DAVID RUELLE

Du problème de la turbulence développée et de quelques obstacles à sa solution

Astérisque, tome 132 (1985), p. 231-241

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__231_0>

DU PROBLÈME DE LA TURBULENCE DÉVELOPPÉE ET DE QUELQUES OBSTACLES A SA SOLUTION

David RUELLE

... de ipsis calamitatum mearum experimentis consolatoriam ad absentem scribere decrevi, ut in comparatione mearum tuas aut nullas aut modicas temptationes recognoscas et tolerabilius feras.

(Abélard).

Introduction

La question de la turbulence hydrodynamique reste l'un des problèmes majeurs non résolus de la physique théorique. L'ambition de mon exposé n'est pas d'apporter une réponse à ce problème, ni de montrer comment il faut le résoudre, mais seulement d'éclairer certains des obstacles que l'on rencontrera nécessairement si l'on veut vraiment comprendre la turbulence.

Les manisfestations de la turbulence sont omniprésentes, et chacun peut les observer à son aise dans les flots d'un torrent ou les flammes du foyer. D'où l'impression trompeuse que la nature même de ce phénomène fascinant est assez accessible. En fait, si l'on veut dépasser une phénoménologie grossière on se heurte rapidement à des difficultés conceptuelles considérables, et qui ont plusieurs sources distinctes. Pour difficile qu'il soit devenu , le problème n'en reste pas moins fascinant, comme j'espère le montrer dans ce qui va suivre.

Je dédie cette petite étude à Laurent Schwartz. Il a parcouru certains des massifs montagneux à la limite des mathématiques et de la physique. Il sera sans doute de mon avis pour dire que l'aspect accueillant du versant physique est trompeur, et que le danger y est présent à chaque pas. Le versant mathématique est plus raide et plus sévère, mais la progression y est mieux assurée.

La turbulence faible.

Mon objet est de parler de la turbulence développée, par opposition au début de la turbulence, ou turbulence faible. Il est cependant nécessaire de dire quelques mots de la turbulence faible, qui est assez bien comprise depuis quelques années.

Nous allons considérer un fluide visqueux contenu dans un récipient borné. Pour maintenir le fluide dans un état turbulent, il faut agir sur lui, car sans action extérieure la dissipation freinerait le fluide jusqu'au repos. Nous choisirons une action extérieure indépendante du temps et nous décrirons l'évolution temporelle du fluide par une équation

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) \qquad (1)$$

où μ est un paramètre mesurant l'intensité de la force extérieure. (Notons que x varie dans un espace fonctionnel de dimension infinie). Pour μ assez petit*) les solutions de (1) tendent vers un état stationnaire (un point fixe de l'évolution temporelle). Quant μ est plus grand on peut avoir des solutions périodiques, quasi périodiques, ou des comportements plus compliqués correspondant au début de la turbulence.

Une analyse théorique et expérimentale détaillée a maintenant

*) En pratique μ est le nombre de Reynolds ou de Rayleigh.

montré que les comportements dynamiques observés dans un fluide visqueux à petit μ sont les mêmes que ceux présentés par une évolution temporelle générique de type (1) dans un espace de basse dimension*). Dans le domaine des petits μ, un fluide visqueux ne se distingue donc pas, du point de vue dynamique, d'un quelconque autre système dissipatif peu excité (système chimique ou électrique, etc.), ni d'une équation (1) choisie au hasard et intégrée numériquement. En particulier, on observe des bifurcations de Hopf, des doublements de fréquence, des cascades de Feigenbaum, des états quasi-périodiques, etc.

On observe aussi des attracteurs étranges. Nous n'essayerons pas de définir précisément cette notion mais - en gros - un attracteur A est un ensemble invariant pour l'évolution temporelle (1) et tel que les solutions voisines tendent vers A quant $t \to \infty$. L'attracteur est étrange si les solutions de (1) contenues dans A présentent le phénomène de dépendance sensitive des conditions initiales que nous allons maintenant décrire. Pour étudier l'évolution temporelle d'une petite perturbation d'une solution $x(t)$ de (1) on étudie l'équation linéarisée autour de $x(t)$. Soit $u(t)$ une solution de cette équation linéarisée. Sous des conditions assez générales (en fait : presque partout par rapport aux mesures invariantes) on démontre l'existence de l'exposant caractéristique (ou de Lyapounoff)

$$\lambda(x(0),u(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \| u(t) \| \quad .$$

On a dépendance sensitive des conditions initiales si un exposant caractéristique est (strictement) positif.

Le comportement dynamique d'un fluide est décrit par le comportement asymptotique d'une solution de (1), ou mieux par un "ensemble" de solutions, c'est-à-dire par une mesure de probabilité invariante pour l'évolution temporelle. Par définition, nous dirons que le fluide est laminaire si tous les exposants caractéristiques sont ≤ 0, et turbulent s'il existe un exposant > 0. La turbulence est donc décrite par des attracteurs étranges. Cette notion (Lorenz [10], Ruelle et Takens [18]) qui a bousculé certaines idées traditionnelles, est

---

*) On suppose que le dispositif expérimental évite les invariances ou quasi-invariances de group : pas de boîte très plate, etc.

maintenant bien établie*). Les solutions "turbulentes" de (1) présentent donc le phénomène de dépendance sensitive des conditions initiales, ce qui explique leur aspect chaotique.

Il semblerait que nous avons obtenu une compréhension satisfaisante de la turbulence faible. Un problème se pose cependant, qui est le premier d'une série de graves problèmes qui nous barrent l'accès à une vraie théorie générale de la turbulence. Ce premier problème concerne le choix d'une mesure invariante (par évolution temporelle) représentant l'"ensemble" des solutions turbulentes. Le fait est qu'un attracteur étrange porte typiquement une famille non dénombrable de mesures invariantes disjointes. On pense que les "bonnes" mesures sont caractérisées par leur stabilité pour de petites perturbations stochastiques, mais cette condition est difficile à exploiter en pratique**). C'est pourtant un problème essentiel, semblable au choix de l'"ensemble" de Gibbs en méchanique statistique de l'équilibre. Toute "théorie" de la turbulence fait, explicitement ou implicitement, un choix de mesure invariante, et ce choix peut être malencontreux.

Navier-Stokes.

L'équation la plus simple représentant l'évolution temporelle d'un fluide visqueux incompressible est l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j v_j\, \partial_j\, v_i + \nu\Delta v_i - \partial_i p + g_i \tag{2}$$

complétée par la condition d'incompressibilité

$$\partial_i\, v_i = 0 \ .$$

Dans ces équations (v_i) est le vecteur vitesse et p la pression (divisée par la densité) dont on cherche l'évolution temporelle.

*) Pour plus de détails, je renvoie le lecteur aux articles de revue de Swinney et Gollub [21], Ruelle [15], [16], et Eckmann [3]

**) Ce problème est discuté dans [14], voir aussi : L.-S. Young [22], Ledrappier [8].

On donne des conditions initiales et au bord (le fluide "colle" à la paroi), la constante ν est la viscosité cinématique, et (g_i) est une force extérieure.

La justification de (2) fait intervenir une hypothèse de réponse linéaire, et l'équation de Navier-Stokes ne représente donc qu'approximativement un fluide réel. Cependant, les expériences montrent que l'approximation est dans de nombreux cas très satisfaisante, et l'équation de Navier-Stokes a une forme plus simple et plus naturelle que les équations que l'on pourrait vouloir substituer à (2).

Dans le cas d'un fluide à 2-dimensions, on a un bon théorème d'existence et d'unicité pour les solutions de l'équation de Navier-Stokes (Leray, Ladyzhenskaya). Il n'en est malheureusement pas de même dans le cas physique de trois dimensions. Dans ce cas, suivant une idée de Leray [9]*) poursuivie par Scheffer [19],[20] puis Caffarelli, Kohn et Nirenberg [1], on définit des solutions "faibles" pour lesquelles on n'a pas nécessairement unicité, et pour lesquelles des singularités peuvent apparaître. On peut astreindre les singularités à être de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle égale à zéro dans l'espace-temps à 4-dimensions, comme l'ont montré Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En particulier les singularités ne peuvent pas former une courbe. On ne sait cependant toujours pas si les singularités sont effectivement présentes ou non. (Dans ce dernier cas on aurait en fait un théorème d'existence et d'unicité).

Il y a de bonnes raisons de croire que les singularités éventuelles des solutions de l'équations de Navier-Stokes n'ont pas un rapport direct avec la turbulence (voir plus bas la discussion de l'intermittence). Cependant le problème reste irritant, et l'on ne pourra pas dire que l'on comprend bien la turbulence tant qu'il ne sera pas éclairci.

---

*) Leray a établi l'existence de solutions faibles dans $\mathbb{R}^3$, puis Hopf [5] dans un domaine borné.

Cascade d'énergie et théorie de Kolmogorov.

Une idée fondamentale des théories modernes de la turbulence - on pourrait presque dire que c'est un dogme - est l'idée de la cascade d'énergie. On suppose que le fluide est alimenté en énergie dans les grandes longueurs d'onde spatiales*). On affirme alors que les processus non linéaires font cascader cette énergie vers les petites longueurs d'onde. L'image utilisée est celle de grands tourbillons ("large eddies") qui fissionnent en générations successives de tourbillons de plus en plus petits. La dissipation visqueuse (le terme en $\nu\Delta$ de (2)) est d'abord négligeable (on est dans le régime inertiel) et ne devient importante que pour les petits tourbillons, qui disparaissent d'ailleurs du fait de cette dissipation (c'est le régime visqueux).

On aimerait mettre un peu de chair mathématique sur les mots qui précèdent, et c'est là en fait le fond du problème de la turbulence. Il se trouve cependant que l'idée de cascade d'énergie, combinée à l'hypothèse naturelle que les tourbillons des différentes générations remplissent l'espace, fixe déjà la répartition d'énergie entre les diverses longueurs d'onde spatiales dans le régime inertiel (en utilisant des arguments purement dimensionnels). C'est la théorie de Kolmogorov (voir Kolmogorov [6], Landau et Lifshitz [7]). Il s'agit donc là d'un modèle plus que d'une vraie théorie, mais ce modèle s'est montré remarquablement utile. Nous verrons dans un moment quelles sont ses limitations.

Avant de poursuivre, il nous faut mentionner deux nouveaux problèmes importants à résoudre si l'on veut obtenir une vraie théorie de la turbulence. Le premier est central et évident, c'est de donner une existence mathématique aux tourbillons et au processus de fission en tourbillons plus petits. Le deuxième problème est plus subtil et concerne la limite de viscosité nulle. Puisque la dissipation visqueuse est négligeable dans le domaine inertiel, on est tenté de remplacer l'équation de Navier-Stokes par l'équation d'Euler obtenue en posant $\nu = 0$ dans (2). Cependant, les conditions au bord sont

*) Nous n'insisterons pas sur les difficultés qui se présentent expérimentalement pour alimenter un fluide en énergie seulement dans les grandes longueurs d'onde.

différentes pour Euler et Navier-Stokes, et l'utilisation directe de l'équation d'Euler ne s'est guère révélée très utile jusqu'ici. Existe-t-il donc une bonne manière d'éliminer la viscosité pour l'étude du régime inertiel ?

Intermittence et lois d'échelle.

On sait depuis assez longtemps que la théorie de Kolmogorov doit être corrigée pour tenir compte de l'intermittence spatiale. L'intermittence est un fait expérimental, il consiste en ce que, en régime turbulent, la "turbulence" est concentrée sur une petite fraction de volume occupé par le fluide. Plus précisément, le gradient de la vitesse fluctue de manière importante, et est grand sur une petite fraction du volume occupé par le fluide. (Rappelons que la partie antisymétrique du gradient est la vorticité, et que sa partie symétrique détermine la dissipation).

Mandelbrot [11],[12],[13] a fourni un modèle satisfaisant de l'intermittence, qui a été présenté de manière particulièrement claire et convaincante par Frisch, Sulem et Nelkin [4]. On suppose ici que dans la cascade d'énergie, les tourbillons issus de la fission d'un tourbillon donné n'occupent qu'une fraction (fixe) du volume occupé par le tourbillon initial. Si l'on fait l'hypothèse de cette loi d'échelle on peut calculer la distribution de l'énergie suivant les longueurs d'ondes et estimer les fonctions de corrélation des vitesses. S'il n'y avait pas de viscosité, la turbulence serait asymptotiquement concentrée sur un ensemble de dimension $D < 3$. La dimension D dépend de la loi d'échelle choisie et est donc le seul paramètre arbitraire du modèle. Ce paramètre peut être déterminé à partir des courbes expérimentales donnant les fonctions de corrélation des vitesses (Mandelbrot [12]) et l'on trouve $D \simeq 2{,}5$ à 2.6

Une conséquence de la loi d'échelle postulée est que toute la cascade d'énergie est parcourue en un temps fini. Cela suggère fortement que les solutions de l'équation sans viscosité (équation d'Euler) deviennent singulières en un temps fini *) . Pour Navier-Stokes la

*) Il y a d'autres arguments (Frisch) qui tendent à prouver qu'il en est bien ainsi.

situation est différente puisque la viscosité met un terme à la cascade d'énergie. On a d'ailleurs vu plus haut que la dimension possible pour les singularités est beaucoup plus petite que le D de Mandelbrot.

L'introduction d'une loi d'échelle pour rendre compte de l'intermittence est certainement très satisfaisante, mais fournit de nouveau un modèle plutôt qu'une théorie. Les problèmes indiqués au sujet de la théorie de Kolmogorov se retrouvent ici. En outre il faut comprendre pourquoi la turbulence est intermittente plutôt qu'homogène, et calculer la dimension D. Il faut aussi signaler la possibilité très réelle d'un comportement plus compliqué qu'une loi d'échelle. En effet la loi d'échelle postulée correspond à un point fixe pour une action de groupe (un groupe d'homothéties) et un comportement dynamique plus compliqué qu'un point fixe ne peut être exclu à priori (ni théoriquement ni expérimentalement).

Des expériences numériques dues à Chorin [2] fournissent une contribution intéressante au problème de l'intermittence. Chorin part de l'équation d'Euler, récrite comme une équation d'évolution pour la vorticité. Il calcule numériquement l'évolution pour un tube de vorticité et voit ce tube s'étirer et se replier sur lui-même. Il semble bien que l'on aboutit à une singularité en un temps fini, et la figure limite paraît se conformer à la dimension $D \simeq 2{,}5$ de Mandelbrot. Ce résultat est presque miraculeux, et pourrait être fallacieux ; il est néanmoins conforme à ce que nous savons de la physique de la turbulence. L'étirement des tubes de vorticité par exemple est un phénomène bien connu, et implique (par conservation de l'énergie) que les tubes se replient sur eux-mêmes. On a bien entendu posé brutalement la viscosité égale à zéro, mais comme on se place dans un espace infini, les "mauvaises" conditions au bord pour l'équation d'Euler sont oubliées. Enfin, il se peut bien que le problème de la recherche d'une "bonne" mesure invariante soit résolu automatiquement par les erreurs d'arrondi dans l'intégration des équations du mouvement (addition d'une "petite perturbation stochastique").

Exposants caractéristiques et turbulence.

Je voudrais terminer ce survol des problèmes de la turbulence par une brève mention d'idées personnelles récentes (voir [17]). Nous avons admis que, à faible nombre de Reynolds, les écoulements turbulents se distinguent des écoulements laminaires par des exposants caractéristiques > 0. Il est donc naturel d'étudier les exposants caractéristiques aussi à haut nombre de Reynolds. Ce problème est moins inabordable qu'il n'y paraît à première vue, car il est en partie linéaire. En effet on doit étudier l'équation de Navier-Stokes <u>linéarisée</u> près d'une solution donnée. Comme l'équation linéarisée a des rapports étroits avec l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique, on peut démontrer des inégalités limitant par exemple la production d'information par le fluide turbulent en termes de la dissipation d'énergie (voir [17]). Si l'on fait une "approximation classique" du problème de Schrödinger que nous venons de mentionner, et que l'on fait l'hypothèse d'une loi d'échelle, on trouve que la valeur $D = 2.6$ de la dimension joue un rôle privilégié. Cette valeur correspond assez bien à ce qui est observé expérimentalement. Cela ne démontre rien, bien sûr, mais indique peut-être que la solution des problèmes de la turbulence et de l'intermittence n'est pas aussi lointaine qu'on aurait pu le craindre.

Mentionnons pour finir que l'étirement dans l'espace des solutions de l'équation de Navier-Stokes qui correspond à l'existence d'exposants caractéristiques positifs permet de justifier qualitativement l'intermittence. On est cependant encore loin d'une vraie théorie.

D.RUELLE
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
France

Bibliographie

[1] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Commun. Pure Appl. Math. 35, 771-831 (1982).

[2] A.J. Chorin, The evolution of a turbulent vortex. Commun. math. Phys. 83, 517-535 (1982).

[3] J.-P. Eckmann, Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. Rev. Mod. Phys. 53, 643-654 (1981).

[4] U. Frisch, P.-L. Sulem, and M. Nelkin, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. J. Fluid Mech. 87, 719-736 (1978).

[5] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. Nachrichten 4, 213-331 (1951).

[6] A.N. Kolmogorov, Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR 30 299-303 (1941).

[7] L.D. Landau, and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1959.

[8] F. Ledrappier, Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï. Preprint.

[9] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63, 193-248 (1934).

[10] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. J. atmos. Sci. 20, 130-141 (1963).

[11] B. Mandelbrot, Les objets fractals : forme, hasard et dimension. Flammarion, Paris, 1975.
Revised English edition : Fractals, form, chance and dimension. Freeman, San Francisco, 1977.

[12] B. Mandelbrot, Intermittent turbulence and fractal dimension ; kurtosis and the spectral exponent 5/3+B, pp. 121-145 in Turbulence and the Navier-Stokes equations. Lecture Notes in Math. n° 565, Springer, New York, 1976.

[13] B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature. Freeman, San Francisco, 1982.

[14] D. Ruelle, What are the measures describing turbulence ? Progr. Theor. Phys. Suppl. 64, 339-345 (1978).

[15] D. Ruelle, Les attracteurs étranges. La Recherche 11, n° 108, 132-144 (1980).
English translation : Strange attractors, Math. Intelligencer 2, 126-137 (1980).

[16] D. Ruelle, Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence. Bull. Amer. Math. Soc. 5, 29-42 (1981).

[17] D. Ruelle, Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence. Commun. math. Phys. 87, 287-302 (1982).

[18] D. Ruelle and F. Takens, On the nature of turbulence. Commun. math. Phys. 20, 167-192 (1971).
Note concerning our paper "On the nature of turbulence" : Commun. math. Phys. 23, 343-344 (1971).

[19] V. Scheffer, Turbulence and Hausdorff dimension. pp. 174-183 in Turbulence and Navier-Stokes equation. Lecture Notes in Math. n° 565, Springer, Berlin, 1976.

[20] V. Scheffer, The Navier-Stokes equations on a bounded domain. Commun. math. Phys. 73, 1-42 (1980).

[21] H.L. Swinney and J.P. Gollub. The transition to turbulence. Phys. Today 31, n°8, 41-49 (1978).

[22] L.-S. Young, Bowen-Ruelle measures for certain piecewise hyperbolic maps. Preprint.