JEAN-PAUL ALLOUCHE

Arithmétique et automates finis

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 13-26
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__13_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.13-26

ARITHMÉTIQUE ET AUTOMATES FINIS

par

Jean-Paul ALLOUCHE

Introduction

Le calcul classique d'extraction d'une racine carrée permet de produire par exemple la suite des décimales de $\sqrt{2}$ de façon "algorithmique". Que recouvre en général la notion d'algorithme ? En un sens "naïf" on peut concevoir un algorithme comme une suite d'instructions prises dans un ensemble fini d'instructions, et permettant, par exemple, de fabriquer une suite finie ou infinie de nombres. En ce sens, et de façon toujours informelle, un algorithme fournit du déterminisme, de "l'antihasard".

Nous nous proposons ici de définir une classe d'algorithmes connus en informatique théorique sous le nom d'automates finis, et de montrer au cours d'une promenade à travers la théorie des nombres de nombreuses propriétés arithmétiques de ces automates : précisons tout de suite que l'algorithme évoqué ci-dessus du calcul de $\sqrt{2}$ ne rentre pas dans cette catégorie, il est, en un sens que nous ne préciserons pas ici, plus "complexe".

Le plan de cet article est le suivant ; après avoir défini la notion d'automate fini, on étudiera successivement les rapports avec : la théorie algébrique des nombres, les fractions continues, les systèmes de numération, la transcendance, les séries de Dirichlet, la répartition modulo un et l'analyse harmonique, l'itération des fonctions continues et les objets fractals, des problèmes de combinatoire. On terminera par un paragraphe où on montrera des rapports, via les automates finis, entre physique théorique et arithmétique.

I.- Automates finis ; définitions

1°) 2-automates

Un 2-automate A est constitué d'un ensemble fini S d'états, (dont l'un, noté i, est appelé état initial), de deux applications de S dans lui-même notées 0 et 1, et d'une application φ de S dans $\{0,1\}$.

L'image par A d'un entier n se calcule ainsi : on écrit n en base 2 : $n = c_{d-1}\, c_{d-2} \dots c_0$; les c_j valent 0 ou 1 et sont identifiés aux deux applications de S dans lui-même ci-dessus. On calcule alors

$$n.i = c_{d-1}\,(c_{d-2}(\dots(c_0(i)))) .$$

L'image de n par A est :

$$A(n) = \varphi(n.i) .$$

Donnons un exemple :

$$S = \{i,a,b\}$$

$$\begin{aligned} 0i &= a\ ,\ 1i = i\ . \\ 0a &= b\ ,\ 1a = i\ . \\ 0b &= i\ ,\ 1b = b\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(i) = \varphi(a) = 1 \\ &\varphi(b) = 0\ . \end{aligned}$$

Pour calculer $A(23)$, on écrit en base 2 : $23 = \overline{10111}$ d'où :

$A(23) = \varphi(10111i) = \varphi(1011i) = \varphi(101i) = \varphi{=}(10i) = \varphi(1a) = \varphi(i) = 1$.

La suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dite reconnue (ou engendrée) par le 2-automate A.

Une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dite reconnue par 2-automate, ou engendrée par 2-automate, ou 2-automatique, s'il existe un automate B tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u(n) = B(n) .$$

2°) 2-substitution

Soit E un alphabet (ensemble fini). On note E^* le monoïde libre engendré par E, les éléments de E^* sont dits mots sur E.

Une 2-substitution sur E est une application de E dans les mots de longueur 2 sur E. Cette application définit un morphisme de E^*, qui peut être prolongé en une application de $E^{\mathbb{N}}$ dans lui-même.

Par exemple soit $E = \{0,1\}$, on définit la 2-substitution σ sur E par :

$$\sigma(0) = 0\ 1$$
$$\sigma(1) = 1\ 0\ .$$

Il est clair que lorsque n tend vers $+\infty$, $\sigma^n(0)$ a une limite (pour la topologie de la convergence simple) dans $E^{\mathbb{N}}$, qui commence par

$$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots\ .$$

Cette suite limite est point fixe du prolongement de σ à $E^{\mathbb{N}}$, elle est connue sous le nom de suite de Thue-Morse.

Une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs 0 ou 1 est dite image d'un point fixe d'une 2-substitution, s'il existe un alphabet E, une 2-substitution σ sur E, une suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ point fixe du prolongement de σ à $E^{\mathbb{N}}$, et une application ψ de E dans $\{0,1\}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u(n) = \psi(v(n))\ .$$

3°) p-automate, p-substitution

Si p est un entier $\geqslant 2$, on définit de même :

. un p-automate : il y a p applications de l'ensemble S des états dans lui-même, notées $0,1,\ldots,p-1$, et l'application φ va de S dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$.
Pour le calcul de $A(n)$, n est écrit en base p.
Une suite est dite reconnue ou engendrée par p-automate, ou encore p-automatique, s'il existe un p-automate A tel que cette suite soit égale à la suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

. une p-susbstitution : c'est une application de E dans les mots de longueur p sur E.

Une suite $(u(n))_n$ à valeurs dans $\{0,\ldots,p-1\}$ est dite image d'un point fixe d'une p-substitution s'il existe un alphabet E , une p-substitution σ sur E , une suite $(v(n))_n$ point fixe du prolongement de σ à $E^{\mathbb{N}}$, et une application ψ de E dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u(n) = \psi(v(n)) \quad .$$

4°) Le théorème de Cobham ; exemples

Théorème de Cobham [14].- *Une suite est* p-*automatique si et seulement si elle est l'image d'un point fixe d'une* p-*substitution*.

Exemples (voir [13] pour plus de détails) :

. la suite de Thue-Morse évoquée en b) ci-dessus.

. la suite de pliage régulier de papier : si l'on plie toujours dans le même sens en 2, 4, 8, ... une feuille de papier, la suite des plis obtenus en dépliant est 2-automatique.

. la suite de Rudin-Shapiro : toutes les suites $(\varepsilon_n)_n$ à valeurs ± 1 vérifient

$$\sup_{\theta} \left| \sum_{n \leqslant N} \varepsilon_n e^{in\theta} \right| \geqslant \left\| \sum_{n \leqslant N} \varepsilon_n e^{in\theta} \right\|_2 = \sqrt{N} \quad .$$

Presque toutes les suites $(\varepsilon_n)_n$ à valeurs ± 1 vérifient

$$\sup_{\theta} \left| \sum_{n \leqslant N} \varepsilon_n e^{in\theta} \right| \leqslant \sqrt{N \log N} \ .$$

La suite de Rudin-Shapiro (voir [37], [40]) vérifie

$$\sup_{\theta} \left| \sum_{n \leqslant N} \varepsilon_n e^{in\theta} \right| \leqslant c \sqrt{N}$$

Cette suite (renommée à valeurs 0 ou 1) est 2-automatique.

II.- Automates finis et théorie algébrique des nombres

Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy que nous allons donner maintenant est le premier résultat de nature arithmétique sur les suites automatiques :

THÉORÈME ([13]).- *Soit* p *un nombre premier, et soit* $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\{0,1,\dots,p-1\}$ *; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $(u(n))_n$ *est* p*-automatique,*

b) $(u(n))n$ *est image d'un point fixe d'une* p*-substitution,*

c) la série formelle $\sum_0^\infty u(n)X^n$ *est algébrique sur le corps* $\mathbb{F}_p(X)$ *des factions rationnelles modulo* p .

Remarques : . D'après le théorème de la diagonale de Fürstenberg ([25]), la série formelle $\Sigma\, u(n)X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement s'il existe une série formelle double $\Sigma\, v(n,m)X^nY^m$ dans $\mathbb{F}_p(X,Y)$ dont $(u(n))_n$ soit la diagonale (c'est-à-dire : $\forall n \quad u(n) = v(n,n)$).
On peut alors se demander ce qu'on peut dire de la série formelle $\Sigma\, v(n,n)X^n$ lorsque la série double $\Sigma\, v(n,m)X^nY^m$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X,Y)$: la réponse est que cette série $\Sigma\, v(n,n)X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ (résultat d'abord démontré par Deligne [22], puis par Denef et Lipschitz par des méthodes directes et dans un cadre plus général [23], voir aussi Christol [12]).

. Il résulte du théorème fondamental de ce paragraphe (mais on peut démontrer directement) qu'une suite périodique a partir (certain rang est automatique.

III.- Automates finis et fractions continues

Nous donnerons ici deux résultats, l'un concernant le corps $\mathbb{F}_2(X)$ des fractions rationnelles modulo 2 , l'autre concernant le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels :

- Dans [9] Baum et Sweet étudient la suite $(f(n))_n$ qu'on peut définir ainsi :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si toutes les plages de } 0 \text{ du développement binaire de } n \text{ sont de longueur paire,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ils montrent que la série formelle $\sum_0^\infty f(n)X^{-n}$ *est cubique sur* $\mathbb{F}_2(X)$ *(ce qui entraîne bien sûr la 2-automaticité de la suite* $(f(n))_n$*) et que son développement en fraction continue est à quotients partiels de degré borné* ; rappelons qu'on ne connaît pas de nombre réel cubique sur les rationnels, et dont le développement en fraction continue soit à quotients partiels bornés.

- Shallit étudie dans [38] les nombres $\sum_0^\infty q^{-2^n}$, q entier $\geqslant 2$, et établit un algorithme qui donne leur développement en fraction continue, et qui est lié à la suite de pliage de papier (voir [10]) : on a ainsi un rare exemple de nombre irrationnel (en fait transcendant) dont on connnaît explicitement à la fois le développement en base q et le développement en fraction continue.

IV.- Automates finis et systèmes de numération

- Dans un genre voisin, on peut s'intéresser à des suites dont le $n^{\text{ème}}$ terme est calculé à partir des chiffres du développement de n en base p. Ainsi, notons $s_p(n)$ la classe modulo p de la somme des chiffres de l'entier n écrit en base p.

Il n'est pas difficile de montrer que la suite $(s_2(n))_n$ n'est autre que la suite de Thue-Morse (voir I.2°), et plus généralement que la suite $(s_p(n))_n$ est p-automatique. Que dire des sous-suites d'une telle suite ?
On peut montrer facilement (voir par exemple [2]) que si a et b sont deux entiers, la suite $(s_p(an+b))_n$ est encore p-automatique. Certains auteurs se sont intéressés à la répartition des valeurs d'une telle suite, en particulier

$$\sum_{n\leqslant N} (-1)^{s_2(3n)} ,$$

cette quantité tend vers l'infini avec N, *comme* $N^{\log 3/\log 4}$ *multiplié par un facteur oscillant borné qui fait intervenir une fonction continue, nulle part dérivable* (voir les travaux de Newman [32], Dekking [17], Dumont [24], et Coquet [16]).

- Si l'on remplace $an+b$ par $P(n)$ où P est un polynôme à coefficients rationnels qui envoie les entiers dans les entiers, on peut montrer que, *dès que le degré de* P *est supérieur ou égal à* 2, *la suite* $(s_p(P(n)))_n$ *n'est pas p-automatique* ([2]), ce point montre déjà que les automates finis sont une classe très particulière d'algorithmes.

- Enfin citons pour terminer ce paragraphe un résultat de Rauzy ([36]) :

Soit g *un entier supérieur ou égal à* 2 *, et soit* C *une partie finie de* $\mathbb{N}$ *; on note* E *l'ensemble des entiers* x *pour lesquels il existe une suite* $(c_n)_n$ *d'éléments de* C *telle que*

$$x = \sum_0^\infty c_n g^n .$$

Alors cet ensemble E *est g-automatique, et il existe un algorithme permettant de décider si* E *contient tous les entiers assez grands.*

V.- Automates finis et transcendance

Un apsect du "hasard" est la transcendance d'un élément sur un corps. Comme plus haut nous allons donner des exemples sur $\mathbb{F}_q(X)$ et sur $\mathbb{R}$:

1°) sur $\mathbb{F}_q(X)$

Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy cité au premier paragraphe de cet article est un critère de transcendance sur $\mathbb{F}_q(X)$. Il résulte par exemple de ce théorème et du résultat de [2] cité plus haut que, si P est un polynôme à coefficients rationnels, qui envoie $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de degré au moins égal à 2 , alors la série formelle $\Sigma\, s_p(P(n))X^n$ est transcendante sur $\mathbb{F}_p(X)$.

Une autre application de ce théorème, découlant d'un résultat de Cobham, et citée dans [13], est la suivante :

Soit $(\varepsilon_n)_n$ *une suite à valeurs* 0 *ou* 1 *, telle que la série formelle* $\sum_0^\infty \varepsilon_n X^n$ *soit algébrique à la fois considérée comme au-dessus de* $\mathbb{F}_2(X)$*, et comme au-dessus de* $\mathbb{F}_3(X)$*, alors la suite* $(\varepsilon_n)_n$ *est pêriodique à partir d'un certain rang.*

Ce résultat ressemble à (mais ne permet pas de répondre à) une conjecture due à Mahler et citée dans [13] :
$(\varepsilon_n)_n$ étant à valeurs 0 ou 1 , si les deux réels $\Sigma\, \varepsilon_n/2^n$ et $\Sigma\, \varepsilon_n/3^n$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, alors ils sont rationnels.

2°) <u>sur</u> $\mathbb{R}$

Un résultat important sur "transcendance et automates" est le suivant, dû à Loxton et van der Poorten ([27]) :

Soit $(a_n)_n$ *une suite* p-*automatique, alors le nombre réel* $\Sigma\, a_n\, p^{-n}$ *est soit rationnel, soit transcendant sur* $\mathbb{Q}$.

En fait le résulat de Loxton et van der Porten est plus général et repose sur le fait que la série entière $\Sigma\, a_n z^n$ vérifie des équations fonctionnelles "à la Mahler" lorsque la suite $(a_n)_n$ est automatique, (voir aussi [26]).

<u>Remarques</u> :

- Ce résultat implique, comme annoncé dans l'introduction, que l'algorithme donnant les décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas reductible à un automate fini, et illuste une sorte de "métaprincipe" suivant lequel si les décimales d'un nombre irrationnel sont trop "régulières", alors ce nombre est transcendant (penser par exemple à 0, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...).

- Les nombres transcendants ainsi détectés ne représentent qu'un ensemble dénombrable. Néanmoins en appliquant de telles méthodes aux nombres engendrés pas pliage (pas nécessairement régulier) de papier, on fabrique une classe de nombres transcendants, non nécessairement automatiques, ayant la puissance du continu (voir [30], voir aussi [20]).

- Une sorte de "morale" des résultats du 1° et 2° ci-dessus, est que le changement de base (passage de $\mathbb{F}_2(X)$ à $\mathbb{F}_3(X)$, ou de $\mathbb{F}_p(X)$ à $\mathbb{R}$) "tue" l'algébricité d'un nombre irrationnel.

- Pour un résultat de transcendance d'un autre type sur les suites automatiques, on pourra se reporter à [31] .

VI.- Automates finis et séries de Dirichlet

Deux motivations pour ce paragraphe : une première est qu'après avoir étudié des séries formelles automatiques au premier paragraphe et des séries entières automtiques au paragraphe précédent, on peut se demander si les séries de Dirichlet automatiques ont des propriétés intéressantes ; une seconde moditivation est dans l'étude du curieux produit infini qui va suivre.

1°) Un curieux produit infini

Il s'agit du produit

$$(1/2)^{a(0)}\ (3/4)^{a(1)}(5/6)^{a(2)}\ \ldots = \prod_{0}^{+\infty} (2k+1\ /\ 2k+2)^{a(k)}$$

où $a(k) = (-1)^{s_2(k)}$, $s_2(k)$ étant comme précédemment la suite de Thue-Morse. Il est connu que ce produit vaut $1/\sqrt{2}$ (voir par exemple l'article de Shallit [39] où d'autres produits du même type sont étudiés). Dans [5] nous montrons comment l'étude de ce produit est reliée à celle des séries de Dirichlet $\Sigma\ a(n)/n^s$ et $\Sigma\ a(n)/(n+1)^s$. Ces séries se prolongent à des fonctions entières, qui vérifient une "équation fonctionnelle infinie" semblable à l'équation fonctionnelle *infinie* que vérifie la fonction ξ .

2°) Quelle généralisation ?

Si $(b(n))_n$ est une suite 2-automatique, on peut montrer que la série de Dirichlet $\Sigma\ b(n)/n^s$ se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe avec des candidats pôles situés sur un nombre fini de demi-réseaux à gauche. De plus cette série est une composante d'un vecteur de Dirichlet qui vérifie une équation fonctionnelle infinie vectorielle du même type que celle évoquée ci-dessus. Enfin on peut espérer que l'étude de cette fonction au voisinage de la droite verticale de pôles d'abscisse maximale donne des résultats sur le comportement de la fonction sommatoire $\sum_{n\leqslant x} b(n)$, et peut-être permette de retrouver et unifier ainsi des résultats obtenus par Delange [21], Brillhart, Erdös et Morton [11], et Coquet [16].

VII.- Automates finis, répartition modulo un et analyse harmonique

Dans ce paragraphe et comme pour la transcendance, on va distinguer deux familles de résultats : ceux qui concernent $\mathbb{F}_q(X)$ d'une part, ceux qui concernent $\mathbb{R}$ d'autre part.

1°) $\mathbb{F}_q(X)$

Soit θ une série formelle à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, quelle est la répartition modulo un des puissances de θ ?

Dans un article de Deshouillers, il est d'abord montré que *si θ est "décimal", la suite $(\theta^n)_n$ n'est pas équirépartie modulo un et une étude de la mesure de répartition de θ^n est faite*. Puis dans un travail en commun avec Deshouillers (voir [3], 5^e partie), *nous montrons que si θ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$, la suite $(\theta^n)_n$ n'est pas équirépartie modulo un* . Rappelons que pour le problème analogue dans les réels, on ne sait même pas si l'ensemble des points d'accumulation modulo 1 de la suite $(3/2)^n$ est dense dans l'intervalle $[0,1]$.

2°) $\mathbb{R}$

Citons ici d'abord un problème résolu par Mauduit ([29] ; voir aussi l'article [15] de Coquet) ; soit $(u(n))_n$ une suite croissante d'entiers dont la fonction indicatrice est automatique, donner une condition sur un automate qui reconnaît $(u(n))_n$ pour que l'ensemble normal de $(u(n)\theta)_n$ soit $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (en d'autres termes pour que $(u(n)\theta)_n$ soit équirépartie si et seulement si θ est irrationnel).

Un autre exemple d'étude de répartition modulo un est donné dans [8], où la suite automatique étudiée est la suite de Rudin-Shapiro.

Enfin les suites automatiques se prêtent à une analyse harmonique particulièrement riche : nous indiquerons les travaux de Dekking, Kamae, Mendès France, van der Poorten et M. Queffelec (on pourra se reporter à [35] et à ses bibliographies).

VIII.- Automates finis, itération des fonctions continues et fractals

Les automates finis permettent de fabriquer des objets fractals (au sens de [28]), ou sont parfois cachés dans des structures fractales :

Ainsi la suite de Thue-Morse joue-t-elle un rôle fondamental dans l'étude de l'itération des fonctions continues unimodales (c'est-à-dire croissantes puis décroissantes) d'un intervalle dans lui-même (voir [6]).

Une interprétation arithmétique des résultats obtenus fait apparaître un curieux ensemble fractal Γ de nombres réels :

$$\Gamma = \{x \in [0,1] \ ; \ \forall k \geqslant 0 \quad 1-x \leqslant \{2^k x\} \leqslant x\} ,$$

dont les propriétés bizarres peuvent se trouver dans [3]. Pour une étude systématique de l'engendrement de figures fractales par des substitutions, on peut se reporter aux articles de Dekking ([18] et [19], voir aussi [20]), et il faut enfin citer les travaux de Peyrière où les substitutions utilisées sont aléatoires ([33] et [34]).

IX.- Problèmes de combinatoire

Le problème que nous allons décrire ici est celui des répétitions dans les mots. L'une des origines de ce type de questions est le problème de Burnside en théorie des groupes : si un groupe est finiment engendré et d'exposant fini, est-il nécessairement fini ? (la réponse est non, voir [1]).

Après avoir rappelé le premier résultat sur les répétitions dans les mots : la suite de Thue-Morse ne contient pas de cube (Thue démontre un peu plus que ce résultat, voir [41] et [42]), nous nous contenterons de citer rapidement les travaux (plutôt classés en informatique théorique) de Morse, Arson, puis Berstel, Cerny, Crochemore, Dejean, Pansiot, Seebold... (on pourra consulter la bibliographie de [4]).

X.- Automates finis, théorie des nombres et physique théorique

Nous donnerons ici une première référence ([7]) où on montre que le modèle d'Ising, proposé en physique pour interpréter les propriétés magnétiques de la matière, s'identifie dans le cas unidimensionnel à la suite de Rudin-Shapiro.

Nous citerons enfin les travaux en cours sur les pavages de Penrose, qui peuvent être engendrés par des substitutions (de longueur non constante il est vrai), et dont une justification expérimentale a été récemment trouvée avec la mise en évidence de "cristaux" possédant une symétrie pentagonale.

Conclusion

Nous espérons que cette promenade à travers la théorie des nombres, avec comme fil conducteur la notion d'automate fini, bien que nécessairement rapide et incomplète, aura convaincu le lecteur des liens étroits qui existent entre ces deux théories, et, peut-être l'aura incité à faire flirter sa spécialité avec quelques automates... ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. I. ADJAN, *Burnside groups of odd exponents and irreducible systems of group identities*, in Boone and Cannoniton Lydon ed., Word Problems, (North Holland Amsterdam 1974).

[2] J.-P. ALLOUCHE, *Somme des chiffres et transcendance*, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 279-285.

[3] J.-P. ALLOUCHE, *Théorie des nombres et automates*, Thèse d'Etat, Bordeaux 1983.

[4] J.-P. ALLOUCHE, *Suites infinies à répétitions bornées*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1983-1984, exposé n°20 .

[5] J.-P. ALLOUCHE et H. COHEN, *Dirichlet series and curious infinite products*, Bull. Lond. Math. Soc. 17 (1985), 531-538.

[6] J.-P. ALLOUCHE et M. COSNARD, *Itérations de fonctions unimodales et suites engendrées par automates*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 296, série 1, n°3 (1983), 159-162.

[7] J.-P. ALLOUCHE et M. MENDÈS FRANCE, *Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising*, à paraître au Bull. Soc. Math. France, 1985.

[8] J.-P. ALLOUCHE et M. MENDÈS FRANCE, *On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence*, Mathematika, 32 (1985), 33-38.

[9] L. BAUM et M. SWEET, *Continued fractions of algebraic power series in characteristic* 2 , Ann. Math. 103 (1976), 593-610.

[10] A. BLANCHARD et M. MENDÈS FRANCE, *Symétrie et transcendance*, Bull. Sci. Math. 106 (1982), 325-335.

[11] J. BRILLLHART, P. ERDÖS et P. MORTON, *On sums of Rudin-Shapiro coefficients* II, Pac. J. Math. 107 (1983), 39-69.

[12] G. CHRISTOL, Preprint.

[13] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401-419.

[14] A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Mathem. Syst. Theory, 6 (1972), 164-192.

[15] J. COQUET, *Graphes connexes, représentation des entiers et équi-répartition*, J. of Numb. Theory, 16 (3) (1983), 363-375.

[16] J. COQUET, *A summation formula related to the binary digits*, Invent. Math. 73 (1983), 107-115.

[17] F. M. DEKKING, *On the distribution of digits in arithmetic sequences*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1982-83, exposé n°32.

[18] F. M. DEKKING, *Recurent sets*, Adv. in Math., 44, 1 (1982), 78-104.

[19] F. M. DEKKING, *Replicating superfigures and endomorphisms of free groups*, J. Comb. Th., Ser. A, 32 (1982), 315-320.

[20] F. M. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE et A. J. van der POORTEN, *Folds !* Math. Intelligencer, 4, 3 (1982), 130-138, 4, 4 (1982), 173-181 et 190-195.

[21] H. DELANGE, *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres"*, Ens. Math. (2), 21 (1975), 31-47.

[22] P. DELIGNE, *Intégration sur un cycle évanescent*, Invent. Math. 76 (1984), 129-143.

[23] J. DENEF et L. LIPSCHITZ, *Algebraic power series and diagonals*, Preprint.

[24] J. M. DUMONT, *Discrépance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 297, sér. 1, n°3 (1983), 145-148.

[25] H. FÜRSTENBERG, *Algebraic functions over finite fields*, Journal of Algebra 7 (1967), 271-277.

[26] F. GRAMAIN, M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT, *Valeurs algébriques de fonctions analytiques*, Preprint.

[27] J. H. LOXTON et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations*, J. reine angew. Math. 330 (1982), 159-172.

[28] B. B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982.

[29] C. MAUDUIT, *Automates finis et ensembles normaux*, Preprint (voir aussi C.R. Acad. Sci. Paris, t. 299 sér. 1, n°5 (1981) 121-123.

[30] M. MENDÈS FRANCE et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic and analytic properties of paperfolding sequences* (dedicated to Kurt Mahler), Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), 123-131.

[31] M. MENDÈS FRANCE et A. J. van der POORTEN, *Automata and the arithmetic of formal power series*, à paraître dans Acta Arithmetica.

[32] D. J. NEWMAN, *On the number of binary digits in a multiple of three*, Proc. A.M.S. 21 (1969), 719-721.

[33] J. PEYRIÈRE, *Substitutions aléatoires itérées*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1980-1981, exposé n°17.

[34] J. PEYRIÈRE, *Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes*, Ann. Inst. Fourier, 31, 4 (1981), 187-218.

[35] M. QUEFFELEC, *Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques*, Thèse d'Etat, Paris-Nord, 1984.

[36] G. RAUZY, *Systèmes de numération*, Journées de Théorie Elémentaire et analytique des nombres, 1982, Valenciennes.

[37] W. RUDIN, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959), 855-859.

[38] J. O. SHALLIT, *Simple continued fractions for some irrational numbers*, J. Numb. Theory, 11 (1979), 209-217.

[39] J. O. SHALLIT, *On infinite products associated with sums of digits*, J. Numb. Theory, 21 (1985), 128-134.

[40] H. S. SHAPIRO, *Extremal problems for polynomials and power series*, Thesis M.I.T. 1951.

[41] A. THUE, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana 7 (1906), 1-22.

[42] A. THUE, *Uber die gegensietige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana 1 (1912), 1-67.

Jean-Paul ALLOUCHE
U.A. n°040226
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
F - 33405 TALENCE CEDEX