

# Astérisque

ERNST-ULRICH GEKELER

**Cohomologie des sous-groupes  $s$ -arithmétiques de  $GL(2)$  sur un corps de fonctions**

*Astérisque*, tome 147-148 (1987), p. 285-289

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_147-148\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148_285_0)>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE DES SOUS-GROUPES S-ARITHMÉTIQUES DE  $GL(2)$  SUR UN CORPS DE FONCTIONS

Ernst-Ulrich GEKELER

Soient:

$\mathbb{F}_q$ , le corps fini avec  $q$  éléments de caractéristique  $p$ ;  
 $K$ , un corps de fonctions d'une variable sur le corps  $\mathbb{F}_q$  des constantes;

$\infty$ , une place fixée de  $K$ , de degré  $\delta$ ;

$A$ , l'anneau des fonctions  $f \in K$  entières en dehors de  $\infty$ ;

$K_\infty$ , la complétion de  $K$  en  $\infty$ ;

$\Gamma = GL(2, A)$ , et  $G$  un sous-groupe de congruence de  $\Gamma$ .

$G$  est dit sans  $p'$ -torsion si tout élément de torsion de  $G$  est de  $p$ -torsion. C'est le cas, par exemple, si  $G$  est le sous-groupe de congruence principal  $\Gamma(\mathfrak{m})$  de  $\Gamma$  pour un idéal non nul  $\mathfrak{m} \subset A$ .

La méthode usuelle d'étudier  $G$  est de considérer l'opération de  $G$  sur l'immeuble  $\mathcal{T}$  de Bruhat-Tits de  $PGL(2, K_\infty)$ . En utilisant cette opération, Serre a démontré [8]:

Si  $G$  est sans  $p'$ -torsion, on a

$$b(G) := \dim H^1(G, \mathbb{Q}) = 1 + (q^\delta - 1) [\Gamma : G] \zeta_K(-1) / (q - 1) - s(G),$$

où  $\zeta_K$  resp.  $s(G)$  désigne la fonction zêta de  $K$  resp. le nombre de "pointes" de  $G$ .

La condition de  $p'$ -torsion n'est pas remplie si  $G = \Gamma_0(\mathfrak{m})$  (sous-groupe de congruence de Hecke) ou si  $G = \Gamma$  lui-même.

Pour contrôler les éléments de  $p'$ -torsion, il est mieux d'utiliser le demi-plan supérieur de Drinfeld, qui a une géométrie plus fine que  $\mathcal{T}$ .

Soit  $C = \widehat{K}_\infty$  (complétion d'une clôture algébrique de  $K_\infty$ ) et

$\Omega = C - K_\infty$ .  $\Omega$  a une structure naturelle d'espace analytique sur  $C$ .

(Il faut se représenter l'analogie entre les sextuples

$(A, K, K_\infty, C, \Omega, \Gamma)$  et  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, SL(2, \mathbb{Z}))$ !)

$G$  opère sur  $\Omega$  par les transformations fractionnaires, et l'espace

$G \setminus \Omega$  est l'espace analytique associé à une courbe algébrique affine non-singulière  $M_G$ . En fait,  $M_G$  est définie sur une extension abélienne finie de  $K$ , et  $b(G)$  égale le genre  $g(\bar{M}_G)$  de la compactification non-singulière  $\bar{M}_G$  de  $M_G$ .

Par abus de langage, nous écrivons  $M_G$  au lieu de  $M_G(\mathbb{C})$  etc. (Nous considérons seulement les structures de courbe algébrique sur  $\mathbb{C}$ .)

Il y a des bijections canoniques

$$\begin{aligned} \bar{M}_G - M_G &\xrightarrow{\sim} \{\text{pointes de } G \text{ sur } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\sim} G \setminus \mathbb{P}_1(K), \\ \text{et pour } G = \Gamma &\quad \Gamma \setminus \mathbb{P}_1(K) \xrightarrow{\sim} \text{Pic } A \\ &\quad (a:b) \longmapsto \text{classe de } Aa + Ab. \end{aligned}$$

La plupart de ces propriétés sont dues à Drinfeld [1].

Une forme modulaire de poids  $k$  pour  $G$  est une fonction  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  aux propriétés suivantes:

- (i)  $f((az+b)/(cz+d)) = (cz+d)^k f(z) \quad z \in \Omega, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G;$
- (ii)  $f$  est holomorphe au sens rigide-analytique;
- (iii)  $f$  est holomorphe aux pointes.

Pour la signification de (iii), voir [6].

Exemple 1 (séries d'Eisenstein): (i) Pour  $z \in \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , soit

$$E^{(k)}(z) = \sum_{a,b \in A} (az+b)^{-k}.$$

(ii) Pour  $0 \neq u = (u_1, u_2) \in (\mathcal{M}^{-1}/A)^2 \quad (0 \notin \mathcal{M} \subseteq A \text{ un idéal})$

$$\text{soit} \quad E_u^{(k)}(z) = \sum_{(a,b) \equiv u \pmod{A^2}} (az+b)^{-k}.$$

Alors, les  $E^{(k)}$  resp.  $E_u^{(k)}$  sont des formes modulaires de poids  $k$  pour  $\Gamma$  resp.  $\Gamma(\mathcal{M})$ .

On peut utiliser les formes modulaires pour décrire les courbes  $M_G$ .

Exemple 2: Soit  $A$  l'anneau  $\mathbb{F}_q[T]$  des polynômes. Alors, il y a deux formes modulaires  $g, \Delta$  de poids  $q-1, q^2-1$  pour  $\Gamma$ , de façon que  $j := g^{q+1} / \Delta$  définit une bijection  $j: \Gamma \setminus \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ . Dans ce cas,  $M_\Gamma$  est de genre zéro, et est compactifiée par adjonction d'une seule pointe  $j = \infty$ . De plus:

- (i)  $g = (T^q - T)E^{(q-1)}$ , et  $g$  ne s'annule pas en  $\infty$ ;
- (ii)  $\Delta = (T^{q^2} - T)E^{(q^2-1)} + (T^q - T)^q [E^{(q-1)}]^{q+1}$ , et  $\Delta$  a un zéro simple en  $\infty$ ;
- (iii)  $g$  et  $\Delta$  engendrent la  $\mathbb{C}$ -algèbre des formes modulaires de  $\Gamma$ .

Les  $g$  et  $\Delta$  ont une signification dans la théorie des modules de Drinfeld analogue à celle des formes  $g_2, g_3, \Delta$  dans la

théorie des formes modulaires elliptiques sur le demi-plan complexe (voir [2,5]). Mais notons que, pour des anneaux  $A$  plus compliqués, la situation est loin d'être si transparent.

Par définition, un point elliptique de  $\Gamma$  est un  $z \in \Omega$  tel que le stabilisateur  $\Gamma_z$  est strictement plus grand que le centre de  $\Gamma$ . Dans l'exemple 2, il existe une seule  $\Gamma$ -classe des points elliptiques, donnée par  $j = 0$ . Avec une transcription des méthodes de la multiplication complexe des courbes elliptiques, on peut démontrer:

Proposition 1: Si  $\delta$  est pair, il n'y a pas des points elliptiques. Si  $\delta$  est impair, il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble de classes des points elliptiques et le noyau de l'application

$$\text{norme: } J(\mathbb{F}_q^2) \longrightarrow J(\mathbb{F}_q),$$

et les stabilisateurs des points elliptiques sont isomorphes au groupe multiplicatif du corps  $\mathbb{F}_q^2$ .

(Ici,  $J$  est la jacobienne du corps de fonctions  $K$ .)

Comme dans le cas classique, il y a une relation entre les formes modulaires et les différentielles.

Proposition 2: Soit  $k \equiv 0 \pmod{q^2-1}$ . Le faisceau sur  $\bar{M}_\Gamma$  des formes modulaires de poids  $2k$  de  $\Gamma$  est canoniquement isomorphe au faisceau des différentielles de degré  $k$  sur  $\bar{M}_\Gamma$  avec des pôles d'ordre  $\leq kq/(q-1)$  aux pointes (resp.  $\leq kq/(q+1)$  aux points elliptiques) de  $\Gamma$  et pas d'autres pôles.

Posons, pour chaque idéal  $\mathfrak{m}$  non trivial de  $A$  de degré  $d$

$$\Delta_{\mathfrak{m}} = \prod_{\substack{u \\ 0 + u \in (\mathfrak{m}^{-1}/A)^2}} E_u^{(1)}.$$

Alors,  $\Delta_{\mathfrak{m}}$  est une forme modulaire parabolique de poids  $q^{2d}-1$  pour  $\Gamma$  qui n'a pas de zéro sur  $\Omega$ . Le point essentiel est que l'on peut calculer les développements de  $E_u$  et de  $\Delta_{\mathfrak{m}}$  autour des pointes. On obtient des produits infinis (convergeants dans des boules à radius positif), très proches des développements classiques des séries d'Eisenstein et de  $\Delta = (2\pi i)^{12} q \prod (1-q^n)^{24}$ , voir [2] et [4]. Notons seulement la conséquence la plus importante:

Théorème:  $\Delta_{\mathfrak{m}}$  a un zéro d'ordre  $\sum_{\kappa \in \mathfrak{m}} (-1) - q^{2d} \sum_{\kappa} (-1)$  à la pointe correspondant à  $\kappa \in \text{Pic } A$ .

Dans cette formule,  $\sum_{\kappa} (s) = \sum |\mathfrak{m}|^{-s}$ , où la sommation porte sur les diviseurs positifs  $\mathfrak{m}$  de  $K$  premiers à  $\infty$  appartenants à  $\kappa \in \text{Pic } A$ .

Par conséquent, le degré du diviseur  $\text{div}(\Delta_{\mathcal{M}})$  est donné par

$$(1-q^{2d}) \sum_{\kappa \in \text{Pic } A} \zeta_{(\kappa)}(-1) = (1-q^{2d})(1-q^{\delta}) \zeta_{\mathcal{K}}(-1).$$

En comparant avec les propositions, on peut calculer le genre de  $\overline{M}_{\Gamma}$ .

Corollaire 1 (voir [3]):

$g(\overline{M}_{\Gamma}) = 1 + (q^2-1)^{-1} [(q^{\delta}-1)P(q)/(q-1) - \delta q(q+1)P(1)/2 + e]$ ,  
 ou  $e = 0$  si  $\delta$  est pair,  $e = -q(q-1)P(-1)/2$  si  $\delta$  est impair, et  
 $\zeta_{\mathcal{K}}(s) = P(q^{-s})/(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$  avec un polynôme  $P(X)$  à coefficients entiers. (Rappelons-nous que l'on a  $g(\overline{M}_{\Gamma}) = b(\Gamma)!$ )

Corollaire 2: Les pointes engendrent un groupe d'ordre fini dans la jacobienne de  $\overline{M}_{\Gamma}$ .

(Il suffit de voir que les  $\text{div}(\Delta_{\mathcal{M}})$  engendrent un sous-groupe d'indice fini dans le groupe des diviseurs à support dans les pointes. Ceci est une conséquence facile (i) du théorème, (ii) de la formule de déterminant de Frobenius, et (iii) du fait  $L(\chi, -1) \neq 0$  pour les séries  $L$  des caractères  $\chi$  de  $\text{Pic } A$ .)

Remarques: (i) Les corollaires 1 et 2 restent valables si l'on remplace  $\Gamma$  par  $GL(Y)$  (ou  $Y$  est un sous- $A$ -module projectif de rang 2 arbitraire de  $K^2$ ), le corollaire 2 aussi pour les sous-groupes de congruence de tels groupes.

(ii) Le groupe fini du corollaire 2 semble être intéressant vu les travaux de Ribet, Wiles et Mazur/Wiles ou figurent de tels groupes.  
 (iii) C'est un problème purement combinatoire que de calculer  $g(\overline{M}_G)$  pour  $G \subset \Gamma$ , par exemple  $G = \Gamma_0(\mathcal{M}), \Gamma_1(\mathcal{M}) \dots$ . On utilise la formule de Hurwitz et le fait que les seuls points éventuellement ramifiés dans les revêtements  $\overline{M}_G \rightarrow \overline{M}_{\Gamma}$  sont les points elliptiques et les pointes, la ramification de tels points étant connue. Pour quelques formules explicites, voir [3]. Remarquons aussi que, pour  $G = \Gamma(\mathcal{M})$ , la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(G)$  de [8] est  $-\text{deg } \mathcal{M}$ , où  $\mathcal{M}$  est le faisceau inversible sur  $\overline{M}_G$  des formes modulaires de poids 1.

(iv) Il y a des généralisations évidentes pour les séries d'Eisenstein,  $\Omega, \Gamma = GL(2, A)$  (ainsi que pour les modules de Drinfeld de rang 2 utilisés dans la démonstration du théorème) considérant une situation de dimension  $r$  au lieu de  $r = 2$ . Il est très probable que l'on obtiendra des résultats analogues avec des valeurs des fonctions zêta partielles en  $1-r$ . Pour  $r = 1$ , on obtient le théorème de Deligne/Tate sur les conjectures abéliennes de Stark dans le cas des corps de fonctions, voir [9,7,4].

Bibliographie:

- [1] V.G.Drinfeld: Des modules elliptiques (en russe).Math.Sbornik 94, 594-627,1974.Traduction anglaise:Math.U.S.S.R-Sbornik 23 no 4,561-592,1976
- [2] E.-U.Gekeler: Modulare Einheiten für Funktionenkörper. J.reine. angew.Math.348,94-115,1984
- [3] E.-U.Gekeler: Le genre des courbes modulaires de Drinfeld. C.R.Acad.Sc.t.300,serie I no 19,647-650,1985
- [4] E.-U.Gekeler: Drinfeld'sche Modulkurven. à paraître
- [5] D.Goss: Modular Forms for  $\mathbb{F}_q[[T]]$ . J.reine angew. Math.331,16-39,1980
- [6] D.Goss:  $\pi$ -adic Eisenstein Series for Function Fields. Comp.Math.41,3-38,1980
- [7] D.Hayes: Stickelberger Elements in Function Fields. Comp.Math.55,209-239,1985
- [8] J.-P.Serre: Arbres,Amalgames, $SL_2$ . Astérisque 46,1977
- [9] J.Tate: Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en  $s = 0$ . Birkhäuser,Boston-Basel-Stuttgart,1984

Ernst-Ulrich Gekeler  
Mathematisches Institut  
Berlingstrasse 4  
5300 Bonn 1  
R.F.A.