Astérisque

LUCIEN SZPIRO

Un peu d'effectivité

Astérisque, tome 127 (1985), p. 275-287
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__275_0>

Exposé XI

UN PEU D'EFFECTIVITÉ

Lucien SZPIRO

1.- La constante de Mumford.

2.- Compter le nombre de points (d'après Parshin).

3.- Petits points et points de torsion.

Dans cet exposé nous introduisons un nouvel objet : la constante de Mumford (§1 - 2). Comme l'a indiqué Parshin, on peut, grâce à une proposition de D. Mumford, réinterpréter la démonstration de G. Faltings pour donner une borne "explicite" de nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins deux, sur un corps de nombres (§2). Dans cette borne les termes "à distance finie" sont effectivement bornés. Par contre les termes "à l'infini" ne le sont pas. Un de ces deux derniers termes (la constante de Mumford) devrait pouvoir être effectivement borné de l'avis de l'auteur de ces lignes. Au §3 nous montrons deux manières de borner la self-intersection du dualisant relatif d'une surface arithmétique. La première mène à ma conjecture des petits points. La seconde permet de montrer que la constante de Mumford est souvent négative et, qu'en conséquence, on peut construire beaucoup de courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts sur $\overline{\mathbb{Q}}$ n'est jamais de torsion.

Société Mathématique de France
Astérisque 127 (1985)

1.- LA CONSTANTE DE MUMFORD

1.1.- Un calcul d'angle

G. Faltings et P. Hriljac ont mis en évidence la relation qui existe entre l'intersection d'Arakelov (notée $(\cdot,\cdot)$) et la hauteur de Néron - Tate associée à la polarisation Θ sur la Jacobienne (dont la forme bilinéaire associée est notée $<\cdot,\cdot>$) (cf l'exposé II de ce séminaire) : soit C_K une courbe projective, lisse, géométriquement connexe de genre $g \geq 1$, sur un corps de nombres K et soient L_1 et L_2 deux éléments de $\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathbb{Q}$ sur le modèle propre régulier C de C_K sur $\mathrm{Spec}\ \underline{O}_K$, qui soient de degré zéro sur chacune des composantes des fibres de $C \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\ \underline{O}_K$. Soient x_i le point de la Jacobienne tensorisée par $\mathbb{Q}$ correspondant à L_i, alors on a :

$$(L_1,L_2) = - [K : \mathbb{Q}]\ <x_1,x_2>.$$

Soit E une section de f nous lui associons un élément de $\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathbb{Q}$ du type précédent de la façon suivante :

$$L_E = \omega_{C/\underline{O}}\ (-(2g-2)E) \otimes \mathcal{O}_C(\Phi(E))$$

où $\Phi(E)$ est le diviseur à coefficients rationnels, vertical, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $(L_E \cdot \mathcal{O}_C(D)) = 0$ pour tout D vertical

b) si $v \in \mathrm{Spec}\ \underline{O}_K$ est un point fermé,

si $F_v = \Sigma n_i D_i$ est la fibre de v et i_o l'entier tel que

$(D_{i_j} \cdot E) = \delta_{o,j} \log N(v)$, alors la composante de $\Phi(E)$ selon D_{i_o} est nulle.

Remarquons que $\Phi(E)$ est déterminé à l'addition de fibres entières près par la condition a). La condition b) est une manière de normaliser. Soient maintenant E_1 et E_2 deux sections distinctes de f et soient x_i le point de la Jacobienne tensorisée par $\mathbb{Q}$ corespondant à L_{E_i}. On a :

$$[K : \mathbb{Q}]\ (-<x_i>^2) = \omega^2 + 2g(2g-2)E_i^2 - \Phi(E_i)^2$$

$$[K : \mathbb{Q}]\ (-<x_1,x_2>) = \omega^2 + (2g-2)(E_1^2 + E_2^2) + (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2) - (\Phi(E_1) \cdot \Phi(E_2)).$$

Où l'on a écrit $\omega^2 = (\omega_{X/\underline{O}} \cdot \omega_{X/\underline{O}})$, et utilisé la formule d'adjonction $(\omega_{X/\underline{O}} \cdot E_i) = -E_i^2$. La forme quadratique de Néron - Tate étant définie positive sur $J(C) \otimes \mathbb{R}$, notant $|x_i|$ la longueur de x_i pour cette forme et θ l'angle entre x_1 et x_2 on a :

$$(*)\quad |x_1||x_2| \cos\theta = \frac{|x_1|^2+|x_2|^2}{2g} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big[\omega^2(\frac{1}{g} - 1)) - (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi(E_1)^2+\Phi(E_2)^2}{2g} + (\Phi(E_1)\cdot\Phi(E_2))\Big].$$

1.2.- <u>La constante de Mumford</u>

Pour simplifier nous supposerons dorénavant que $f : C \longrightarrow \operatorname{Spec} \underline{O}_K$ est semi-stable. Si P_1 et P_2 sont des points rationnels de C sur K et E_1, E_2 les sections de f correspondantes posons :

$$M(C,K,P_1,P_2) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(-\omega^2(1-\frac{1}{g}) - (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi(E_1)^2+\Phi(E_2)^2}{2g} + (\Phi(E_1)\cdot\Phi(E_2)).$$

Comme nous avons supposé que C est semi-stable, si $K' \supset K$ $M(C,K',P_1,P_2) = M(C,K,P_1,P_2)$. Nous noterons ce nombre $M(C,P_1,P_2)$.

<u>PROPOSITION 1.1</u>.- *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, soit* Δ *la diagonale de* $C \times C$, *alors la fonction* $M(C,\cdot,\cdot) : C(\overline{K}) \times C(\overline{K}) - \Delta(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bornée supérieurement.*

Nous allons borner les trois termes de $M(C,\cdot,\cdot)$

a) C étant semi-stable $\omega = \omega_{C/\underline{O}_K}$ commute au changement de base donc

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\,\omega^2(\frac{1}{g} - 1)$$

est constant. Remarquons que comme $\omega^2 \geq 0$ ce terme est négatif !!

b) $$\frac{-(2g-2)^2}{[K:\mathbb{Q}]}\,(E_1 \cdot E_2) \leq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}_\sigma]}\Sigma\, \varepsilon_\sigma \log G_\sigma(P_1,P_2)$$

où G_σ est la fonction de Green égale à $|s\,(P_2)|_\sigma$ avec les notations de l'exposé I.

G_σ étant continue elle est bornée supérieurement sur $C_\sigma \times C_\sigma$ (et vaut zéro sur la diagonale).

D'autre part si $K' \supset K$ et ρ est une place à l'infini de K' dominant σ place à l'infini de K, on a $G_\rho = G_\sigma$. Le facteur $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$ assure donc que ce second terme est borné supérieurement sur $\overline{K}$.

c) La forme d'intersection étant négative sur les fibres, pour borner le troisième terme il suffit de borner sur $\overline{K}$ les nombres de la forme :

$$\frac{-\Phi(E)^2}{[K(E):\mathbb{Q}]} .$$

(i) Considérons d'abord le cas d'une fibre réduite qui n'a que des points doubles ordinaires et pas de $\mathbb{P}^1$ de self-intersection -2. Le nombre de composantes est au plus $2g-2$ (intersecter avec ω).

Soit D un diviseur horizontal de degré $d^\circ D$ sur la base, on cherche Φ contenu dans la fibre tel que $(d^\circ D\ \omega - (2g-2)D \cdot F_i) = -(\Phi \cdot F_i)$ pout chaque composante F_i de la fibre. Les coefficients de la matrice $(F_i \cdot F_j)$ et de $(\omega \cdot F_i)$ étant bornés en fonctions de g, il existe une constante $\alpha(g)$ telle que si

$\Phi = \Sigma \alpha_i F_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_{i_o} = 0$ (i_o choisit à l'avance) alors

$$|\alpha_i| \leq d^\circ(D)\ \alpha(g)$$

(appliquer la règle de Cramer à un système de $(r-1)$ équations $r = \#$ composantes de la fibre).

(ii) Le cas général qui nous intéresse est celui de $D = E$ une section, mais après un changement de base de degré n et résolution des singularités depuis la situation (i). On a donc un certain nombre (au plus $(2g-1)$) de chaînes de longueur $(n-1)$ de $\mathbb{P}^1$ de self-intersection -2.

En projetant E sur la situation (i) on trouve un diviseur D de $d^\circ n$. Soit π la projection et Φ la solution trouvée en (i). On va chercher une solution Φ' au problème $(((\omega' - (2g-2)E) + \Phi') \cdot F'_i) = 0$ pour chaque composante F'_i de la fibre. (Notons que $\omega' = \pi^*\omega$). On va montrer qu'on peut prendre

$$\Phi' = \frac{1}{n}\pi^*\Phi + \Sigma\alpha_i \cdot D_i$$

où les D_i sont des $\mathbb{P}^1$ de self-intersections -2 arrangées en au plus $(2g-1)$ chaînes de longueur $(n-1)$.

Sur une de ces chaînes la matrice d'intersection est de la forme :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A_{n-1}$$

$\pi_*(\omega' - (2g-2)E) = n\omega - (2g-2)E$ par la formule de projection

$$(\omega' - (2-g-2)E + \frac{1}{n}\pi^*\Phi \cdot \pi^*F_i) = (n\omega' - (2g-2)D + \Phi \cdot F_i) = 0.$$

D'autre part si $(D_i \cdot E) = 0$, comme $(D_i \cdot \omega') = 0$ il nous suffit de résoudre

$$((\omega' - (2g-2)E + \frac{1}{n}\pi^*\Phi + \Sigma\alpha_j \cdot D_j) \cdot D_i) = 0 \qquad \forall i$$

i.e. $$(\Sigma\alpha_j(D_j \cdot D_i)) = \begin{cases} 0 \text{ si } & (D_i \cdot E) = 0 \\ 2g-2 & (D_i \cdot E) = 1 \end{cases}$$

Déjà sur les chaînes de $\mathbb{P}^1$ qui ne rencontrent pas E on peut prendre les $\alpha = 0$. Comme $\det(A_{n-1}) = (-1)^{n-1}\, n \neq 0$ les α_j existent et sont uniques.

Le coefficient a_{ij} de l'adjointe de A_{n-1} vaut $(-1)^n\, i(n-j)$. (Ces calculs se font simplement en notant qu'une relation de la forme $b_{j-1} - 2b_j + b_{j+1} = 0$ indique que les b_j sont en progression arithmétique). On voit ainsi que

$$|\alpha_j| \leqq (2g-2)n.$$

D'autre part $-\Phi'^2 = (\Phi' \cdot (\omega' - (2g-2)E))$. Donc la contribution de $\Sigma\alpha_j \cdot D_j$ est seulement $-\alpha_{j_1}(2g-2)$, donc est bornée en valeur absolue par $(2g-2)^2 n$. La contribution de $\frac{1}{n}\pi^*\Phi$ est bornée en valeur absolue par $n2\alpha(g)(2g-2)^2$ en vertu de ce qu'on a vu en (i). Donc $|\Phi'^2|$ est un $O([K : \mathbb{Q}])$. C.Q.F.D.

Nous noterons $M(C)$, le nombre réel dont la proposition 1.1 assure l'existence. C'est la *constante de Mumford*. Notons la conséquence suivante de la démonstration de la proposition 1.1.

COROLLAIRE : *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme lisse et projectif d'une surface projective* X *sur* K, *dans une courbe lisse et projective sur* K. *Supposons que les fibres soient de genre* $g \geq 2$ *et telles, qu'il existe un ensemble fini de places* S *de* K, *tel que pour tout* $K' \supset K$ *et tout* $P \in C(K')$, *la fibre* X_P *ait bonne réduction en dehors de l'image réciproque de* S *sur* K'. *Alors*

$$M(f) = \sup_{P \in C(\overline{K})} (M(X_P))$$

est fini.

PROPOSITION 1.2.- (D. Mumford) *Avec les hypothèses et notations ci-dessus soient* E *une section de* $f : C \longrightarrow \operatorname{Spec} \underline{O}_K$. *Supposons que le point* x *de la Jacobienne* J *correspondant comme en 1.1, satisfasse à*

$$M(C) \leq |x|^2$$

alors le nombre de sections F *de* f, *distinctes de* E *et dont le point* y *de* J *correspondant satisfasse à* $|x| \leq |y| \leq 2|x|$, *est inférieur à* 5^ρ *où* ρ *est le rang du groupe de Mordell - Weil* $J(C)(K)$.

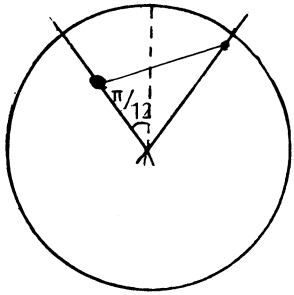
Le calcul d'angle $(*)$ fournit

$$\cos\theta \leq 0{,}85$$

donc $\qquad \theta \leq \frac{\pi}{6}.$

Il reste à vérifier que dans un espace vectoriel réel de dimension ρ, l'ensemble des points de distance à l'origine $\leq 2|x|$ et dont les angles sont au moins $\frac{\pi}{6}$ est de cardinal au plus 5^ρ.

Par homothétie on se ramène dans la boule unité.



La distance de deux tels points est alors au plus $2 \sin \frac{\pi}{12} \leqq \frac{1}{2}$. On a donc, si N est le nombre de points cherchés et v le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{\rho}$,

$$N\, v(\tfrac{1}{4})^{\rho} \leqq (\tfrac{5}{4})^{\rho}\, v.$$

D'où le résultat.

2.- COMPTER LE NOMBRE DE POINTS

Parshin a indiqué comment borner le nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins deux en réinterprétant la démonstration de Faltings (améliorée par Raynaud) et en "injectant" la proposition ci-dessus de D. Mumford. Nous obtenons ainsi la réponse la plus précise, à l'heure actuelle (et à la connaissance de l'auteur de ces lignes) à la question de Mordell. Pour expliquer ce décompte il nous faut introduire certains nombres réels que nous appellerons "constantes" bien que nous indiquions entre parenthèse de quoi ils dépendent. Par exemple une notation comme $N(K,g)$ signifie un nombre réel qui dépend du corps K et de l'entier g !

a) La constante de Faltings : c'est celle mise en évidence dans l'exposé IX de ce séminaire (P. Deligne) : $F(K,S,g)$ est le nombre de classes d'isogénies de K variétés abéliennes de dimension g ayant bonne réduction en dehors de S. Une borne effective de $F(K,S,g)$ est calculée dans l'exposé 9.

b) La constante de Raynaud : $R(K,S,g)$ est la variation maximale de la hauteur modulaire dans une classe d'isogénies de K-variétés abéliennes de dimension g, ayant bonne réduction en dehors de S. Une borne effective de R est calculée dans l'exposé VII de ce séminaire (M. Raynaud).

c) La constante de Mumford : $M(K,C)$ décrite au §1 de cet exposé.

d) La constante d'Arakelov : $A(C)$, elle mesure essentiellement la différence entre la hauteur de Néron - Tate d'un point et la hauteur modulaire de la Jacobienne du revêtement ramifiée de Kodaira - Parshin correspondant à ce point. (cf exposé X de M. Deschamps). Explicitons : soit C une courbe projective géométriquement connexe de genre $g \geqq 2$ sur K. Soit C' le revêtement étale de C sur lequel la fibration que Kodaira $f : X \longrightarrow C'$ est définie. On veut comparer la "hauteur d'Arakelov" $-E^2/[K(P):\mathbb{Q}]$ d'un point P de $C'(\overline{K})$ et la hauteur modulaire $h(J_P)$ de la Jacobienne J_P de la fibre X_P de X en P .

Cette dernière, comme la fibration de Kodaira est lisse, est une "bonne hauteur" sans singularités (logarithmiques), définie à partir de métriques sur :

$$(\overset{\max}{\Lambda}\ f_* \omega_{X/C'})_\sigma .$$

Par le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck pour f, il est facile, en suivant la construction de Kodaira, de montrer qu'il existe un nombre rationnel positif $s(g,S)$ - S étant le lieu de mauvaise réduction de C' - tel que

$$(\overset{\max}{\Lambda}\ f_* \omega_{X/C'})_K^{s(g,S)} \simeq \omega_{C'/K} \text{ modulo torsion.}$$

Il existe donc une constante $A_1(C)$ telle que

$$|h(J_P) + E_P^2/[K:\mathbb{Q}]s(g,S)| < A_1(C) \quad \text{sur } C'(\overline{K}).$$

Par le §1 de cet exposé $|-E_P^2/[K:\mathbb{Q}] - |x_P|^2| < A_2(C)$ sur $C'(\overline{K})$. On trouve donc la constante que j'appelle d'Arakelov telle que

$$|s(g,S)h(J_P) - |x_P|^2| < A(C) \qquad \text{sur } C'(\overline{K})$$

où $|x_P|^2$ est la hauteur de Néron - Tate définie au §1.

c) g' *est le genre de* C'.

f) $\rho(C,K)$ *est le rang du groupe de Mordell - Weil de* C *sur* K.

THÉORÈME : *Soit* C *une courbe projective, lisse, géométriquement connexe de genre* g *sur un corps de nombres* K. *Soit* S *l'ensemble des places de mauvaise réduction de* C *auquel on a éventuellement rajouté les places divisant* 2.

Soit K' *l'extension de* K *qui coiffe toutes les extensions de* K *de degré au plus* 2^{2g} *étales en dehors de* S. *Alors, avec les notations introduites ci-dessus, le cardinal de* $C(K)$ *est majoré par*

$$\#\{P\in C'(K'), |x_P|^2 < M(K',C')\} + F(K',S,g')5^{\rho(K',C')}(1 + [\log_2(s(g'S)R(K',S,g') + 2A(C)]).$$

Le résultat est clair à partir des définitions ci-dessus et des exposés I à X de ce séminaire, quand on a remarqué que, pour les points de C' de hauteur de Néron - Tate plus grande que $M(K',C')$ et qui ont des fibres dont les Jacobiennes sont isogènes, on peut appliquer la proposition 1.2 un nombre de fois égal à

$$1 + [\log_2(s(g',S)\ R(K',S,g') + 2A(C))].$$

Remarque : A part les constantes M et A, on a montré dans ce séminaire que les nombres entrant dans le théorème ci-dessus sont effectivement bornables. Le lecteur curieux pourra s'amuser (?) à calculer la nature de la variation du nombre de points de $C(K)$ avec K. La raison qui empêche d'être plus précis sur M et A est dans les "termes à l'infini" qui ne sont bornés que pour des raisons de continuité et compacité. J'apporte au §3 ci-dessous quelques précisions sur la "constante" M. Notons tout de suite que dans un cadre géométrique (i.e. K corps de fonctions) la partie $\omega^2(\frac{1}{g}-1) - (2g-2)^2(E_1\cdot E_2)$ de M est négative !! La troisième partie de M est bornée en termes de S et g comme on l'a vu plus haut.

3.- PETITS POINTS ET POINTS DE TORSION

3.1.- La conjecture des petits points :

J'ai montré dans le cadre géométrique l'énoncé suivant ([S]) que j'aimerais soumettre à la réflexion de mes collègues.

CONJECTURE : *Soit* C *une courbe, lisse, projective, géométriquement connexe de genre* $g \geq 2$ *définie sur un corps de nombre* K, *alors il existe une fonction* effectivement calculable $f(K,g,S)$ *ne dépendant que de* K, g *et* S (*réunion des places à l'infini et du lieu de mauvaise réduction de* C *sur* K), *telle qu'il existe un point* $P \in C(\overline{K})$, *dont la section* E_P *de* $C \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \underline{O}_{K(P)}$ satisfait à :

$$-E_P^2 \leq [K(P):\mathbb{Q}]\ f(K,g,S).$$

Dans le cas géométrique $f(K,g,S)$ vaut $2\mathrm{genre}(C) - 2 + \# S + 1$ dans [S].

Elle dépend bien simplement du corps et pas du genre !

Outre l'analogie avec les corps de fonctions, qui s'est révélée pour le moins fructueuse, l'intérêt de cette conjecture est qu'elle implique un "Mordell effectif" de la façon suivante :

PROPOSITION 3.1.- *Soit* C *une courbe sur un corps de nombre* K *comme précédemment. Alors il existe un nombre réel* T(C) *tel que si* $P \in C(\overline{K})$ *et* E_P *est la section correspondante de* $f : C \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \underline{O}_{K(P)}$

$$\frac{-E_P^2}{[K(P):\mathbb{Q}]} \leq T(C) + \frac{4}{3\cdot 2^{2g}} \quad \inf\{Q \in X_P(\overline{K}) \mid -E_Q^2\, \frac{2g'(2g'-2)}{[K(Q):\mathbb{Q}]}\}$$

où X_P *est le revêtement de* C *de genre* g' *dû à Kodaira-Parshin et qui n'est ramifié qu'en* P .

Nous avons essentiellement montré cette proposition dans [S] dans le cadre géométrique, l'argument s'applique à la perfection au cas arithmétique, il faut juste rajouter le terme T(C) qui provient de changement de métriques.
Explicitons brièvement :

Par le théorème de l'index (Faltings - Hriljac cf exposé II) on montre mon lemme favori

$$\omega_{X_P}^2 \leq -E^2\ 2g'(2g'-2) \qquad \text{(cf.exposé II, proposition 6.17).}$$

pour toute section de X_P, le terme en "inf" dans la proposition 3.1 est donc une borne pour $\omega_{X_P}^2/[K(P):\mathbb{Q}]$.

Maintenant en suivant pas à pas la construction de Kodaira - Parshin on voit qu'on a :

$$"\omega_{X_P} = \pi^* \omega_C (\tfrac{1}{2} E_P)" \quad \text{où} \quad \pi : X_P \longrightarrow C$$

aux métriques à l'infini près. Donc on a

$$\frac{\varsigma\, \omega_{X_P}^2}{[K(P):\mathbb{Q}]} + T(C) \geq 2^{2g}(\omega_C^2 - \tfrac{3}{4} E_P^2) \qquad (\omega_C^2 \geq 0 : \text{Faltings})$$

où on peut prendre $T(C)$ le même pour tout P (comparaison des métriques permises sur C et X_P pour tout P dans un espace compact !) Ceci montre la proposition.
On voit que la conjecture des petits points est une manière d'espérer avoir une borne pour $\omega_{X_P}^2$. Nous analysons plus bas comment des estimations de la constante de Mumford permettent aussi de borner $\omega_{X_P}^2$.

3.2.- Points de torsion et constante de Mumford

Ce paragraphe est basé sur le fait que le coefficient $(\frac{1}{g} - 1)$ de ω^2 dans la constante de Mumford est négatif !

LEMME : *Soit* C *une courbe lisse projective, géométriquement connexe sur un corps de nombres* K. *Alors pour tout faisceau inversible ample métrisé* L_K *sur* C_K, *pour tout modèle entier* (L,C) *de* (L_K,C_K) *et tout nombre réel* A *il existe* $P \in C(\overline{K})$ *tel que :*

$$h_L(P) > A.$$

J'avais une démonstration, dont le moins qu'on puisse dire est qu'elle était contournée, pour ce fait. L. Moret - Bailly m'a communiqué celle qui suit :
On peut trouver un modèle entier de C sur Spec $\underline{O}_K$ que nous noterons encore C, et un morphisme génériquement fini

$$\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\underline{O}_K}$$

tel que $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)_K = L_K$.

Donc (cf exposé I) il existe un réel B tel que $|h_L(P) - h_{\text{naïve}}(\pi(P))| < B$ pour tout $P \in C(\bar{K})$. Le lemme étant évident pour $\mathbb{P}^1$, cette inégalité le prouve.

PROPOSITION 3.2.- *Soit* C *une courbe de genre* $g \geq 2$ *définie sur un corps de nombres comme plus haut,* $X \xrightarrow{f} C'$ *la fibration de Kodaira associée. Alors pour tout nombre réel positif ou négatif* a, *il existe une infinité de* $P \in C'(\bar{K})$ *tel que la constante de Mumford* $M(X_P)$ *soit plus petite que* a.

En effet, sinon, les constantes de Mumford $M(X_P)$ seraient bornées inférieurement pour tout $P \in C'(\bar{K})$

$$M(X_P) = \sup_{P_1,P_2} \left\{ \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(\omega^2(\frac{1}{g} - 1) - (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{2g} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2) \right\}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(-(2g-2)^2 (E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{2g} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2)\right)$$

est borné pour tout triplet (P,P_1,P_2) $P \in C'(\bar{K})$, $P_1,P_2 \in X_P(\bar{K})$ $P_1 \neq P_2$.

Si pour tout $P \in C'(\bar{K})$ on a $M(X_P) \geq a$, alors il existe une constante A telle que $\frac{1}{[K(P):\mathbb{Q}]} \omega_{X_P}^2 \leq A$ pour tout $P \in C'(\bar{K})$.

Ceci contredit le lemme précédent en vertu de la démonstration de la proposition 3.1.

La conséquence suivante nous a semblé mériter attention :

COROLLAIRE : *Soit* C *une courbe de genre au moins deux sur* $\bar{\mathbb{Q}}$. *Alors une infinité de fibres de la fibration de Kodaira associée à* C *n'ont pas, sur* $\bar{\mathbb{Q}}$, *de couples de points distincts dont la différence est de torsion.*

D'après la formule d'angle (*) du §1 de cet exposé si $P_1 - P_2$ est de torsion $M(C,P_1,P_2)$ est positif ou nul. En effet $x_1 = x_2$. Ceci donne le corollaire en prenant $a = 0$ dans la proposition 3.2.

Notons que l'existence même de courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts n'est jamais de torsion n'est pas évidente à priori. Par exemple pour montrer qu'on a de telles courbes sur le corps des complexes, on utilise qu'une intersection dénombrable d'ouvert denses du module des courbes est non vide. Un tel argument est évidemment sans espoir sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[F] G. FALTINGS.- *Calculus on arithmetic surfaces*", Ann. of Math. 119 (1984), 387-424.

[H] P. HRILJAC.- *Thesis M.I.T.* 1981.

[M] D. MUMFORD.- "*A remark on Mordell's conjecture*". American Journ. of Math. 87 (1965) 1007-1016.

[S] L. SZPIRO.- "*Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*" *exposé n° 3 in* "*Pinceaux de courbes de genre au moins deux*". Astérisque (1981) n° 86.

Lucien SZPIRO
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX