

Astérisque

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

La construction de Kodaira-Parshin

Astérisque, tome 127 (1985), p. 261-273

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__261_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Mireille MARTIN-DESCHAMPS

0.- INTRODUCTION

Le théorème 2 de l'exposé VIII montre que dans une classe d'isogénies de variétés abéliennes sur un corps de nombres, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. Dans l'exposé IX (Corollaire 2 du Théorème 1), on prouve que, sur un corps de nombres, l'ensemble des classes d'isogénies de variétés abéliennes de dimension g et mauvaise réduction données, est fini.

On déduit de ces deux résultats la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes :

THÉORÈME 0.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , g un entier au moins égal à 1. L'ensemble des classes de K -isomorphismes de variétés abéliennes de dimension g , ayant bonne réduction en-dehors de S , est fini.

Par le théorème de Torelli [1], on obtient la conjecture originale de Shafarevich:

THÉORÈME 0'.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , g un entier au moins égal à 1. L'ensemble des classes de K -isomorphismes de courbes propres et lisses sur K de genre g , ayant bonne réduction en dehors de S , est fini.

Deux constructions géométriques, l'une due à Kodaira, l'autre à Parshin, permettent d'en déduire la conjecture de Mordell :

"Une courbe C propre, lisse et géométriquement connexe, de genre g au moins égal à 2, sur un corps de nombres K , n'a qu'un nombre fini de points rationnels".

L'idée des deux constructions est essentiellement la même, à savoir associer à chaque point rationnel P d'une telle courbe C une courbe C_P de genre $\gamma - 1$ où γ est un entier ne dépendant que de g , au moins égal à 2 - montrer que ces courbes ont bonne réduction en-dehors d'un ensemble fini de places de K , indépendant de P , et que chaque classe d'isomorphismes d'une telle courbe C_P ne contient qu'un nombre fini de courbes $C_{P'}$, pour $P' \neq P$.

La construction de Kodaira est "uniforme en P ", c'est-à-dire qu'on obtient une famille algébrique de courbes, mais on est obligé de faire une extension (contrôlée) du corps de nombres. Nous ferons la construction de Parshin point par point, mais sans extension de corps. Chaque méthode a donc ses avantages et ses inconvénients, c'est pourquoi nous les développons toutes les deux ici.

Dans chaque cas, nous commencerons par faire la construction "générique" sur K - ou sur une extension finie de K - . Ensuite nous préciserons sur quel ouvert de l'anneau d'entiers on peut la prolonger.

1.- CONSTRUCTION DE KODAIRA [8]

PROPOSITION 1.- Soit K un corps de nombres, C une courbe propre et lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$. Il existe une extension finie L de K , un revêtement étale $\alpha: C_1 \rightarrow C \times_K L$, et une fibration non isotriviale $\pi: X \rightarrow C_1$ à fibres propres et lisses, géométriquement connexes, de genre $\gamma = 4g - 2$.

Remarque 1 : Rappelons [15] qu'un morphisme propre de L -schémas $X \rightarrow C_1$ à fibres géométriquement connexes est une fibration isotriviale s'il existe un morphisme fini $\tau: C_2 \rightarrow C_1$, une courbe F sur L , et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_{C_1} C_2 & \xrightarrow{\lambda} & F \times_L C_2 \\
 \downarrow q & & \downarrow q' \\
 & & C_2
 \end{array}$$

où λ est une application birationnelle, et q et q' sont les deux projections.

Remarque 2 : Si S est un ensemble fini de places de K , et n un entier fixé, le Théorème d'Hermite montre que l'ensemble des extensions K' de K , de degré $\leq n$, non ramifiées en-dehors de S , est fini, donc il existe une extension finie de K qui les contient toutes. Dans la démonstration qui suit, nous utiliserons souvent ce résultat, en laissant parfois au lecteur le soin de vérifier les hypothèses.

Démonstration de la proposition 1 : Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places divisibles par 2, tel que C ait bonne réduction en-dehors de S . Soit $J = \text{Pic}^0_{C/K}$ la jacobienne de C . Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que C a un point rationnel P , et que J a un point rationnel d'ordre 2. Il existe donc un revêtement étale connexe de degré 2 $v: A \rightarrow J$.

Soit $\varphi: C \rightarrow J$ le morphisme défini par $\varphi(Q) = Q - P$, et le diagramme obtenu par produit fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 C' = C \times_J A & \xrightarrow{\varphi'} & A \\
 \downarrow u & & \downarrow v \\
 C & \xrightarrow{\varphi} & J
 \end{array}$$

Puisque u est un revêtement étale de degré 2, C' est une courbe propre, lisse géométriquement connexe, de genre g' avec :

$$2g' - 2 = 2(2g - 2) .$$

La fibre $u^{-1}(P)$ est formée de points à valeur dans une extension de K de degré ≤ 2 , étale en-dehors de S , donc quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que $u^{-1}(P)$ est formée de deux points rationnels P' et P'' .

Soient $\Gamma = C' \times_C C'$, et Δ la diagonale du produit $C' \times C'$, qui sont deux diviseurs lisses de $C' \times C'$.

$$\Gamma = C' \times_C C' \longleftarrow C' \times C' \xrightarrow{p_2'} C' \\ \downarrow p_1' \\ C'$$

Sur $C' \times C'$ le faisceau $\mathcal{O}_{C' \times C'}(\Gamma - 2\Delta)$ est de degré 0 sur les fibres de p_2' , donc il existe un morphisme :

$$\psi' : C' \longrightarrow \text{Pic}^0 C'/K = J'$$

tel que $\mathcal{O}_{C' \times C'}(\Gamma - 2\Delta) \simeq (1 \times \psi')^* \mathcal{P}' \otimes p_2'^* L'$

où \mathcal{P}' est le faisceau de Poincaré sur $C' \times J'$ et L' un faisceau inversible sur C' .

En restreignant cette égalité à $p_1'^{-1}(P') = \{P'\} \times C'$ on obtient :

$$L' \simeq \mathcal{O}_{C'}(P'' - P') \otimes \psi'^*(\mathcal{P}'_{P'})^{-1}$$

où $\mathcal{P}'_{P'}$ est l'image réciproque de \mathcal{P}' par le plongement :

$$J' \xrightarrow{\simeq} \{P'\} \times J' \hookrightarrow C' \times J' .$$

Soit C_1 une composante connexe du produit fibré par C' de la multiplication par 2 dans J' , et Γ_1 l'image réciproque de Γ dans $C' \times C_1$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_1 & \hookrightarrow & C' \times C_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & J' \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times r & & \downarrow r & & \downarrow \times 2 \\ \Gamma & \hookrightarrow & C' \times C' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & J' \\ & & & \searrow \alpha & \downarrow u & & \\ & & & & C & & \end{array}$$

où r est fini étale, de degré divisant $2^{2g'}$, et C_1 est une courbe lisse de genre g_1 avec

$$2g_1 - 2 = \deg r (2g' - 2) \leq 2^{2g'} (2g' - 2)$$

alors :

$$\begin{aligned} (1 \times r)^* \mathcal{O}_{C' \times C'}(\Gamma - 2\Delta) &\simeq \mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1) \otimes (1 \times r)^* \mathcal{O}_{C' \times C'}(-2\Delta) \\ &\simeq (1 \times \psi_1)^* \mathcal{P}^2 \otimes (1 \times r)^* \mathcal{P}_2^* L' \end{aligned}$$

et : ou bien $\text{deg } r > 1$, alors $\text{deg } r$ est pair, et $\text{deg } r^* L'$ est pair
 ou bien $\text{deg } r = 1$, alors Ψ' est de degré pair
 et $L' \simeq \mathcal{O}_{C'}(\mathcal{P}'' - \mathcal{P}') \otimes \Psi'^*(\mathcal{O}_{\mathcal{P}'}^1)^{-1}$ est de degré pair.

Dans tous les cas, $r^* L'$ est un faisceau inversible sur C_1 de degré pair.

Notons $L_1 = r^* L'$, et $d_1 = \text{deg } L_1$.

Quitte à faire une extension finie de K , on peut supposer que C_1 à un point rationnel P_1 . Soit $\tau : K \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{C_1/K}^0 = J_1$ le point rationnel de J_1

correspondant au faisceau inversible de degré 0 : $L_1 \otimes \mathcal{O}_{C_1}(-d_1 P_1)$. Quitte à faire une extension finie de K , on peut supposer que l'image réciproque de ce point par la multiplication par 2 dans J_1 est encore un point rationnel ; donc on peut supposer que $\mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1)$ est un double, c'est-à-dire qu'il existe un faisceau inversible \mathcal{L} sur $C' \times C_1$ tel que $\mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1) \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}$.

Soit $\rho : X \longrightarrow C' \times C_1$ le revêtement de $C' \times C_1$ de degré 2, ramifié le long de Γ_1 , tel que $\rho_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{C' \times C_1} \oplus \mathcal{L}$

et soit $\pi : X \longrightarrow C_1$ obtenu en composant ρ avec la deuxième projection.

Puisque Γ_1 est étale sur C_1 , X est lisse sur C_1 . La fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ d'un point Q_1 de C_1 est un revêtement double de C' , ramifié le long de $\Gamma_1 \times_{C_1} k(Q_1) = u^{-1}(\alpha(Q_1))$, donc un revêtement de C ramifié exactement au point $\alpha(Q_1)$. C'est une courbe lisse de genre γ avec :

$$\begin{aligned} 2\gamma - 2 &= 2(2g' - 2) + \text{deg } \Gamma_1/C_1 \\ &= 4(2g - 2) + 2 \\ \gamma &= 4g - 2 \end{aligned}$$

Si les fibres géométriques de π sont isomorphes à une même courbe C_0 , il existe une infinité de morphismes dominants et séparables, distincts - puisque ramifiés en des points différents - de C_0 dans C , ce qui est impossible puisque g est ≥ 2 [12] . Donc la fibration π n'est pas isotriviale.

THÉORÈME 1. - *La conjecture de Shafarevich pour les courbes entraîne la conjecture de Mordell.*

Démonstration : Soit K un corps de nombres, C une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$. D'après ce qui précède, il existe une extension finie L de K , un revêtement étale $\alpha : C_1 \longrightarrow C \times_K L$, et

une fibration lisse et non isotriviale $\pi : X \longrightarrow C_1$ en courbes de genre $\gamma = 4g - 2$.

Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers de L . Il existe un ouvert B de $\text{Spec } \mathcal{O}$ tel que $C \times_K L$, C_1 et X (resp. α et π) se prolongent en des schémas V , V_1 et \mathcal{X} lisses sur B (resp. en des morphismes $\tilde{\alpha}$ étale et $\tilde{\pi}$ lisse).

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
 \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow \\
 C_1 & \longrightarrow & V_1 \\
 \alpha \downarrow & & \tilde{\alpha} \downarrow \\
 C \times_K L & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec } K & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Soit L' une extension finie de L , \mathcal{O}' l'anneau des entiers de L' , B' l'image réciproque de B dans $\text{Spec } \mathcal{O}'$, et S' le complémentaire de B' . Tout point Q_1 de $C_1(L')$ se prolonge en un B -morphisme : $B' \longrightarrow V_1$, et $\mathcal{X} \times_{V_1} B'$ est lisse sur B' , donc $\pi^{-1}(Q_1)$ a bonne réduction en-dehors de S' .

Si $C_1(L')$ est infini, puisque la fibration π n'est pas isotriviale, il existe une infinité de classes d'isomorphismes de L' -courbes de genre γ , ayant bonne réduction en-dehors de S' , ce qui contredit Shafarevich.

On conclut grâce au lemme :

LEMME 1.- Soit $\alpha : C_1 \longrightarrow C$ un morphisme de L -courbes, étale en dehors de S . Alors $C(L')$ est fini pour toute extension finie L' de L si et seulement si il en est de même de C_1 .

Démonstration : Soient d le degré de α et Q un point de $C(L')$. Son image réciproque dans C_1 est formée de points à valeur dans une extension de L' de degré au plus égal à d , et étale en-dehors de S . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles extensions, et si C_1 n'a qu'un nombre fini de points dans une extension finie L' de L , il n'y a qu'un nombre fini de points dans C_1 au-dessus de $C(L')$, donc $C(L')$ est fini.

Remarque 3 : Soit M_γ le module des courbes lisses de genre γ , A_γ le module des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension γ et $F : M_\gamma \longrightarrow A_\gamma$ le morphisme canonique [10]. La fibration π définit une application rationnelle $\varphi : C_1 \dots \longrightarrow M_\gamma$ à fibres finies. Si l'application rationnelle composée : $C_1 \dots \xrightarrow{\varphi} M_\gamma \xrightarrow{F} A_\gamma$ est constante, il en est de même de

l'application rationnelle obtenue en étendant les scalaires de K à \mathbb{C} , ce qui contredit le théorème de Torelli sur \mathbb{C} [1]. On peut donc, par un raisonnement analogue à celui du théorème, en utilisant seulement le théorème de Torelli "classique", déduire la conjecture de Mordell de la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes.

COROLLAIRE.- (Conjecture de Mordell pour les corps de fonctions sur \mathbb{Q}).

Soit K un corps de type fini sur \mathbb{Q} , C une courbe sur K de genre $g \geq 2$. Alors l'ensemble des points rationnels de C est fini.

Démonstration : Si la fibration n'est pas isotriviale sur $\overline{\mathbb{Q}}$, c'est "Mordell pour les corps de fonctions", qui a été démontré par Manin puis Grauert en caractéristique 0 [9,4], et par Samuel puis Szpiro en caractéristique positive [13,15].

Si la fibration est isotriviale sur $\overline{\mathbb{Q}}$, il existe une extension finie L de \mathbb{Q} , une courbe C_0 sur L , une extension finie K' de K contenant L , et un K' -isomorphisme $\lambda : C \times_K K' \xrightarrow{\sim} C_0 \times_K L'$.

On peut toujours supposer que L est algébriquement clos dans K' , qui est alors le corps de fonctions d'une L -variété V' (géométriquement irréductible).

Tout point de $C_0 \times_L K'(K')$ correspond bijectivement à une L -application rationnelle de V' dans C_0 , et puisque le genre de C_0 est supérieur ou égal à 2, il n'y a qu'un nombre fini de telles applications rationnelles dominantes [3,7]. Donc si $C(K)$ est infini, on obtient une infinité de L -applications rationnelles non dominantes de V' dans C_0 , donc de points de $C_0(L)$, ce qui contredit Mordell pour C_0 .

La manière dont nous avons fait la construction de Kodaira - d'abord sur la fibre générique, puis sur le complémentaire d'un ensemble fini de places - a suffi pour démontrer la conjecture de Mordell à partir de celle de Shafarevich pour les courbes. Mais on peut être plus précis, et indiquer exactement où les courbes construites ont bonne réduction. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , contenant les places divisibles par 2, C une courbe propre et lisse géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$, ayant bonne réduction en-dehors de S , et telle que $C(K)$ soit non vide. Alors il existe une extension finie L de K , ne dépendant que de g et de S , un revêtement $\alpha : C_1 \rightarrow C \times_K L$ étale en-dehors de S , et une famille lisse non isotriviale de courbes $\pi : X \rightarrow C_1$, de genre $\gamma = 4g - 2$, telle que pour toute extension L' de L et

pour tout point Q de $C_1(L')$, la fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ ait bonne réduction en-dehors de S' , image réciproque de S dans l'ensemble des places de L' .

Démonstration : Nous allons reprendre la démonstration de la proposition 1 pour la prolonger en-dehors de S .

Puisque les points d'ordre 2 de $\text{Pic}_{C/K}^\circ$ sont à valeur dans une extension de K de degré au plus 2^{2g} , étale en-dehors de S , l'extension de K qui permet de supposer que J a un point d'ordre 2 ne dépend que de S et de g .

Soient \mathcal{O} l'anneau d'entiers de K , $B = \text{Spec } \mathcal{O} - S$, et $f: V \rightarrow B$ le modèle lisse de C .

On vérifie qu'avec les notations de la proposition 1, C' a bonne réduction en-dehors de S , et $u: C' \rightarrow C$ se prolonge en un morphisme étale de degré 2, $\tilde{u}: V \rightarrow V'$ (V' étant le modèle lisse de C'). De plus, l'extension de K qui permet de supposer que $u^{-1}(P) = P' + P''$ ne dépend que de S .

On vérifie ensuite que si $\tilde{\Gamma} = V' \times_B V'$, ψ se prolonge en $\tilde{\psi}: V' \rightarrow \text{Pic}_{V'/B}^\circ$, que C_1 et r se prolongent en V_1 et $\tilde{r}: V_1 \rightarrow V'$ (\tilde{r} étale), et que si $\tilde{\Gamma}_1$ est l'image réciproque de $\tilde{\Gamma}$ dans $V' \times_B V_1$, le faisceau $\mathcal{O}_{V' \times_B V_1}(\tilde{\Gamma}_1)$ est le produit d'un carré par l'image réciproque d'un faisceau M_1 sur V_1 , de degré pair (sur la fibre générique C_1 de V_1).

LEMME 2.- Quitte à faire une extension finie de K , ne dépendant que de S et de g , on peut supposer que M_1 est un carré.

Démonstration : Soit $f_1: V_1 \rightarrow B$ la projection canonique et soit d_1 le degré de M_1 sur les fibres de f_1 , qui est pair.

Rappelons que $r: C_1 \rightarrow C'$ est de degré inférieur ou égal à $2^{2g'}$, et que C' a un point rationnel P' . Quitte à faire une extension finie de K ne dépendant que de S et de g' (donc de g) on peut supposer que C_1 a un point rationnel P_1 , qui se prolonge en une section E_1 de f_1 . Soit alors

$\tau: B \rightarrow \text{Pic}_{V_1/B}^\circ$ le morphisme correspondant au fibré inversible

$M_1 \otimes \mathcal{O}_{V_1}(-d_1 E_1)$. Soit B' une composante connexe du produit fibré de B par

la multiplication par 2 dans $\text{Pic}_{V_1/B}^\circ$

$$\begin{array}{ccccc}
 V'_1 & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{\tau'} & \text{Pic}_{V'_1/B}^\circ \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \times 2 \\
 V_1 & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{\tau} & \text{Pic}_{V_1/B}^\circ
 \end{array}$$

σ est un morphisme étale de degré $\leq 2^{2g_1}$ (avec $2g_1 - 2 \leq 2^{2g_1} (2g_1 - 2)$).

Par construction :

$$M_1 \otimes \mathcal{O}_{V_1}(-d_1 E_1) \simeq (1 \times \tau)^* \mathcal{P}_1 \otimes f_1^* L$$

où \mathcal{P}_1 est le fibré de Poincaré sur $V_1 \times_B \underline{\text{Pic}}^\circ_{V_1/B}$, et L un faisceau inversible sur B . On en déduit :

$$M_2 = \theta^*(M_1) \simeq \theta^*(\mathcal{O}_{V_2}(d_1 E_1)) \otimes (1 \times \tau')^* \mathcal{P}_1^2 \otimes f_1'^* \sigma^* L.$$

Sur B' , tout faisceau inversible est d'ordre fini, qui divise l'ordre du groupe de classes de B' . Soit $(2n+1) \cdot 2^m$ l'ordre de $L' = \sigma^* L$. On construit un revêtement B'' de B' , étale, de degré 2^m , sur lequel L'^{2n+1} est trivial. (B'' est défini par : $\mathcal{O}_{B''} = \mathcal{O}_{B'} \oplus L'^{2n+1} \oplus L'^{2(2n+1)} \oplus \dots \oplus L'^{(2^m-1)(2n+1)}$).

Le degré de B'' sur B' est borné par la plus grande puissance de 2 qui divise l'ordre du groupe de classes de B' , et sur B'' l'image réciproque L'' de L' vérifie :

$$L''^{2n+1} \simeq \mathcal{O}_{B''}, \text{ donc } L'' \simeq (L'')^{-2n}$$

donc après changement de base de B à B'' , l'image réciproque de M_1 est un carré.

Fin de la démonstration de la Proposition 2

Soit alors $\tilde{\rho} : \mathcal{X} \longrightarrow V_1 \times_B V'$ le revêtement de degré 2 de $V_1 \times_B V'$, ramifié le long de $\tilde{\Gamma}_1$, qui prolonge ρ . On vérifie que \mathcal{X} est lisse sur V_1 , et on en déduit que pour toute extension K' de K , pour tout point Q de $C_1(K')$, la fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ a bonne réduction en-dehors de S' , image réciproque de S dans l'ensemble des places de L' .

2.- CONSTRUCTION DE PARSHIN [11]

PROPOSITION 3.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant les places divisibles par 2, C une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, de genre $g \geq 2$, ayant bonne réduction en-dehors de S . Il existe un entier g' ne dépendant que de g , et pour tout point rationnel P de $C(K)$ un revêtement $\theta_P : C_P \longrightarrow C$, ramifié exactement en P , par une courbe C_P de genre g' sur K , qui a bonne réduction en-dehors de S .

Démonstration : Soit P un point rationnel de C . Il permet de construire un morphisme $\varphi : C \longrightarrow \underline{\text{Pic}}^\circ_{C/K} = J$ tel que $\varphi(Q) = Q - P$.

Par image réciproque de la multiplication par 2 dans J , on obtient un revêtement étale connexe de C de degré 2^{2g} :

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & J \\
 u \downarrow & & \downarrow \times 2 \\
 C & \xrightarrow{\varphi} & J
 \end{array}$$

C_1 est une courbe de genre g_1 avec

$$2g_1 - 2 = 2^{2g}(2g-2)$$

et C_1 a un point rationnel P' tel que $u(P') = P$ et $\varphi(P') = 0$, donc en termes de diviseurs :

$$u^*P = D + P'$$

où D est un diviseur étale sur K , ne contenant pas P' , de degré $d = 2^{2g} - 1 \geq 15$.

Soit J' la jacobienne généralisée de C_1 associée à D - qui est aussi la jacobienne de la courbe obtenue à partir de C_1 en contractant D en un seul point - et soit $\psi : C_1 - D \rightarrow J'$ le morphisme qui envoie P' sur 0 , origine de J' .

Rappels.- [2,14]. Dans le cas où $d \geq 1$, J' représente le foncteur des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles \mathcal{L} sur C_1 , rigidifiés sur D par un isomorphisme $\mathcal{L}|_D \simeq \mathcal{O}_D$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow J' \xrightarrow{\pi} \underline{\text{Pic}}_{C_1/K}^\circ = J \longrightarrow 0 \quad (1)$$

où π est le morphisme "d'oubli de la rigidification", et G est un tore de dimension $d-1$.

De plus, tout revêtement abélien de $C_1 - D$ est induit par un revêtement de J' .

Par image réciproque de la multiplication par 2 dans J' , on obtient un revêtement galoisien étale connexe $\theta' : C' \rightarrow C_1 - D$ de degré 2^{2g_1+d-1} . Soit C_2 une complétion projective lisse de C' , et $\theta : C_2 \rightarrow C_1$ le revêtement de C_1 qui prolonge θ' :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_1 & \longleftarrow & C' & \longrightarrow & J' \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta' & & \downarrow \times 2 \\
 C_1 & \longleftarrow & C_1 - D & \xrightarrow{\psi} & J'
 \end{array}$$

LEMME 3.- θ est un revêtement galoisien, de groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$, non ra-

ramifié en $C_1 - D$ et ramifié en tout point de D . De plus, le genre g' de C_2 vérifie :

$$2g' - 2 = 2^{2g_1+d-1}(2g_1 - 2) + d \cdot 2^{2g_1+d-2}$$

$$\text{où : } 2g_1 - 2 = 2^{2g}(2g-2)$$

$$\text{et } d = 2^{2g-1}$$

Démonstration : Toutes ces assertions étant géométriques, on peut raisonner sur un corps algébriquement clos. Le diviseur D est alors formé de d points distincts. Si θ n'est pas ramifié en un point de D , il existe un diviseur D' contenu dans D , de degré $d-1 \geq 1$, tel que θ induise un revêtement galoisien étale connexe

$$\theta'' : \theta^{-1}(C_1 - D') \longrightarrow C_1 - D'$$

de degré 2^{2g_1+d-1} .

Si J'' est la jacobienne généralisée de C_1 associée à D'' , θ'' est induit par un revêtement abélien de J'' . Or tout revêtement abélien de J'' annulé par 2 est un quotient de la multiplication par 2 dans J'' , donc est de degré majoré par 2^{2g_1+d-2} , d'où une contradiction.

D'autre part, pour tout point Q de D , le sous-groupe d'inertie d'un point Q' de la fibre $\theta^{-1}(Q)$ est un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$, donc il est d'ordre 1 ou 2, égal à la multiplicité de Q' dans la fibre. La multiplicité étant la même en tous les points de la fibre, et θ étant ramifié en Q , cette multiplicité est égale à 2.

On en déduit alors la valeur annoncée pour g' en utilisant la formule de Hurwitz.

Pour terminer la démonstration, il nous faut démontrer le :

LEMME 4.- C_2 a bonne réduction en-dehors de S .

Démonstration : Soit \mathcal{O} l'anneau d'entiers de K , $B = \text{Spec } \mathcal{O} - S$, et V le modèle lisse de C . On vérifie facilement que C_1 a bonne réduction en-dehors de S , que son modèle lisse V_1 possède un diviseur \tilde{D} étale de degré d sur B , qui prolonge D .

Il existe un B -schéma en groupes \mathcal{J}' qui prolonge J' : en effet, si \mathcal{J}' est le foncteur sur B des familles de faisceaux inversibles rigidifiés sur \tilde{D} , le morphisme π de la suite exacte (1) se prolonge en un morphisme surjectif : $\tilde{\pi} : \mathcal{J}' \longrightarrow \text{Pic}^\circ V/B$, dont le noyau est le foncteur des automorphismes de \tilde{D} , donc est représentable. Le foncteur \mathcal{J}' est donc aussi représentable par

un schéma qui prolonge J' [2].

Le revêtement θ' se prolonge alors en un revêtement galoisien étale $\theta' : V' \longrightarrow V_1 - \tilde{D}'$, de groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$.

Soit alors W la clôture intégrale de V_1 dans $k(V')$, qui est un schéma normal dans lequel se plonge V' , et $\tilde{\theta}$ le morphisme canonique : $W \longrightarrow V_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 V' = \tilde{\theta}^{-1}(V_1 - \tilde{D}') & \longleftarrow & W \\
 \downarrow \theta' & & \downarrow \theta' \\
 V_1 - \tilde{D}' & \longleftarrow & V_1
 \end{array}$$

En tout point où $\tilde{\theta}$ est ramifié, l'indice de ramification est égal à 2, donc premier à la caractéristique résiduelle. Ceci, ajouté au fait que V_1 est lisse et \tilde{D}' lisse, implique grâce au lemme d'Abhyankar [5,6], que W est lisse. D'autre part, l'ouvert de W sur lequel W est lisse sur B contient V' et un voisinage de la fibre générique de W , donc son complémentaire est un fermé de codimension 2, ce qui implique puisque W est lisse, que ce fermé est vide. D'où le résultat.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] A. ANDREOTTI - *On Torelli's Theorem*, Amer. J. Math. Vol. 80 (1958).
- [2] P. DELIGNE - SGA 4, Exposé XVIII §1.
SGA 4 1/2 Arcata VI §2.
- [3] M. DESCHAMPS et R. MÉNÉGAUX - *Applications rationnelles séparables dominantes sur une variété de type général*, Bull. Soc. Math. de France N°106, 1978. pp.279-287.
- [4] H. GRAUERT - *Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper*, Publ. Math. IHES 25 (1965).
- [5] A. GROTHENDIECK - SGA 1, Exposé XIII §1.
- [6] A. GROTHENDIECK et J.P MURRE- *Tame Fundamental group ...*, Springer Lecture Notes n°208, (1971).
- [7] S. KOBAYASHI et T. OCHIAI - *Meromorphic mappings onto complex spaces of general type*. Invent. Math. t.31, (1975) pp 7-76.
- [8] K. KODAIRA - *A certain type of irregular algebraic surface*. Journal d'Analyse Mathématique, vol. 19 (1967).
- [9] Ju. I. MANIN - *Rational Points of algebraic curves over function fields* Amer. Math. Soc. Trans. (2) 50 (1966), 189-234.
- [10] D. MUMFORD - *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag (1965).
- [11] A.N PARSHIN - *Algebraic Curves over function fields*, Math. USSR. Izvestija 2 (1968) n°5, 1145-1171.
- [12] P. SAMUEL - *On old and new results on algebraic curves*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay (1966).
- [13] P. SAMUEL - *Compléments à un article de H. Grauert sur la conjecture de Mordell*. Publ. Math. IHES 29 (1966).

- [14] J-P.SERRE - *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann (1959).
- [15] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins 2*.
Astérisque n°86 (1981).

Mireille MARTIN-DESCHAMPS
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05