GILLES PISIER

Sur les opérateurs p-sommants et p-radonifiants pour $p < 1$

Astérisque, tome 131 (1985), p. 163-174
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__163_0>

SUR LES OPÉRATEURS p-SOMMANTS ET p-RADONIFIANTS POUR $p < 1$

par Gilles PISIER

INTRODUCTION.

Dans sa théorie des applications radonifiantes exposée dans [10] L. Schwartz montre que si $1 \leqq p < \infty$, tout opérateur p-sommant $u : X \to Y$ entre espaces de Banach est un opérateur p-radonifiant à valeurs dans $(Y'', \sigma(Y'',Y'))$. Si Y est réflexif, u est p-radonifiant (à valeurs dans Y). De plus, si X possède la propriété d'approximation métrique, le résultat s'étend au cas $p < 1$. La question de la suppression de l'hypothèse d'approximation est restée ouverte depuis. L'objet de cet article est de construire des contre-exemples. On construira une surjection $Q : Z \to \ell^2$ d'un Banach Z sur ℓ^2 qui est p-sommante, mais n'est pas p-radonifiante, avec $0 < p < 1$. On peut définir par analogie avec la quasi-norme p-sommante π_p la quasi-norme p-radonifiante $R_p(u)$ d'un opérateur $u : X \to Y$. Soit alors $u : X \to \ell^2_n$. La propriété d'idéal et le fait que $R_p(Id_{\ell^2_n}) \approx \sqrt{n}$ montrent que

$$(1) \qquad R_p(u) \leqq C \sqrt{n}\, \pi_p(u)$$

où C est une constante ne dépendant que de p. On montrera que cette inégalité (1) ne peut pas être améliorée. Il existe, pour tout entier n, une surjection Q_n d'un Banach Z_n sur ℓ^2_n telle que

$$R_p(Q_n) \geqq \delta \sqrt{n}\, \pi_p(Q_n)$$

où $\delta > 0$ est une constante indépendante de n.

Rappelons quelques définitions :
On dit qu'un opérateur $u : X \to Y$ est p-sommant $(0 < p < \infty)$ s'il existe une constante C telle que $\forall n\ \forall x_1,\dots,x_n \in X$

$$(2) \quad \left(\Sigma \| ux_i \|^p\right)^{1/p} \leqq C \sup \{(\Sigma | \xi(x_i)|^p)^{1/p} \mid \xi \in X' \ \| \xi \| \leqq 1\}$$

On note $\pi_p(u)$ la plus petite constante vérifiant (2). Cette notion a été introduite par Pietsch. cf. [7] . Une probabilité cylindrique λ sur X est dite "de type p" au sens de [10] si les formes linéaires continues sur X sont dans L^p relativement à λ et si l'application linéaire associée $T : X' \to L^p$ est un opérateur borné.

Un opérateur $u : X \to Y$ est dit p-radonifiant à valeurs dans $(Y'',\sigma(Y'',Y'))$ si pour toute probabilité cylindrique λ de type p sur X , l'image $u(\lambda)$ est de Radon sur $(Y'',\sigma(Y'',Y'))$ et telle que

$$\int_{Y''} \|y\|^p \; u(\lambda)(dy) < \infty .$$

On montre alors qu'il existe une constante C telle que, pour toute λ comme ci-dessus

$$(3) \qquad \left(\int \|y\|^p \; u(\lambda)(dy)\right)^{1/p} \leq C \sup \left\{\left(\int |\xi(x)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} \;\middle|\; \xi \in X' \, \|\xi\| \leq 1\right\}$$

On notera $R_p(u)$ la plus petite constante vérifiant (3).
On notera l'analogie entre (2) et (3).
Dans le cas $1 \leq p < \infty$, on sait (cf. [10] exposé n° 11) que ces deux notions coincident, et l'on a

(4) $\pi_p(u) = R_p(u)$ pour tout u p-sommant de X dans Y .

De plus si $p > 1$, ou bien si Y est réflexif, on montre (en utilisant le théorème de Phillips) que les mesures images $u(\lambda)$ sont de Radon sur Y lui-même, pour toute λ de type p sur X . Dans ce cas on dit simplement que u est p-radonifiant.

Schwartz a montré dans [10] que si X a la propriété d'approximation métrique, le résultat précédent (4) s'étend au cas $0 < p < 1$.

Notre principal résultat (qui suit) montre que l'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'approximation en général.

THÉORÈME 1. Soit $0 < p < 1$. Il existe un espace de Banach séparable X et un plongement isomorphique $i : \ell^2 \to X$ tel que ${}^t i : X' \to \ell^2$ soit p-sommant, ainsi qu'un espace de probabilité $(\Omega,\mathbb{P})$ et un opérateur borné $T : X \to L_p(\Omega,\mathbb{P})$ tels que $T\circ i$ soit un isomorphisme de ℓ^2 sur son image.

Note : On pourrait aisément modifier la construction pour faire de i un plongement isométrique. Le théorème 1 est démontré après l'énoncé du lemme 6.

Montrons tout d'abord que le théorème 1 conduit bien au contre-exemple annoncé. Pour cela, on rappelle qu'un opérateur $T : Z \to L^p$ est dit borné pour l'ordre si l'ensemble $K = \{Tz \mid z \in Z \ \ \| z \| \leq 1\}$ est borné pour l'ordre dans L^p, c'est-à-dire s'il existe φ dans L^p tel que

$$f \leq \varphi \qquad \forall f \in K .$$

L'exemple suivant nous sera utile : supposons que $Z = \ell_2$, soit (e_n) la base canonique de ℓ^2 et soit $f_n = Te_n$. On voit aisément que T est borné pour l'ordre ssi

$$\left(\sum_1^\infty |f_n|^2\right)^{1/2} \in L^p .$$

Notons que si $p \leq 2$

$$\left\| \left(\sum |f_n|^2\right)^{1/2} \right\|_p \geq \left(\sum \|f_n\|_p^2\right)^{1/2} .$$

Par conséquent, si $\inf_n \| f_n \|_p > 0$, l'opérateur T n'est pas borné pour l'ordre.

Le rapport entre "p-radonifiant" et "borné pour l'ordre" est décrit par le lemme suivant, qui est connu (cf. [10] ou [4]).

LEMME 2. Soit $u : X \to Y$ p-radonifiant à valeurs dans $(Y'', \sigma(Y'',Y'))$ et soit $T : X' \to L^p$ un opérateur à valeurs dans un espace L^p, alors $T \circ {}^t u : Y' \to L^p$ est borné pour l'ordre. De plus, on a :

$$\left\| \sup_{\substack{\xi \in Y' \\ \|\xi\| \leq 1}} |T \circ {}^t u(\xi)| \right\|_p \leq R_p(u) \, \| T \|. \tag{5}$$

Note : La borne supérieure dans (5) est prise au sens du treillis L^p.

Démonstration : Supposons que $L^p = L^p(M,\Sigma,m)$ pour un espace mesuré (M,Σ,m). Si m est une mesure finie, le lemme résulte de [10].

Le cas général en résulte aisément : on se restreint à des parties de mesure finie et on écrit la norme L^p comme la borne supérieure des normes des restrictions.

On a alors l'exemple annoncé :

PROPOSITION 3. L'opérateur ${}^t i$ du théorème 1 (qui est p-sommant) n'est pas p-radonifiant.

Démonstration : La seule difficulté consiste à remplacer $T : X \to L_p$ par une extension $\tilde{T} : X'' \to L_p$. Comme $L_p' = \{0\}$, on ne peut pas utiliser la bitransposition. On s'en tire néanmoins en utilisant les ultraproduits. En effet, on sait qu'il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur un ensemble I tel que l'ultrapuissance associée, que l'on notera $\hat{X} = X^I/\mathscr{U}$, contienne X'' isométriquement. Plus précisément, notons $j : X \to \hat{X}$ le plongement canonique qui envoie un élément x de X sur la classe modulo $\mathcal{U}$ de la famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que $x_i = x$ pour tout i. Notons $j_1 : X \to X''$ le plongement canonique.

On peut choisir $\mathcal{U}$ de telle sorte qu'il existe un plongement isométrique $j_2 : X'' \to \hat{X}$ tel que $j_2 j_1 = j$. Il s'agit du principe dit de "réflexivité locale" tel qu'il est formulé par Stern dans [11].

On considère alors $\widehat{L^p} = L^p(\Omega, \mathbb{P})^I/\mathcal{U}$.

On note $h : L^p \to \widehat{L^p}$ le plongement canonique (isométrique). Soit $\hat{T} : \hat{X} \to \widehat{L^p}$ l'opérateur obtenu à partir de T par ultrapuissance. On a évidemment $\hat{T}j = hT$. On sait que $\widehat{L^p}$ est un espace L^p abstrait (cf. [9]), ce qui signifie qu'il est isométrique, avec sa structure d'ordre, à un espace $L^p(M,\Sigma,m)$ sur un espace mesuré.

Supposons par l'absurde que ${}^t i$ soit p-radonifiant (noter que ℓ^2 étant réflexif, il n'y a pas lieu de considérer ${}^t i$ à valeurs dans un bidual). D'après le lemme 2, il en résulte que le composé $\hat{T} j_2 {}^{tt} i$

$$\ell^2 \xrightarrow{{}^{tt}i} X'' \xrightarrow{j_2} \hat{X} \xrightarrow{\hat{T}} \widehat{L^p}$$

doit être borné pour l'ordre dans $\widehat{L^p}$. Mais ${}^{tt}i = j_1 i$ donc $\hat{T} j_2 {}^{tt} i = \hat{T} j i$, et comme $\hat{T}j = hT$, on a $\hat{T} j_2 {}^{tt} i = hTi$.

Donc hTi doit être borné pour l'ordre, or hTi est un isomorphisme de ℓ^2 sur son image, en particulier $\inf_n \| hTi(e_n) \| > 0$, ce qui lui interdit (d'après les remarques précédant le lemme 2) d'être borné pour l'ordre. Cette contradiction termine la démonstration.

Pour démontrer le théorème 1, les deux lemmes suivants sont essentiels.

LEMME 4. <u>Soit</u> X <u>un espace de Banach.</u>
<u>Soit</u> (D_n, μ_n) <u>une suite d'espaces de probabilités et soit</u> $v_n : L^1(\mu_n) \to X$ <u>une suite d'opérateurs tels que</u> $\| v_n \| \leq 1$ <u>pour tout</u> n.
<u>Soit</u> $0 < p < q < r < \infty$, <u>avec</u> $p < 1$. <u>On suppose qu'il existe</u> $C \geq 1$ et $K > 0$ <u>tels que</u> : $\forall n \geq 0 \quad \forall \xi \in X'$

$$\| {}^t v_n \xi \|_{L^r(\mu_n)} \leq K C^{n+1} \| {}^t v_{n+1} \xi \|_{L^q(\mu_{n+1})} .$$

<u>Alors, l'opérateur</u> $u_o : X' \to L^r(\mu_o)$ <u>défini par</u> $u_o \xi = {}^t v_o \xi$ (<u>considéré comme élément de</u> $L^r(\mu_o)$) <u>est</u> <u>p-sommant</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit θ dans $]0,1[$ déterminé par $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r}$. Notons simplement $\| {}^t v_n \xi \|_r$ au lieu de $\| {}^t v_n \xi \|_{L^r(\mu_n)}$.
On a par Hölder

$$\| {}^t v_n \, \xi \|_r \leq K C^{n+1} \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_p^{1-\theta} \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_r^{\theta} \ .$$

Soit $a_n = \exp(-an)$, avec $a > 0$ à préciser ultérieurement. On pose $b_n = C^{\frac{n+1}{1-\theta}} K^{\frac{1}{1-\theta}}$. Soit

$$A = \sum_{n \geq 0} a_n \, \| {}^t v_n \, \xi \|_r$$

et

$$B = \sum_{n \geq 0} a_n b_n \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_p \ .$$

On a :

$$A \leq \sum_{n \geq 0} a_n \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_r^{\theta} \; (b_n \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_p)^{1-\theta}$$

soit par Hölder

$$A \leq \Big(\sum_{n \geq 0} a_n \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_r \Big)^{\theta} B^{1-\theta} \ .$$

Mais $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_r \leq e^a \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_r$

$$\leq e^a A \ ,$$

d'où

$A \leq (e^a A)^{\theta} \, B^{1-\theta}$ d'où l'on déduit

$A \leq \exp(\frac{a\theta}{1-\theta}) \; B = C'B$ avec $C' = \exp(\frac{a\theta}{1-\theta})$.

Finalement, on a

$$\| u_o \, \xi \| = \| {}^t v_o \, \xi \|_r \leq A \leq C'B$$

$$\leq C' \Big(\sum_{n \geq 0} (a_n b_n)^p \, \| {}^t v_{n+1} \, \xi \|_p^p \Big)^{1/p}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\pi_p(u_o) \leq C' \, \Big(\sum_{n \geq 0} (a_n b_n)^p \Big)^{1/p} \ .$$

Il reste seulement à choisir $a > 0$ assez grand pour que $\Sigma (a_n b_n)^p < \infty$, l'opérateur u_o est alors p-sommant.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Le lemme précédent est une variante sur des idées apparues dans [5]. Nous utiliserons dans toute la suite les notations suivantes : Soit $D = \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité uniforme que l'on notera μ dans toute la suite. Soit $\varepsilon_n : D \to \{-1,+1\}$ la n-ième coordonnée et soit $R \subset L^1(\mu)$ le sous-espace engendré

par les fonctions $\{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$.

Nous aurons besoin des inégalités classiques de Khintchine. Pour tout $0 < p < \infty$, il existe des constantes $A_p > 0$ et B_p telles que, pour toute suite (α_n) dans ℓ^2 on a :

$$A_p(\Sigma\, |\alpha_n|^2)^{1/2} \leq \| \Sigma\, \alpha_n \varepsilon_n \|_p \leq B_p(\Sigma\, |\alpha_n|^2)^{1/2}$$

Ces inégalités montrent que toutes les normes $L^p(\mu)$ sont équivalentes sur R, pour $0 < p < \infty$. Les meilleures constantes A_p et B_p sont calculées dans [3].

LEMME 5. <u>Soit</u> $0 < p < 1$.
<u>Il existe une constante</u> $C = C(p)$ <u>ne dépendant que de</u> p, <u>avec la propriété suivante : Quel que soit l'espace mesuré</u> (D_o, μ_o), <u>tout opérateur</u> $u : R \to L^p(D_o, \mu_o)$ <u>admet une extension</u> $\tilde{u} : L^1(\mu) \to L^p(D_o \times D, \mu_o \times \mu)$ <u>telle que</u> $\| \tilde{u} \| \leq C \| u \|$. <u>Précisément, on entend ici par "extension" que le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mu) & \xrightarrow{\tilde{u}} & L^1(D_o \times D, \mu_o \times \mu) \\ \cup & & \uparrow k \\ R & \xrightarrow{u} & L^p(D_o, \mu_o) \end{array}$$

<u>où</u> k <u>est le plongement isométrique naturel identifiant</u> $L^p(\mu_o)$ <u>avec l'espace des fonctions de</u> $L^p(\mu_o \times \mu)$ <u>qui ne dépendent que de la première coordonnée du produit</u> $D_o \times D$.
Ce résultat est tiré de [6]. Nous incluons la preuve pour la commodité du lecteur.

<u>Démonstration</u> : Soit f dans $L^p(\mu_o)$ et g dans $L^p(\mu)$, on note $f \otimes g$ la fonction définie sur $D_o \times D$ par $\begin{cases} f \otimes g\, (\omega_o, \omega) = f(\omega_o)\, g(\omega) \\ \forall\, \omega_o \in D_o \quad \forall\, \omega \in D \end{cases}$. De sorte que $kf = f \otimes 1$.

La démonstration est basée sur une inégalité de Burkholder sur la variation quadratique des martingales. Soit $\mathscr{A}_o$ la tribu triviale et $\mathscr{A}_n$ la tribu engendrée par $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. On sait que, pour tout f dans $L^1(\mu)$ la suite $f_n = \mathbb{E}^{\mathscr{A}_n} f$ converge dans $L^1(\mu)$ vers f. De plus, on a (cf. [2]) pour tout $p < 1$

$$\text{(6)} \qquad \| (\sum_{n \geq 1} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2} \|_p \leq B_p \| f \|_1$$

où B_p est une constante ne dépendant que de p.

Notons que $f_n - f_{n-1} = \varepsilon_n \varphi_{n-1}$ où φ_{n-1} est une fonction $\mathscr{A}_{n-1}$-mesurable.
D'autre part, on a trivialement

$$\text{(7)} \quad \forall\, (\alpha_n) \in \ell^2 \;\; \| \Sigma\, \alpha_n u(\varepsilon_n) \|_{L_p(\mu_o)} \leq \| u \| (\Sigma\, |\alpha_n|^2)^{1/2} .$$

On peut alors poser

$$\tilde{u}(f) = \sum_{n \geqq 1} u(\varepsilon_n) \otimes \varphi_{n-1} \tag{8}$$

D'après (6) et (7) on a, pour tous $k < m$

$$\Big\| \sum_{k<n\leqq m} u(\varepsilon_n) \otimes \varphi_{n-1} \Big\|_p \leqq \| u \| \, \Big\| \Big(\sum_{n=k}^{m-1} |\varphi_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p$$
$$\leqq B_p \, \| u \| \, \| f_m - f_k \|_1$$

ce qui prouve que la série du second membre de (8) est convergente dans $L^p(\mu_o \times \mu)$, et que l'on a

$$\| \tilde{u}(f) \|_p \leqq B_p \, \| u \| \, \| f \|_1 \ .$$

L'opérateur $\tilde{u}$ vérifie alors évidemment la propriété annoncée.

C.Q.F.D.

Pour démontrer le théorème 1, nous aurons besoin d'une construction explicite de certaines extensions d'espaces de Banach. Soient E, B deux espaces de Banach. Soit S un sous-espace fermé de B. Soit $u : S \to E$ un opérateur tel que $\| u \| \leqq \eta < 1$.

On considère l'espace $B \oplus E$ muni de la norme

$$\forall\, b \in B \quad \forall\, e \in E \qquad \| (b,e) \| = \| b \| + \| e \| \ .$$

Soit $\Gamma = \{(s,-us) \mid s \in S\}$.
On pose $E_1 = B \oplus E / \Gamma$.
Soit $\pi : B \oplus E \to E_1$ la surjection canonique. Il est facile de voir que l'opérateur $j : E \to E_1$ défini par $je = \pi(0,e)$ pour tout e dans E est un plongement isométrique.

De même, l'opérateur $\tilde{u} : B \to E_1$ défini par $\tilde{u}b = \pi(b,0)$ est de norme 1 et le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tilde{u}"] & E_1 \\ S \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "u"] & E \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \tag{*}$$

est évidemment commutatif.

Cette construction a déjà été mise à profit pour construire des espaces de Banach X tels que $X \hat{\otimes} X = X \check{\otimes} X$ et ne possèdant pas la propriété d'approximation. cf. [8].

Nous dirons que $(E_1, j, \tilde{u})$ sont associés à (E,u,S,B) . Cette extension E_1 de E a un caractère de minimalité pour le diagramme (*). Voir [1] pour plus de détails. Nous aurons besoin ici de l'observation suivante :
Soit $0 < p < 1$ et soit s tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{s}$.

Soit $\varphi : B \to L^p$ et $\psi : E \to L^p$ des opérateurs tels que $\psi u = \varphi_{|S}$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & & L^p \\
& E_1 \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] & \\
S \arrow[uu, hook] \arrow[r, "u"'] & E \arrow[u, "j"] \arrow[uur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

On suppose que $\| \varphi \| \leqq \delta \| \psi \|$.
Alors il existe un opérateur $\tilde{\psi} : E_1 \to L^p$ étendant ψ (i.e. tel que $\tilde{\psi} j = \psi$) , tel que $\widetilde{\tilde{\psi} u} = \varphi$, et vérifiant

$$(9) \qquad \| \tilde{\psi} \| \leqq (1 + \delta^s)^{1/s} \| \psi \| .$$

Posons en effet, pour $x = \pi(b,e)$ dans E_1

$$\tilde{\psi} x = \varphi b + \psi e .$$

Cette définition ne dépend que de x et non du choix de (b,e) .
On a évidemment $\widetilde{\tilde{\psi} u} = \varphi$ et $\tilde{\psi} j = \psi$.
De plus

$$\begin{aligned} \| \tilde{\psi} x \|_p &\leqq (\| \varphi b \|_p^p + \| \psi e \|_p^p)^{1/p} \\ &\leqq \| \psi \| (\delta^p \| b \|^p + \| e \|^p)^{1/p} \quad \text{d'où par Hölder} \\ &\leqq \| \psi \| (1 + \delta^s)^{1/s} (\| b \| + \| e \|) , \end{aligned}$$

soit finalement $\| \tilde{\psi} x \|_p \leqq \| \psi \| (1 + \delta^s)^{1/s} \| x \|$, ce qui établit (9) .

Le lemme suivant est le point central de la démonstration du théorème 1.

LEMME 6. Soit q tel que $1 < q < 2$.
Il existe une constante K , une suite d'espaces de Banach (X_n) , une suite de plongements isométriques $j_n : X_n \to X_{n+1}$, et deux suites d'opérateurs $V_n : L^1(\mu) \to X_n$ et $T_n : X_n \to L^p(D^{n+1}, \mu^{n+1})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $X_o = L^1(\mu)$, V_o est l'identité de $L^1(\mu)$ et $T_o : L^1(\mu) \to L^p(D,\mu)$ est l'injection naturelle.

(ii) $\| T_{n+1} \| \leqq (1 + \delta_{n+1}^s)^{1/s} \| T_n \|$ où $\delta_{n+1} = 2^{-n-1}$

et $\frac{1}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{s}$ *comme précédemment.*

De plus, T_{n+1} *est une extension de* T_n , *c'est-à-dire* $T_{n+1}\, j_n = k_n T_n$, *où*
$k_n : L^p(D^{n+1}) \to L^p(D^{n+1} \times D)$ *est le plongement décrit précédemment* (cf. lemme 5).

(iii) $\| V_n \| \leqq 1$ *pour tout* $n \geqq 0$.

(iv) $\forall\, \xi \in X'_{n+1}$

$$\| {}^t(j_n V_n)\, \xi \|_2 \leqq K\, 2^{n+1} \, \| {}^tV_{n+1}\, \xi \|_q \ .$$

Le théorème 1 est une conséquence immédiate du lemme 6. En effet, soit $X = \overline{\cup X_n}$ la complétion de la réunion des (X_n) . On peut supposer pour simplifier que X_n est une suite croissante de sous-espaces de X dont la réunion est dense. Soit alors $v_n : L^1(\mu) \to X$ l'opérateur V_n considéré comme à valeurs dans X . D'après (iv) ci-dessus, les hypothèses du lemme 4 sont satisfaites avec $r = 2$, $C = 2$. Il en résulte que $u_o = \underline{J}\,{}^tv_o : X' \to L^2(\mu)$,(où $\underline{J} : L^\infty(\mu) \to L^2(\mu)$ est l'injection naturelle) est un opérateur p-sommant.

Considérons alors $R \subset L^1(\mu) = X_o \subset X$. Soit $\beta : R \to X$ l'inclusion correspondante. On a $\beta = v_o\, \gamma$ où $\gamma : R \to L^1(\mu)$ est l'injection naturelle. On sait d'après les inégalités de Khintchine que R est isomorphe à ℓ^2 . Soit $\alpha : \ell^2 \to R$ un isomorphisme.

Posons $i = \beta\alpha : \ell^2 \to X$.

Il est clair que i induit un isomorphisme de ℓ^2 sur $i(\ell^2)$.

Montrons que ${}^ti$ est p-sommant.

Cela résulte de la factorisation ${}^t\beta = Q\, u_o$ où $Q : L^2(\mu) \to R'$ est la transposée de l'injection de R dans $L^2(\mu)$, qui est bornée d'après les inégalités de Khintchine. Il en résulte que ${}^t\beta$ et donc ${}^ti$ est p-sommant.

D'après la propriété (ii) on a

$$\| T_{n+1} \| \leqq \prod_{i=1}^{i=n+1} (1 + \delta_i^s)^{1/s} \, \| T_o \| \ .$$

Comme le produit infini $\Pi(1 + \delta_i^s)$ converge, il existe par densité un opérateur borné $T : X \to L^p(D^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$ qui étend T_o au sens de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ T\ } & L^p(D^{\mathbb{N}}) \\ \cup & & \uparrow \tilde{k} \\ X_o & \xrightarrow{\ T_o\ } & L^p(D) \end{array}$$

où $\tilde{k} : L^p(\mu) \to L^p(\mu^{\mathbb{N}})$ est l'opérateur identifiant $L^p(\mu)$ avec le sous-espace de $L^p(\mu^{\mathbb{N}})$ formé des fonctions ne dépendant que de la première coordonnée sur $D^{\mathbb{N}}$.

L'opérateur $T \circ \beta$ coïncide avec $\tilde{k}\, T_{o|R}$ d'où $T \circ i = \tilde{k}\, T_{o|R}\, \alpha$ et d'après les inégalités de Khintchine $T_{o|R}$ est un isomorphisme, donc $T_o i$ induit un isomorphisme de ℓ^2 sur $T\,i(\ell^2)$. Cela termine la démonstration du théorème 1 . Reste à compléter la

Démonstration du lemme 6 : La démonstration se fait par récurrence. Supposons construits $X_o \subset \ldots \subset X_n$ ainsi que $V_0, V_1, \ldots, V_n$ et $T_o, \ldots, T_n$. Soit $J : L^2(\mu) \to L^1(\mu)$ l'injection naturelle. Comme $L^2(\mu)$ est isométrique à ℓ^2 , il est isomorphe à R d'après les inégalités de Khintchine. Soit $S : R \to L^2(\mu)$ un isomorphisme tel que $\| S \| \leq 1$ $\| S^{-1} \| \leq A_1^{-1}$.

On considère l'opérateur

$$u : R \to X_n$$

défini par $u = \eta V_n J S$, où η sera précisé ultérieurement $0 < \eta < 1$. Notons que $\| u \| \leq \eta \leq 1$. On peut donc appliquer la construction décrite ci-dessus. On trouve alors un espace X_{n+1} , un plongement isométrique $j_n : X_n \to X_{n+1}$ et un opérateur $\tilde{u} : L^1(\mu) \to X_{n+1}$ associés à $(X_n, u, R, L^1(\mu))$, tels que

$$\tilde{u}_{|R} = j_n u \quad \text{et} \quad \| \tilde{u} \| \leq 1 .$$

On pose alors $V_{n+1} = \tilde{u}$, d'où $\| V_{n+1} \| \leq 1$.

D'après le lemme 5, l'opérateur

$$T_n u : R \to L_p(\mu^{n+1})$$

admet une extension en un opérateur $\varphi : L^1(\mu) \to L^p(\mu^{n+2})$ tel que $\| \varphi \| \leq C \| T_n u \| \leq C\eta \| T_n \|$.
Soit $\psi : X_n \to L^p(\mu^{n+2})$ l'opérateur T_n considéré comme à valeurs dans $L^p(\mu^{n+2})$, i.e. $\psi = k_n T_n$.
On a $\| \psi \| = \| T_n \|$, donc

$$\| \varphi \| \leq \delta \| \psi \| \quad \text{avec} \quad \delta = C\eta .$$

D'après les remarques précédant le lemme 6, il existe un opérateur $T_{n+1} : X_{n+1} \to L^p(\mu^{n+2})$ tel que $\| T_{n+1} \| \leq (1 + \delta^s)^{1/s} \| T_n \|$ et étendant T_n , c'est-à-dire tel que $T_{n+1|X_n} = k_n T_n$.

On choisit $\delta = 2^{-n-1}$, d'où $\eta = C^{-1} 2^{-n-1}$.

Revenons maintenant au rapport entre V_n et V_{n+1} tel qu'il est décrit au point (iv).

Puisque $V_{n+1} = \tilde{u}$, on a pour tout ξ dans X'_{n+1}

$$\| {}^t V_{n+1} \xi \|_q = \| {}^t \tilde{u} \xi \|_q .$$

$$\begin{array}{ccccccc} L^1(\mu) & & \xrightarrow{\qquad\qquad V_{n+1} \qquad\qquad} & & & & X_{n+1} \\ \cup & & & & & & \cup \\ R & \xrightarrow{S} & L^2(\mu) & \xrightarrow{J} & L^1(\mu) & \xrightarrow{\eta V_n} & X_n \end{array}$$

L'injection $\gamma : R \to L^1(\mu)$ se factorise en $R \xrightarrow[A]{} L^{q'}(\mu) \xrightarrow[B]{} L^1(\mu)$ où B est l'injection naturelle de $L^{q'}$ dans L^1.

D'où $\| {}^t V_n \, {}^t j_n \, \xi \|_2 = \| {}^t(j_n V_n) \, \xi \|_2$

$$= \| {}^t(j_n V_n J) \, \xi \|_2$$

$$\leq \| S^{-1} \| \; \|{}^t(j_n V_n J S) \, \xi \|_{R'}$$

mais $j_n V_n J S = \frac{1}{\eta} j_n u = \frac{1}{\eta} \tilde{u}_{|R} = \frac{1}{\eta} V_{n+1}\gamma$ où $\gamma : R \to L^1(\mu)$ est l'injection naturelle.

D'où

$$\| {}^t(j_n V_n) \, \xi \|_2 \leq A_1^{-1} \frac{1}{\eta} \| {}^t(V_{n+1} \gamma) \, \xi \|_{R'}$$

mais $\gamma = BA$ comme ci-dessus, d'où

$$\| {}^t(V_{n+1} \gamma) \, \xi \|_{R'} \leq \| A \| \; \| {}^t B \, {}^t V_{n+1} \, \xi \|_q$$

soit simplement $\leq \| A \| \; \|{}^t V_{n+1} \, \xi \|_q$.

On a donc finalement

$$\| {}^t (j_n V_n) \, \xi \|_2 \leq A_1^{-1} \, C \, 2^{n+1} \, \| A \| \; \|{}^t V_{n+1} \, \xi \|_q .$$

Comme $\| A \| \leq A_{q'}$, A_1^{-1} d'après les inégalités de Khintchine, on a le résultat annoncé (i.e. le point (iv) à l'ordre $n+1$) avec

$$K = A_1^{-2} \, C \, A_{q'} .$$

Pour finir, notons un corollaire du théorème 1.

COROLLAIRE 7 : Soit E_n le sous-espace de ℓ^2 engendré par les n premiers vecteurs de base.

Soit $i_n : E_n \to X$ la restriction de l'opérateur i du théorème 1 à E_n.

Il existe une constante C' indépendante de n telle que : $\pi_p({}^t i_n) \leq C'$ mais aussi $R_p({}^t i_n) \geq \frac{1}{C'} \sqrt{n}$.

La démonstration est tout-à-fait similaire à ce qui précède.

Remarque : La démonstration précédente montre même que la norme quasi-p-nucléaire de i_n est bornée indépendamment de n. On en déduit qu'il existe un opérateur quasi p-nucléaire pour $p < 1$ à valeurs dans ℓ^2 qui n'est pas p-radonifiant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURGAIN J. AND PISIER G.
- A construction of $\mathscr{L}_\infty$ spaces and related Banach spaces. Bol. Soc. Brasil. Mat. 14(1983), 109-123.

[2] BURKHOLDER D.
- Distribution function inequalities for martingales. Annals of Probability 1 (1973) 19-43.

[3] HAAGERUP U.
- The best constant in the Khintchine's inequalities. Studia Math. 70 (1981) 231-283.

[4] KWAPIEŃ S.
- On a theorem of Laurent Schwartz and its applications to absolutely summing operators. Studia Math. 38 (1970) 193-201.

[5] MAUREY B. ET PISIER G.
- Un théorème d'extrapolation et ses conséquences. C.R. Acad. Sci. Paris A, 277 (1973) p. 39

[6] MEZRAG L.
- Théorèmes de factorisation et de prolongement pour les opérateurs à valeurs dans L^p, $p < 1$. Thèse de 3ème cycle. Université Paris VI, Mai 1984.

[7] PIETSCH A.
- Operator ideals. North Holland.

[8] PISIER G.
- Counterexamples to a conjecture of Grothendieck. Acta Math. 151 (1983) 181-208.

[9] SCHREIBER M.
- Quelques remarques sur la stabilité par ultraproduits des espaces L^p, $p < 1$. Annales de l'Inst. Poincaré 8 (1972) 83-92.

[10] SCHWARTZ L.
- Séminaire sur les applications radonifiantes. Ecole Polytechnique 69/70. Paris.

[11] STERN J.
- Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz, 74/75. Ecole Polytechnique. Paris. exposé n° 7 et 8.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITE PARIS VI - Tour 46 - 4° Et.
4, Place Jussieu
75230 - PARIS CEDEX 05