PIERRE-LOUIS LIONS

Solutions de viscosité des équations élliptiques du second ordre complètement non linéaires

Astérisque, tome 132 (1985), p. 167-178

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__167_0>

SOLUTIONS DE VISCOSITÉ DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE COMPLÈTEMENT NON LINÉAIRES

P.L.LIONS

Table des matières

I . Introduction.

L'importance de la théorie des distributions de L. Schwartz dans l'étude des équations aux dérivées partielles nonlinéaires est bien connue : elle permet notamment de définir, en intégrant par parties, des notions de solutions peu régulières d'équations non linéaires "sous forme divergentielle", et ces solutions dites faibles permettent souvent d'étudier complètement les équations en question (résultats d'existence, d'unicité, de stabilité ; analyse numérique des solutions ; étude de la régularité...). Cependant, le mécanisme "d'intégration par parties" n'est possible, pour des solutions peu régulières, que pour des équations ayant une structure bien particulière ; en particulier il ne s'applique pas aux équations elliptiques, éventuellement dégénérées, du second ordre complètement nonlinéaires du type suivant :

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, F est une nonlinéarité donnée et u une fonction scalaire sur Ω . L'ellipticité de (1) se traduit par l'hypothèse :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}}(\xi,p,t,x)\right) \leq 0 \quad , \quad \text{(au sens des matrices symétriques)} \tag{2}$$

pour tous $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$, ξ matrice symétrique $N \times N$.

Nous présentons ici une notion de solution faible de (1) - dite solution de viscosité - qui permet une étude assez complète de (1). Nous verrons en particulier qu'une manière de concevoir cette notion est basée sur un mécanisme d'intégration par parties à l'intérieur de la non linéarité. Cette notion a été introduite par M.G. Crandall et l'auteur [5], [6] dans le cadre des équations de Hamilton-Jacobi du premier pordre - i.e. le cas où F ne dépend pas de ξ - , l'extension aisée aux équations générales (1) étant donnée dans P.L. Lions [9]. Cette notion permet d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité, d'approximation numérique..., dont nous présentons quelques exemples ci-dessous. De plus il a été observé (cf. P.L. Lions [9], [10]) que la notion de solutions de viscosité permet de justifier complètement la dérivation des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman en contrôle optimal stochastique grâce au principe de la programmation dynamique de R. Bellman.

Les motivations pour l'étude des équations (1) sont très diverses comme le font apparaître les exemples suivants :

Exemple 1 : Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Il s'agit là des équations fondamentales du contrôle optimal stochastique, elles se présentent sous la forme de (1) avec la restriction : F convexe - ou concave - par rapport à ξ. De façon équivalente, les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB en abrégé) sont données par :

$$(3) \qquad \sup_{\alpha \in A} \{A_\alpha u(x) - f_\alpha(x)\} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $(A_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'opérateurs elliptiques éventuellement dégénérés du second-ordre et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fonctions données. Nous renvoyons le lecteur, pour un traitement plus complet de (3), aux articles de revue P.L. Lions [11], [12].

Exemple 2 : Equations de Hamilton-Jacobi du 1^{er} ordre.

On considère maintenant :

$$(4) \qquad F(Du,u,x) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Les équations de Hamilton-Jacobi du 1^{er} ordre (HJ en abrégé) interviennent en Calcul des Variations, Contrôle Optimal et Jeux différentiels, Physique Mathématique...

Remarquons également que lorsque F est convexe par rapport à Du, (4) est alors un cas particulier - totalement dégénéré - des équations de HJB.

Exemple 3 : Equations de Monge-Ampère.

En géométrie différentielle interviennent les équations suivantes dites de Monge-Ampère :

$$\det(D^2u) = H(Du,u,x) \quad \text{dans } \Omega, \quad u \text{ convexe sur } \Omega. \tag{5}$$

Il est important de noter que cette équation est elliptique parce que l'on cherche des solutions u convexes, et l'hypothèse (2) est alors vérifiée en se restreignant aux matrices symétriques ξ nonnégatives. Pour un traitement plus complet de (5), nous renvoyons le lecteur à S.Y. Cheng et S.T. Yau [3]; P.L. Lions [13], [14] ; L. Cafarelli, L. Nirenberg et J. Spruck [2] ; N.V. Krylov [7], [8].

Dans ce qui suit, nous allons exposer quelques applications de la notion de solutions de viscosité de (1) et ce tout d'abord pour les équations de HJ du 1^{er} ordre (section II), puis pour les équations générales (1) (section III).

II . Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.

Pour définir cette notion, nous aurons besoin de la notation suivante : si $\varphi \in C(\Omega)$ et si $x \in \Omega$, on note $D^+\varphi(x)$ l'ensemble convexe fermé éventuellement vide défini par :

$$D^+\varphi(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^N \;/\; \limsup_{y \in \Omega,\, y \to x} \left[\{\varphi(y)-\varphi(x)-(p,y-x)\} |y-x|^{-1} \right] \leqslant 0 \right\}.$$

Cet ensemble est appelé le sur-différentiel de φ au point x.

De façon analogue on définit le <u>sous-différentiel</u> de φ au point x :

$$D^-\varphi(x) = \left\{p \in \mathbb{R}^N \ / \ \liminf_{x \in \Omega,\ y \to x} [\{\varphi(y)-\varphi(x)-(p,y-x)\} |y-x|^{-1}] \geq 0\right\} .$$

Suivant M.G. Crandall et l'auteur [6] (voir aussi [4],[10]), nous pouvons maintenant définir la notion de solutions de viscosité des équations de (HJ) :

(4) $\quad F(Du,u,x) = 0 \quad$ dans Ω ,

où $F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega)$.

<u>Définition</u> : i) $u \in C(\Omega)$ est appelée sous-solution de viscosité de (4) (resp. sursolution) si :

(6) $\quad F(p,u(x),x) \leq 0 \ , \ \forall\, x \in \Omega \ , \ \forall\, p \in D^+u(x)$

(resp. (7) $\quad F(p,u(x),x) \geq 0 \ , \ \forall\, x \in \Omega \ , \ \forall\, p \in D^-u(x)$).

ii) $u \in C(\Omega)$ est appelée solution de viscosité de (4) si u est à la fois sous-solution et sursolution de viscosité de (4) c'est-à-dire si (6) et (7) ont lieu.

<u>Remarques</u> : 1) Si u est différentiable au point x , il est alors évident que l'on a : $D^+u(x) = D^-u(x) = \{Du(x)\}$. On en déduit donc d'une part que toute solution classique de (4) (i.e. $u \in C^1(\Omega)$) est solution de viscosité de (4), et d'autre part que toute solution de viscosité de (4) vérifie l'équation (4) en tout point de différentiabilité.

2) Ainsi que le montrent les exemples suivants, la définition précédente sélectionne des solutions dans la classe des fonctions localement Lipschitziennes vérifiant (4) p.p..

<u>Exemple 1</u> : $\left|\frac{du}{dx}\right| = 1$ sur $]0,1[$, $u(0) = u(1) = 0$.

Il est facile de vérifier que $u_0(x) = \mathrm{Min}(x,1-x)$ est solution de viscosité de l'équation précédente (et vérifie les conditions aux limites). De plus il existe une infinité de solutions du problème précédent vérifiant l'équation p.p. (en fait l'adhérence pour la topologie uniforme de ces solutions est l'ensemble des fonctions v lipschitziennes vérifiant : $|v'| \leqslant 1$ p.p. sur $]0,1[$, $v(0)=v(1) = 0$). Et on peut montrer (c'est une conséquence des résultats d'unicité décrits ci-dessous que u_o est l'unique solution de viscosité de :

$$\left|\frac{du}{dx}\right| - 1 = 0 \qquad \text{sur }]0,1[$$

vérifiant : $u \in C([0,1])$, $u(0) = u(1) = 0$.

Exemple 2 : $\frac{\partial u}{\partial t} + |Du|^{\alpha} = 0$ sur $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$, $u|_{t=0} = 0$,
où $N \geqslant 1$, $\alpha > 0$. La nonlinéarité $F(p,s,y)$ correspondante est alors : $F(p,s,y) = F(p) = |p'|^{\alpha} + p_{N+1}$, $\forall\ p = (p',p_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Bien sûr $u(x,t) = 0$ est solution classique et donc de viscosité de l'équation ; et $u(x,t) = \mathrm{Min}\ (|x-x_o|-t\ , 0)$ est C^{∞} par morceaux, lipschitzienne, vérifie la condition initiale et l'équation p.p. (où x_o est quelconque dans $\mathbb{R}^N$) mais n'est pas solution de viscosité .

Il est possible de donner diverses formulations équivalentes de la définition précédente : la proposition qui suit (tirée de M.G. Crandall, L.C. Evans et P.L. Lions [4]) en fournit une :

Proposition I.1 : Soit $u \in C(\Omega)$, u est sous-solution (resp. sur-solution de viscosité) de (4) si et seulement si, pour tout $\varphi \in C^1(\Omega)$, on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de maximum local de } u-\varphi \text{ , on a} \\ F(D\varphi(x_o),u(x_o),x_o) \leqslant 0 \end{cases}$$

(resp.

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de minimum local de } u-\varphi \text{ , on a} \\ F(D\varphi(x_o),u(x_o),x_o) \geqslant 0 \end{cases} \quad) .$$

Remarques : 1) L'énoncé précédent reste exact si on remplace C^1 par C^2 ou C^∞ ou si on remplace maximum local par maximum global, maximum local strict ou bien maximum global strict.

2) Au vu de cette formulation, on constate que l'on a "dérivé par parties" à l'intérieur de F en remplaçant Du par $D\varphi$ au point de maximum x_o .

A titre d'exemple, nous allons donner un résultat d'unicité pour le problème suivant :

$$(4') \qquad F(Du,u,x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

Des résultats analogues ont lieu pour le problème de Cauchy, ou pour des problèmes aux limites (cf. M.G. Crandall et P.L. Lions [6]). Nous aurons besoin des hypothèses suivantes sur F :

$$(10) \qquad F(p,t,x) \in BUC(\overline{B}_R \times [-R,+R] \times \mathbb{R}^N) \quad , \quad \forall\, R < \infty$$

$$(11) \qquad \forall\, R < \infty \ , \ \exists \gamma > 0 \ ,$$

$$F(p,t,x) - F(p,s,x) \geqslant \gamma(t-s) \quad \text{si} \quad t,s \in \mathbb{R} \ , \ x,p \in \mathbb{R}^N$$

$$(12) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big\{ \sup \, [\, |F(p,t,x)-F(p,t,y)| \ / \ |t| \leqslant R \ , \ (|p|+1)|x-y| \leqslant \varepsilon] \Big\} = 0 \ , \ \forall\, R < \infty$$

ou

$$(13) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big\{ \sup \, [\, |F(p,t,x)-F(p,t,y)| \ / \ |t| \leqslant R_1 \ , \ |p| \, |x-y| \leqslant R_2 \ , \ |x-y| \leqslant \varepsilon] \Big\} = 0$$

pour tous $R_1, R_2 < \infty$.

Théorème I.1 : On suppose (10) et (11). Soient $u,v \in C_b(\mathbb{R}^N)$ respectivement sous et sursolution de viscosité de (4'). On suppose enfin que : ou bien (13) a lieu ; ou bien (12) a lieu et $u,v \in BUC(\mathbb{R}^N)$; ou bien $u,v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Alors : $u \leqslant v$ sur $\mathbb{R}^N$.

Ce résultat démontré dans M.G. Crandall et P.L. Lions [6] est basé sur des lemmes du type suivant :

Lemme I.1 : Soient $u,v \in C_o(\mathbb{R}^N)$ tels que : $\max\limits_{\mathbb{R}^N} (u,v) > 0$. Il existe deux suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ de $\mathbb{R}^N$ vérifiant : $x_n, y_n \underset{n}{\rightarrow} x_o$, $(u-v)(x_o) = \max\limits_{\mathbb{R}^N} (u,v)$ et $D^+u(x_n) \cap D^-v(y_n) \neq \emptyset$.

Donnons maintenant un résultat d'existence :

Théorème I.2 : On suppose (10), (11) et ou bien (12), ou bien :

(14) $\qquad \lim\limits_{|p| \to \infty} F(p,t,x) > 0$, uniformément pour t,x bornés.

Alors il existe $u \in BUC(\mathbb{R}^N)$ solution de viscosité de (4). De plus si (14) a lieu, $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Dans le cas où (14) a lieu, ce résultat est dû à P.L. Lions [10], [15], tandis que le cas où (12) a lieu a été partiellement traité dans [10],[15] puis dans P. Souganidis [17] , le résultat final étant dû à G. Barles [1].

Signalons enfin que la notion de solutions de viscosité a permis de résoudre de nombreux problèmes relatifs aux équations de Hamilton-Jacobi : approximation numérique, liens avec le contrôle optimal et les jeux différentiels, problèmes asymptotiques, théorie des semi-groupes, perturbations singulières...

III . Equations du second-ordre.

Les notations et définitions ci-dessus s'étendent comme suit : soit $\varphi \in C(\Omega)$, le surdifférentiel d'ordre 2 de φ au point x de Ω est donné par :

$$D_2^+\varphi(x) = \Big\{ (\xi,p) \in V \times \mathbb{R}^N \; / $$

$$\limsup_{y \in \Omega,\; y \to x} \Big\{ [\varphi(y)-\varphi(x)-(p,y-x)-\tfrac{1}{2}(\xi\cdot(y-x),y-x)]\; |y-x|^{-2} \Big\} \leqslant 0 \Big\}$$

où $V = \{\xi$ matrice symétrique $N \times N\}$. De même le sous-différentiel d'ordre 2 de φ au point x est donné par :

$$D_2^- \varphi(x) = \Big\{(\xi, p \in V \times \mathbb{R}^N \; /$$

$$\liminf_{y \in \Omega,\, y \to x} \left\{[\varphi(y)-\varphi(x)-(p,y-x)-\frac{1}{2}(\xi\cdot(y-x),y-x)]\; |y-x|^{-2}\right\} \geq 0\Big\} .$$

Remarques : 1) $D_2^+\varphi(x)$ est un ensemble convexe fermé éventuellement vide. Si $(\xi,p) \in D_2^+\varphi(x)$ alors $(\eta,p) \in D_2^+\varphi(x)$ pour $\eta \geq \xi$.

2) Si φ est deux fois différentiable en x :

$$D_2^+\varphi(x) = \{(\xi, D\varphi(x)) \;/\; \xi \in V \;,\; \xi \geq D^2 u(x)\} .$$

On considère l'équation (1) où $F \in C(V \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega)$: l'ellipticité de (1) se traduisant par l'hypothèse :

(2') $\quad F(\xi,p,t,x) \leq F(\eta,p,t,x) \quad$ si $\quad \xi \geq \eta \,,\; p \in \mathbb{R}^N \,,\; t \in \mathbb{R},\; x \in \Omega$

Définition : i) $u \in C(\Omega)$ est appelée sous-solution de viscosité de (1) (resp. sursolution) si on a :

(15) $\quad F(\xi,p,u(x),x) \leq 0 \;,\; \forall\, x \in \Omega \,,\; \forall\, (\xi,p) \in D_2^+u(x) \,,$

(resp. (16) $\quad F(\xi,p,u(x),x) \leq 0 \;,\; \forall\, x \in \Omega \,,\; \forall\, (\xi,p) \in D_2^-u(x)$).

ii) $u \in C(\Omega)$ est appelée solution de viscosité de (1) si u est à la fois sous et sursolution de viscosité de (1) i.e. si u vérifie (15) et (16).

Remarques : 1) On vérifie aisément que $u \in C(\Omega)$ est solution de viscosité de l'équation de HJ (4) si et seulement si u est solution de viscosité au sens de la définition ci-dessus de (4) (considérée comme cas particulier de (1), en prenant F indépendante de ξ).

2) Si $u \in C^2(\Omega)$ est solution classique de (1), il est alors clair au vu de (2') que u est solution de viscosité de (1).

Le résultat qui suit étend cette remarque (cf. P.L. Lions [16]) :

Proposition II.1 : Soit $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ vérifiant

(1') $\qquad F(D^2u, Du, u, x) \leqslant 0$ p.p. dans Ω (resp. $\geqslant 0$) .

Alors u est sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de (1).

Remarque : Ce résultat n'est plus vrai si on remplace N par $p < N$.

De même qu'auparavant, on a la formulation équivalente suivante:

Proposition II.2 : Soit $u \in C(\Omega)$. Alors u est sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de (1) si et seulement si on a pour tout $\varphi \in C^2(\Omega)$:

$$(18) \quad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de maximum local de } u-\varphi \text{ , on a} \\ \qquad F(D^2\varphi(x_o), D\varphi(x_o), u(x_o), x_o) \leqslant 0 \quad ; \end{cases}$$

(resp.

$$(19) \quad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de minimum local de } u-\varphi \text{ , on a} \\ \qquad F(D^2\varphi(x_o), D\varphi(x_o), u(x_o), x_o) \geqslant 0 \quad) . \end{cases}$$

Remarque : Là encore, on peut remplacer C^2 par C^∞ et maximum local par maximum global, maximum local strict ou maximum global strict.

Comme dans le cas des équations de HJ, il est possible d'obtenir, sous des hypothèses de structure sur F très générales, des résultats d'existence. L'unicité par contre est un problème ouvert important (notamment pour la théorie des jeux différentiels stochastiques) : il semble raisonnable de conjecturer que l'analogue du Théorème I.1 a lieu. Seuls sont connus le cas où la dimension N est inférieure à 2 et le cas des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (3) que nous détaillons ci-dessous. Soient $m \geqslant 1$, $\mathcal{A}$ un espace métrique séparable, $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une famille d'opérateurs du 2^e ordre dont les coefficients dépendent continûment de α , $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ deux familles de fonctions équicontinues en x , uniformément bornées, dépendant continûment de α . L'opérateur A_α est donné par :

$$A_\alpha = - a_{ij}(x,\alpha)\ \partial_{ij} - b_i(x,\alpha)\ \partial_i + c_\alpha(x)$$

où les coefficients a_{ij}, b_i, c vérifient :

$$(20) \qquad a_{ij}(x,\alpha) = \sigma_{ik}(x,\alpha)\ \sigma_{jk}(x,\alpha) \quad , \quad \inf_{\alpha,x} c_\alpha(x) > 0$$

$$(21) \qquad \sup_{\alpha \in A} \left\{ \|\sigma_{ik}(\cdot,\alpha)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)} + \|b_i(\cdot,\alpha)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \right\} < \infty ,$$

pour tous $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Nous conclusons avec les deux résultats suivants démontrés dans P.L. Lions [9] :

<u>Théorème II.1</u> : <u>Soit</u> $u \in C(\Omega)$, u <u>est sous-solution de viscosité de l'équation de</u> HJB (3) <u>si et seulement si</u> :

$$(22) \qquad A_\alpha u \leqslant f_\alpha \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \quad , \quad \forall\, \alpha \in A .$$

<u>Théorème II.2</u> : <u>Soient</u> $u,v \in C_b(\overline{\Omega})$ <u>respectivement sous et sur-solution de viscosité de l'équation de</u> HJB (3). <u>Alors on a</u> :

$$(23) \qquad \sup_{\overline{\Omega}} (u-v)^+ \leqslant \sup_{\partial\Omega} (u-v)^+ .$$

<u>Remarque</u> : Il est possible de remplacer dans (23) le sup sur $\partial\Omega$ par le sup sur "la partie de $\partial\Omega$ par laquelle sortent les processus de diffusion associés aux opérateurs A_α " , partie en général strictement incluse dans $\partial\Omega$ quand les opérateurs A_α dégénèrent.

Références :

[1] G. Barles : Contrôle impulsionnel déterministe, inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamilton-Jacobi. Thèse de 3^e cycle, Université Paris IX-Dauphine, 1983.

[2] L. Cafarelli, L. Nirenberg et J. Spruck : The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equations. Preprint.

[3] S.Y. Cheng et S.T. Yau : On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j) = F(x,u)$. Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), p. 41-68.

[4] M.G. Crandall, L.C. Evans et P.L. Lions : Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1983.

[5] M.G. Crandall et P.L. Lions : Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris, 292 (1981), p. 183-186.

[6] M.G. Crandall et P.L. Lions : Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), p. 1-42.

[7] N.V. Krylov : Bounds for nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in open sets. Math. USSR Izv., 47 (1983), p. 57-108 (en Russe).

[8] N.V. Krylov : On nonlinear degenerate elliptic equations. Math. Sbornik, 120 (1983), p. 311-330 (en Russe).

[9] P.L. Lions : Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part 2. Comm. P.D.E., 1983.

[10] P.L. Lions : Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations Pitman, London, 1982.

[11] P.L. Lions : On the Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Acta Applic. Math., 1 (1983), p. 17-41.

[12] P.L. Lions : Hamilton-Jacobi-Bellman equations and the optimal control of stochastic systems. A paraître dans Proc. Intern. Cong. Math. Warsaw 1983.

[13] P.L. Lions : Sur les équations de Monge-Ampère. I. Manuscripta Math., 41 (1983), p. 1-43.

[14] P.L. Lions : Sur les équations de Monge-Ampère. II. Arch. Rat. Mech. Anal., 1983, à paraître.

[15] P.L. Lions : Existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations. Ric. Mat. Napoli, 1983, à paraître.

[16] P.L. Lions : A remark on Bony maximum principle. Proc. Amer. Math. Soc., 1983.

[17] P. Souganidis : Phd, Univ. of Wisconsin-Madison, 1983.

P.L. Lions
Ceremade
Université Paris IX-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16