $\operatorname{Spec} k(s) \times k(t)$).

Or, comme nous sommes en caractéristique nulle, $\pi_1(S \times T'')$ s'identifie à $\pi_1(S) \times \pi_1(T'')$ par les homomorphismes naturels ; par suite les deux revêtements considérés sont isomorphes.
On en déduit un isomorphisme des modules de Tate $T_\ell(\mathcal{A}_{T''}) \approx T_\ell(A) \times T''$. Par construction, cet isomorphisme provient au point (s,t) d'un isomorphisme de variétés abéliennes. On conclut, d'après [G], qu'il provient d'un isomorphisme des $S \times T''$-schémas abéliens $\mathcal{A}_{T''}$ et $A \times T''$.

BIBLIOGRAPHIE

[F] G. FALTINGS.- *Arakelov Theorem for Abelian Varieties*. Inv. Math. 73 1983, pp.337-347.

[G] A. GROTHENDIECK.- *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*. Inv. Math. 2. 1966, pp. 59-78.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05