Astérisque

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Sphères minimales d'après J. Sacks et K. Uhlenbeck

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__245_0>

EXPOSÉ n° XII

SPHÈRES MINIMALES d'après J. SACKS et K. UHLENBECK

Jean-Pierre BOURGUIGNON

I. POSITION DU PROBLÈME.

Soit $(\overline{M},g)$ une variété riemannienne compacte. L'existence d'une courbe de longueur minimale dans une classe d'homotopie libre de $\overline{M}$ ou d'extrémités données s'est depuis longtemps révélée un outil puissant pour étudier la topologie de $\overline{M}$, par exemple dans la preuve des théorèmes de Myers et de Synge.

Le problème de trouver une surface d'aire minimale dans une classe d'homotopie non triviale est beaucoup plus difficile pour des raisons que nous détaillons plus loin. Le théorème de Sacks-Uhlenbeck (cf[2]), que nous présentons dans cet exposé, ainsi que des variantes de ce théorème dues indépendamment à Luc Lemaire (cf[9]) et à R. Schoen et S.T. Yau (cf[14]), a une importance particulière à ce propos.

Il a en effet été l'occasion de mettre en lumière un phénomène nouveau : l'existence de solutions d'un problème variationnel avec perte de compacité dans l'espace fonctionnel où il est naturellement posé, par concentration de solutions en certains points. Une conséquence géométrique en est l'existence d'objets non triviaux sans qu'on puisse assurer que les objets construits soient là où on les cherchait. Ce phénomène est directement lié au caractère non-linéaire du problème considéré et à son invariance conforme. D'autres problèmes qui se sont révélés très riches de conséquences, comme l'existence de connexions auto-duales minimisant la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 (cf[15],[16]), les problèmes de Yamabe ou de la courbure scalaire prescrite (cf[1],[13]), présentent le même type de phénomènes.

On dispose aujourd'hui de plusieurs versions du résultat principal : celle de J. Sacks et K. Uhlenbeck est une modification de la méthode directe du calcul des variations; celle de L. Lemaire et de R. Schoen et S.T. Yau utilise l'action d'une application faiblement régulière sur des courbes, et dans celle de M. Struwe on obtient la solution du problème variationnel comme limite de la solution d'un problème d'évolution. (Cette dernière méthode était déjà mise en oeuvre par J. Eells et J.H. Sampson dans [5], article qui a donné le coup d'envoi de l'étude des applications harmoniques). Il faut aussi noter les liens avec les méthodes de compacité-concentration de P.L. Lions (cf[10]), la principale différence résidant dans la nécessité pour cette dernière théorie d'exprimer de façon intégrale les contraintes sur les fonctions-tests, ce qui n'est pas en général possible pour décrire l'appartenance à une classe d'homotopie.

Dans les sections suivantes, nous rentrons dans quelques détails techniques (pour l'essentiel desquels le lecteur est cependant renvoyé aux articles de références [12] et [14]), d'abord sur les méthodes de résolution, puis sur le phénomène fondamental de perte de compacité et sur quelques applications géométriques.

II. MISE EN ÉQUATION ET MÉTHODES DE RÉSOLUTION.

a) Aire versus énergie

Soit $\overline{M}$ une variété riemannienne sans bord de dimension supérieure ou égale à 2. Pour introduire les espaces fonctionnels ad hoc, il est utile de supposer que $\overline{M}$ est plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^k$ ce qui est toujours possible pour k assez grand.

Nous cherchons une sous-variété M de $\overline{M}$ qui soit d'aire minimale dans une classe d'homotopie. Il sera commode de considérer M comme une surface abstraite munie d'une structure conforme et d'étudier les immersions conformes de M dans $\overline{M}$. Si M est la sphère S^2, d'après le théorème d'uniformisation il y a bien sûr une seule structure conforme.

Si $f : (M,g) \to (\overline{M},\overline{g})$ est une application différentiable, on définit son énergie $\mathbb{E}(f)$ en posant $\mathbb{E}(f) = \frac{1}{2} \int_M g^{-1}(f^*\overline{g})v_g$ dont l'intégrand e(f) peut encore s'écrire dans des systèmes de coordonnées locales (x^i) sur M et (y^α) sur $\overline{M}$

$$e(f) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \overline{g}_{\alpha\beta} \quad .$$

La fonctionnelle $\mathbb{E}$ est bien définie sur l'espace des applications de classe L^2_1 de M dans $\overline{M}$ (ce qui signifie de classe L^2_1 en tant qu'application de M dans $\mathbb{R}^k$ pour le plongement isométrique mentionné plus haut et presque partout à valeurs dans $\overline{M}$).

Si M était de dimension 1, f de classe L^2_1 serait absolument continue. Comme M est une surface, les inégalités de Sobolev nous assurent seulement que f de classe L^2_1 est L^p pour tout $p < \infty$, en particulier f n'est pas nécessairement continue.

On dit alors que f est <u>harmonique</u> si f est continue et de classe L^2_1 et si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie. L'application f est alors solution du système non linéaire

$$\Delta f + g^{-1}(f^*A) = 0$$

où A désigne la seconde forme fondamentale de $\bar{M}$ dans $\mathbb{R}^k$ (pour un rapport sur ce sujet, cf. [3] et [4]).

Une propriété spécifique à la dimension 2 va jouer un grand rôle dans ce qui suit. Elle est directement reliée au fait que la norme L_1^2 se trouve dans le cas-limite des inégalités de Sobolev : il s'agit de l'invariance de $\mathbb{E}$ par changement conforme de métriques. (C'est évident vue l'écriture que nous avons utilisée pour l'énergie ; si on remplace g par $\lambda^2 g$, g^{-1} est remplacée par $\lambda^{-2} g^{-1}$ et v_g par $\lambda^2 v_g$ car nous sommes en dimension 2.)

Il suit d'un résultat fondamental de C.B. Morrey (cf.[11] que dans ce cas toute application harmonique minimisante est C^∞ mais le résultat est général (pour une analyse détaillée des contributions à la régularité, voir [4] § 3).

Le lien fondamental entre immersions minimales et applications harmoniques de la sphère S^2 , autrement dit entre l'aire et l'énergie dont elles sont des points critiques, est résumé dans l'énoncé qui suit rassemblant des résultats contenus dans [12], [9] et [14].

THÉORÈME 1. <u>Toute application</u> $f : S^2 \to \bar{M}$ <u>harmonique est une immersion minimale ramifiée de classe</u> C^∞ .

Outre des ingrédients analytiques, le résultat précédent utilise l'absence de différentielles quadratiques holomorphes sur S^2. En effet, si $z = x+iy$ est une coordonnée holomorphe, la différentielle quadratique

$\varphi = \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 + 2i\bar{g}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)dz^2$, est intrinsèquement définie et, si f est harmonique, φ est holomorphe.

Pour les surfaces de genre plus élevé, la situation est plus complexe, car il y a beaucoup de structures conformes (elles sont paramétrées par l'espace de Teichmüller, une base de l'homologie étant fixée) et il existe des différentielles quadratiques holomorphes non triviales.

b) <u>La fonctionnelle perturbée</u>

Pour trouver un point critique de $\mathbb{E}$, J. Sacks et K. Uhlenbeck travaillent avec une fonctionnelle perturbée $\mathbb{E}_\alpha$ définie par

$$\mathbb{E}_\alpha(f) = \int_M (1+|df|^2)^\alpha v_g$$

pour $f \in L_1^{2\alpha}(M,\bar{M})$. Si on suppose que $\int_M v_g = 1$, $\mathbb{E}_1(f) = 1+\mathbb{E}(f)$. Pour $\alpha > 1$, comme $L_1^{2\alpha}(M,\overline{M}) \subset C^0(M,\overline{M})$, $L_1^{2\alpha}(M,\overline{M})$ est une variété de Banach séparable. De plus, il suit des théorèmes généraux de l'analyse non-linéaire que la fonctionnelle $\mathbb{E}_\alpha$ est différentiable et vérifie la condition (C) de Palais-Smale pour une norme de Finsler sur $L_1^{2\alpha}(M,\overline{M})$.

La conséquence principale est l'existence d'un minimum de $\mathbb{E}_\alpha$ sur chaque composante connexe Γ de $L_1^{2\alpha}(M,\overline{M})$. De plus les points critiques de $\mathbb{E}_\alpha$ sont de classe C^∞ si $\alpha > 1$, avec de plus un contrôle de la valeur du minimum : il existe une constante C indépendante de α telle que

$$\min_{f\in\Gamma} E_\alpha(f) \leqslant (1+C^2)^\alpha \quad .$$

Pour $\alpha > 1$, les types d'homotopie des espaces d'applications $C^0(M,\overline{M})$, $L_1^{2\alpha}(M,\overline{M})$ et $C^\infty(M,\overline{M})$ coïncident et on peut développer une théorie de Morse.

Pour passer à la limite α tendant vers 1, il est nécessaire d'avoir un contrôle local plus fin de la norme en passant au besoin à des disques ouverts plus petits. L'estimée principale s'énonce ainsi :

PROPOSITION 2 (cf[12]). <u>Il existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>et</u> $\alpha_0 > 1$ <u>tels que, si</u> $f : D \to \overline{M}$ <u>est une application critique lisse pour</u> $\mathbb{E}_\alpha$, $\mathbb{E}(f) < \varepsilon$ <u>et pour</u> $1 \leqslant \alpha < \alpha_0$ <u>on a une estimation uniforme</u>

$$\| f\|_{D',2,p} < C(p,D')\| f\|_{1,2}$$

<u>pour tout disque</u> $D' \subset D$.

Cette estimée est décisive pour le théorème suivant qui assure que les applications harmoniques non triviales ont une énergie assez grande.

THÉORÈME 3 (cf[12]). <u>Toute application critique pour une fonctionnelle</u> $\mathbb{E}_\alpha$ <u>(avec</u> α <u>assez proche de</u> 1) <u>d'énergie assez petite est constante</u>.

c) <u>Le théorème des singularités non essentielles</u>

A cause du phénomène que nous allons détailler dans la section suivante, il est très important de disposer d'un théorème assurant qu'une application harmonique n'a pas de singularité.

THÉORÈME 4 (cf[12]). <u>Toute application harmonique d'énergie finie définie sur un disque pointé s'étend au disque tout entier</u>.

Ce théorème s'appuie sur l'invariance conforme de la fonctionnelle énergie et la non-linéarité de l'équation des applications harmoniques et utilise une méthode de renormalisation qu'on applique sur des disques concentriques de rayons en progressions géométriques.

Une propriété analogue a été prouvée par K. Uhlenbeck (cf[18]) pour les solutions des équations de Yang-Mills en dimension 4, un autre problème non-linéaire invariant par changement conforme de métrique.

d) Le phénomène de naissance des bulles de savon

Nous en arrivons maintenant au phénomène nouveau qui mérite une attention particulière. Il s'agit de suivre la convergence lorsque $\alpha \to 1$ des applications f_α qui minimisent les fonctionnelles $\mathbb{E}_\alpha$.

D'abord, quitte à prendre une sous-suite, on trouve que la suite (f_α) converge vers f faiblement dans L_1^2 et que de plus

$$\lim_{\alpha\to 1} \mathbb{E}(f_\alpha) \geqslant \mathbb{E}(f).$$

L'étape essentielle est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME 5(cf[12]). Soit U un ouvert de M et $f_\alpha : U \to M$ une suite d'applications critiques pour $\mathbb{E}_\alpha$ telle que $\mathbb{E}(f_\alpha)$ soit uniformément bornée et converge faiblement vers f dans $L_1^2(M,\overline{M})$. Il existe une sous-suite des (f_α) et des points $\{x_1,\ldots,x_k\}$ en nombre fini ne dépendant que de la borne sur l'énergie tels que la convergence ait lieu dans $C^1(U-\{x_1,\ldots,x_k\},\overline{M})$. De plus la limite est une application harmonique lisse.

Le phénomène d'apparition de bulles de savon est rendu mathématiquement précis par le théorème 4.6 de [12] .

THEOREME 6 . Une suite d'applications (f_α) de M dans $\overline{M}$ critiques pour $\mathbb{E}_\alpha$ d'énergie bornée qui a une limite f dans $C^1(M-\{x_1,\ldots,x_k\},\overline{M})$ mais pas dans $C^1(M-\{x_2,\ldots,x_k\},\overline{M})$ donne naissance à une application harmonique $\tilde{f}$ de S^2 dans $\overline{M}$ non triviale telle que

$$\tilde{f}(S^2) \subset \bigcap_{m\to\infty} \bigcap_{\alpha\to 1} \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} f_\beta(D_{2^{-m}}(x_1)) .$$

où $D_r(x)$ désigne le disque de centre x et de rayon r .

De plus $\mathbb{E}(\tilde{f}) + \mathbb{E}(\tilde{f}) \leqslant \limsup_{\alpha\to 1} \mathbb{E}(f_\alpha)$.

Ce théorème assure donc l'existence par passage à la limite d'une application harmonique non triviale f de S^2 dans $\overline{M}$ soit que la suite d'applications critiques pour $\mathbb{E}_\alpha$ converge dans $C^1(M,\overline{M})$ vers f, soit qu'au moins une "bulle de savon" soit apparue par concentration en un point où la convergence C^1 a été prise en défaut.

e) La méthode du flot

M. Struwe aborde le problème de l'existence d'applications harmoniques de M dans $\overline{M}$ dans une classe d'homotopie donnée par l'étude de l'équation d'évolution

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - d\mathbb{E}(f)$$

où $d\mathbb{E}$ désigne le gradient L^2 de la fonctionnelle énergie. Il renoue avec la méthode inaugurée par J. Eells et J.H. Sampson en 1964, mais, à l'inverse de leurs résultats, il n'a pas de besoin que $\overline{M}$ soit à courbure négative ou nulle(voir aussi [7]et[8]).

Pour cela, il fixe un intervalle de temps $[0,T]$ et introduit un espace fonctionnel dans lequel les estimations a priori pourront être faites. Il désigne par $E(M\times[0,T],\overline{M})$ l'espace des fonctions φ définies sur $M\times[0,T]$ à valeurs dans $\overline{M}$ telles que les normes $\|D^2\varphi\|_{L^2(M\times[0,T])}$, $\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\|_{L^2(M\times[0,T])}$ et $\|\mathbb{E}(\varphi(.,t))\|_{L^\infty([0,T])}$ soient finies.

On remarque que M. Struwe introduit la dérivée seconde spatiale de l'application. Une quantité importante dans ses considérations est la plus grande énergie locale $\varepsilon_R(\varphi) = \sup_{(x,t)\in M\times[0,T]} \int_{B_R(x)} |d\varphi(.,t)|^2 v_g$ où $B_R(x)$ désigne la boule de centre x et de rayon R dans M et R un nombre réel supposé inférieur au rayon d'injectivité. Elle sert à contrôler diverses normes de l'application φ, et sa croissance au cours du temps est contrôlée en un sens faible.L'énergie d'une solution ne peut se concentrer trop vite, ce qui nous conduit à un des théorèmes principaux de M. Struwe.

THÉORÈME 7 (cf[16]). Pour une donnée initiale arbitraire $f\in L^2_1(M,\overline{M})$, il existe une unique solution φ de $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = - d\mathbb{E}(\varphi)$ sur $M\times[0,+\infty[$ régulière à l'exception d'un nombre fini de points (x_i,t_i) caractérisés par la condition

$$\limsup_{t\to t_i} \int_{B_R(x_o)} |d\varphi(.,t)|^2 v_g > \varepsilon_1 > 0 \quad \text{pour tout } R\in]0,R_o] .$$

Bien entendu, les points x_i sont ceux en lesquels apparaissent éventuellement des "bulles de savon", comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente. Il reste donc à conclure par la description de ce qui s'y passe.

THÉORÈME 8(cf[16]). Soit un point (x_o, t_o) (où t_o est éventuellement $+\infty$) où

$$\limsup_{t \to t_o^+} \int_{B_R(x_o)} |d\varphi(.,t)|^2 v_g > \varepsilon_1 > 0$$

pour tout $R \in]0, R_o]$. Il existe des suites (x_k), (t_k), (R_k) tendant respectivement vers x_o, t_o et 0 et une application harmonique lisse f_o de $\mathbb{R}^2$ dans $\overline{M}$ d'énergie finie telle que, lorsque $k \to \infty$, $\varphi(\exp_{x_o} R_m(\exp_{x_o}^{-1}.), t_m) \to f_o$ localement dans $L_2^2(\mathbb{R}^2, \overline{M})$.

D'après le Théorème 4 l'application f_o du théorème précédent s'étend en une application harmonique de S^2 dans $\overline{M}$.

Parmi les questions qui restent ouvertes dans l'approche de M. Struwe figure l'apparition de "bulles de savon" en un temps fini.

III. CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES.

Grâce aux résultats de convergence présentés dans le paragraphe précédent, il est possible de prouver divers théorèmes géométriques.

THÉORÈME 9 ([9][12][14]). Si $\overline{M}$ est une variété compacte dont le deuxième groupe d'homotopie est nul, dans chaque classe d'homotopie d'applications de M dans $\overline{M}$, il existe une application harmonique minimisante.

Dans [12], les auteurs montrent que la convergence des applications minimisant $\mathbb{E}_\alpha$ vers une application harmonique dont on sait qu'elle a lieu dans la topologie C^1 sauf en un nombre fini de points a en fait lieu partout. Pour cela, on définit une modification de la suite d'applications (f_β) tendant vers une limite f dans un voisinage d'un point x où cette convergence n'est pas C^1. Cette modification $\hat{f}_\beta$ coïncide avec f_β hors d'une boule centrée en x et avec f près de x tout en contrôlant son énergie. Comme $\pi_2(M) = 0$, f_β et $\hat{f}_\beta$ sont homotopes. De la propriété de minimisation de f_β, il ressort que la $\mathbb{E}_\beta$-énergie de f_β sur un petit disque centré en x est contrôlée uniformément par une quantité qui peut être rendue arbitrairement petite avec le rayon du disque. La convergence de (f_β) vers (f) a donc finalement lieu dans la topologie C^1 au voisinage de x.

Les méthodes de L. Lemaire (cf [9]) et R. Schoen et S.T. Yau (cf.[14]) sont différentes. Ils s'intéressent à l'image dans $\overline{M}$ de lacets dans M par des applications de classe seulement L_1^2.

Comme les classes de conjugaison d'homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans $\pi_1(\overline{M})$ peuvent s'identifier avec les composantes connexes de $C^0(M,\overline{M})$ lorsque $\pi_2(M) = 0$, le Théorème suivant redonne le Théorème 9.

THÉORÈME 10. <u>Toute classe de conjugaison d'homorphismes de</u> $\pi_1(M)$ <u>dans</u> $\pi_1(\overline{M})$ <u>est induite par une application harmonique minimisante de</u> M <u>dans</u> $\overline{M}$.

Pour revenir aux 2-sphères minimales considérons maintenant une variété compacte $\overline{M}$ telle que $\pi_2(\overline{M}) \neq 0$. Il est alors utile d'introduire un invariant attaché à chaque classe d'homotopie libre d'applications de S^2 dans $\overline{M}$. Pour cela remarquons d'abord que toute classe dans $\pi_2(\overline{M})$ détermine une classe d'homotopie libre Γ d'applications de S^2 dans $\overline{M}$, mais que deux classes échangées par l'action de $\pi_1(\overline{M})$ sur $\pi_2(\overline{M})$ se voient associées la même classe Γ . On définit alors un invariant numérique $\#\Gamma$ associé à Γ par la formule

$$\#\Gamma = \min \{\mathbb{E}(f) \mid f \in \Gamma \cap L_1^\infty(S^2,\overline{M})\} .$$

D'après ce que nous avons vu il est clair que $\#\Gamma = 0$ si et seulement si la classe Γ est triviale. Cet invariant permet d' "ordonner" les composantes connexes d'applications de S^2 dans $\overline{M}$. Les théorèmes fondamentaux sont alors les suivants :

THÉORÈME 11 (cf.[12]). - <u>Il existe un ensemble de classes d'homotopie libre dont les éléments engendrent</u> $\pi_2(\overline{M})$ <u>à l'action de</u> $\pi_1(\overline{M})$ <u>près et qui contiennent une immersion conforme ramifiée d'une sphère d'aire minimale dans sa classe d'homotopie.</u>

THÉORÈME 12 (cf.[12]). - <u>Si le revêtement universel de</u> $\overline{M}$ <u>n'est pas contractile, il existe une immersion conforme minimale ramifiée de</u> S^2 <u>dans</u> $\overline{M}$.

La preuve du Théorème 11 se fait par l'absurde. Si le sous-groupe P engendré par les classes de $\pi_2(\overline{M})$ qui contiennent une application harmonique minimisante n'est pas $\pi_2(\overline{M})$ tout entier, on peut trouver, ε étant donné, une classe Γ telle que toute classe Γ' vérifiant $\#\Gamma' \leqslant \#\Gamma - \varepsilon$ soit dans P . On peut alors montrer qu'on peut trouver des classes Γ_1 et Γ_2 telles que la classe soit "subordonnée à $\Gamma_1+\Gamma_2$" (voir [12] pour le sens précis à donner à cette expression) et que $\#\Gamma_1+\#\Gamma_2 < \#\Gamma + \varepsilon$. Comme Γ_1 et Γ_2 ne sont pas triviales, $\#\Gamma_i$ $(i=1,2)$ ne peuvent être arbitrairement petits par le Théorème 3 et, en prenant ε assez petit, le fait que les classes Γ_i appartiennne à P .

La condition mise dans le Théorème 12 est indispensable comme le montre l'exemple donné par J. Eells et J.C. Wood dans [6] de classes d'homotopie d'applications de T^2 dans S^2 (celles de degré ± 1) qui ne contiennent aucune application harmonique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. AUBIN, Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 269-296.

[2] A. BAHRI, J.M. CORON, Vers une théorie des points critiques à l'infini, in Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 1985, Exposé n°VIII.

[3] J. EELLS, L. LEMAIRE, A report on harmonic maps, Bull. London Math Soc. 10 (1978), 1-68.

[4] J. EELLS, L. LEMAIRE, Another report on harmonic maps, Bull. London Math Soc. (1987)

[5] J. EELLS, J.H. SAMPSON, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math 86 (1964) 109-160.

[6] J. EELLS, J.C. WOOD, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976), 263-266.

[7] J. JOST, Ein Existenzbeweis für harmonische Abbildungen, die ein Dirichlet - problem lösen, mittels der Methode des Wärmeflusses, Manuscripta Math. 38 (1982), 129-130.

[3] J. JOST, Harmonic maps between surfaces, Lecture Notes in Maths 1062, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1984.

[9] L. LEMAIRE, Applications harmoniques des surfaces riemanniennes, J. Differential Geom. 13 (1978), 51-87.

[10] P.L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, The limit case, Part 2, Revista Mat. Iberamericana 1 (1985), 45-121.

[11] C.B. MORREY, Multiple integrals in the calculus of variations, Grundl. der Math., Springer, Berlin (1966).

[12] J. SACKS, K. UHLENBECK, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. Math. 113 (1981), 1-24.

[13] R. SCHOEN, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Differential Geom. 20 (1984), 479-495.

[14] R. SCHOEN, S.T. YAU, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of 3-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. Math. 110 (1979), 127-142.

[15] S. SEDLACEK, A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds, Commun. Math. Phys. 86 (1982), 515-528.

[16] M. STRUWE, On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 558-581.

[17] C. TAUBES, Selfdual connections on non selfdual 4-manifolds, J. Differential Geom. 17 (1982), 139-170.

[13] K. UHLENBECK, Removable singularities in Yang-Mills fields, Commun. Math. Phys. 83 (1982), 11-29.

*
* *
*

Jean-Pierre BOURGUIGNON
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex
(France)