

Astérisque

BERNARD MALGRANGE

Variations généralisées

Astérisque, tome 130 (1985), p. 237-239

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130_237_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

V A R I A T I O N S G É N É R A L I S É E S *

B. MALGRANGE

Sur $X = \mathbb{A}^n$ (ou, plus généralement, une variété complexe lisse 2-connexe), on considère $F \xrightarrow{u} G$, avec F et G pervers et u un isomorphisme modulo faisceaux constants, i.e $\ker u$ et $\operatorname{coker} u$ sont constants (je prends la normalisation bête où $H^i F$ est nul sauf en degrés $(0, \dots, n)$). Soit $j : U \hookrightarrow X$ le plus grand ouvert où F (donc G) est localement constant ; $Y = X - U$ est la projection de $\overline{\operatorname{car} F - \{0\}} \subset T^* X - \{0\}$; soit $a \in U$, et $\pi = \pi_1(U, a)$; on a une action équivariante de π sur $j^* F \xrightarrow{u} j^* G$ et on veut définir, $\forall \alpha \in \pi$ un morphisme $\operatorname{var}(\alpha)$ en sens inverse.

Appelons factorisation (resp. factorisation pleine) de $F \xrightarrow{u} G$ un diagramme commutatif $F \begin{array}{c} \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} \\ \xrightarrow{u} \end{array} G$, avec H pervers, et v, w des isomorphismes mod. constants (resp. tels que de plus v soit injectif et w surjectif). On a le résultat suivant

LEMME 1. 1) *Il existe des factorisations pleines*

2) *Si l'on a deux factorisations pleines $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ et $F \xrightarrow{u'} H' \xrightarrow{w'} G$, il en existe une troisième $F \xrightarrow{v''} H'' \xrightarrow{w''} G$ qui s'applique surjectivement sur les deux précédentes ; i.e il existe λ (resp. λ') surjective $H'' \xrightarrow{\lambda} H$ (resp. $H'' \xrightarrow{\lambda'} H'$) tels que les diagrammes évidents soient commutatifs.*

(*) Extrait d'une lettre adressée à J.L. VERDIER, le 23 décembre 1982. L'idée de considérer de telles variations m'a été suggérée par O. Gabber.

Démonstration : 1) On considère les suites exactes

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \ker u \longrightarrow F \longrightarrow \operatorname{im} u \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \operatorname{im} u \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{coker} u \longrightarrow 0 \end{cases}$$

La deuxième donne un élément de $\operatorname{Ext}^1(\operatorname{coker} u, \operatorname{im} u)$;

comme $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{coker} u, \ker u) = 0, i = 1, 2$, cet élément se relève de manière unique en un élément de $\operatorname{Ext}^1(\operatorname{coker} u, F)$, d'où une extension $0 \longrightarrow F \xrightarrow{v} H \longrightarrow \operatorname{coker} u \longrightarrow 0$ qui s'envoie sur la deuxième suite exacte ci-dessus ; ceci donne une factorisation pleine "canonique".

2) On prend $H'' = H \times_G H'$ i.e. $H'' = \ker(H \oplus H' \xrightarrow{w-w'} G)$ et on envoie F dans H'' et H'' dans G de la manière évidente. (Le fait que v'' et w'' soient des isomorphismes mod. constants se voit en traduisant en \mathcal{D} -modules et en vérifiant que ce sont des isomorphismes des microlocalisés hors de la section nulle ; il doit aussi y avoir moyen de s'en sortir sans \mathcal{D} -modules).

Ceci dit, pour définir les $\operatorname{var}(\alpha)$, $\alpha \in \pi$, on prend une factorisation pleine $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ de u ; on restreint à $U : j^* F \xrightarrow{v} j^* H \xrightarrow{w} j^* G$, et on considère $(\alpha - 1) | (j^* H)_a$. D'une part, il s'annule sur $\operatorname{Ker} w$, d'autre part, il est à valeurs dans $\operatorname{Im} v$; donc il provient d'une flèche unique $\operatorname{var}(\alpha) : (j^* G)_a \longrightarrow (j^* F)_a$, on a évidemment $(\alpha - 1) | (j^* H)_a = v \cdot \operatorname{var}(\alpha) \cdot w$ et les formules analogues pour $(\alpha - 1) | (j^* F)_a$, $(\alpha - 1) | (j^* G)_a$; pour $\alpha, \beta \in \pi$, on a

$$(*) \quad \operatorname{var}(\alpha\beta) = \operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta) + \operatorname{var} \alpha \cdot u \cdot \operatorname{var} \beta \quad (\text{et } \operatorname{var}(1) = 0) \quad .$$

Enfin, ceci ne dépend pas de la factorisation pleine choisie (lemme 1,2)).

PROPOSITION. - Soit $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ une factorisation de u ; soient $\operatorname{var}'(\alpha)$ (resp. $\operatorname{var}''(\alpha)$) les flèches de variation associées au diagramme $F \xrightarrow{v} H$ (resp. $H \xrightarrow{w} G$) ; on a $\operatorname{var}'(\alpha) = \operatorname{var} \alpha \cdot w$ et $\operatorname{var}'' \alpha = v \cdot \operatorname{var} \alpha$.

Pour démontrer la première assertion, on se ramène (en remplaçant $F \xrightarrow{v} H$ par une factorisation pleine) au cas où v est injectif ; en remplaçant alors $H \longrightarrow G$ par une factorisation pleine, on se ramène finalement au cas où la factorisation donnée est pleine ; alors cela résulte de ce qui précède.

La proposition montre que l'action de groupe de π sur $(j^*H)_a$ se calcule donc en connaissant v, w et les $\text{var } \alpha$ sur $(j^*F)_a, (j^*H)_a, (j^*G)_a$, (a le point-base choisi), car on a $\alpha|_{j^*H} = 1 + v \cdot \text{var}' \alpha = 1 + v \cdot \text{var} \alpha \cdot w$; l'identité (*) revérifie que l'on a bien une loi de groupe.