JEAN-MICHEL BISMUT

Formules de localisation et formules de Paul Lévy

Astérisque, tome 157-158 (1988), p. 37-58

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__157-158__37_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 157-158 (1988)

Formules de localisation et formules de Paul Lévy

par Jean-Michel BISMUT

Abstract. In this paper, we prove localization formulas and asymptotic localization formulas in equivariant cohomology. These formulas exhibit in a finite dimensional context remarkable local cancellations.

Following ideas of Atiyah and Witten, we show the relations of localization formulas to Index Theory. We then relate asymptotic localization formulas to our proof of the asymptotic Morse inequalities of Demailly.

Les formules d'aire de P. Lévy **[L]** jouent un rôle remarquable dans toute la Théorie de l'indice des opérateurs de Dirac, et dans toute une série d'applications.

Ces formules semblent avoir un rôle essentiel, non seulement parce qu'elles calculent certains noyaux de la chaleur, mais surtout parce que, en tant que formules d'aire ayant une interprétation géométrique précise, elles sont la clé du passage de l'analyse à la géométrie en Théorie de l'indice.

Rappelons en effet que Atiyah et Witten **[A]** ont montré que le théorème d'Atiyah-Singer **[AS]** pour les opérateurs de Dirac sur les spineurs pouvait être obtenu formellement par une application de formules de localisation en cohomologie équivariante (**[Bo]**, **[BV]**, **[DH]**) sur l'espace des lacets de la variété considérée. Une telle analogie a été développée par nous dans **[B4]** jusqu'au niveau des calculs intermédiaires, de telle sorte que l'équation de la chaleur -au moins en théorie de l'indice- semble être exactement la preuve de telles formules en dimension infinie. Cette preuve est ainsi tellement naturelle qu'elle a un analogue en dimension finie. L'analogue des formules de P. Lévy en dimension finie est simplement l'identité d'une intégrale gaussienne et de l'inverse de la racine carrée d'un déterminant. Dans les formules de localisation, la racine carrée du déterminant s'interprète comme une classe d'Euler. En Théorie de l'indice, les formules de P. Lévy calculent le genre $\hat{A}$ de Hirzebruch.

La compréhension détaillée des calculs locaux sur les formules de localisation en dimension finie revêt une grande importance. Souvent en effet, des résultats qui n'ont en dimension finie aucune interprétation particulière ont un analogue non trivial en Théorie de l'indice.

C'est ainsi que nous montrerons que les calculs locaux qui nous ont permis de redémontrer les inégalités de Demailly **[De]** ont un analogue non trivial en dimension finie. Naturellement, c'est sur le modèle simple de la dimension finie que nous avons élaboré cette nouvelle preuve où les formules de P. Lévy jouent encore un rôle essentiel.

Notre article est organisé comme suit. En a), nous rappelons certains résultats de localisation en cohomologie équivariante en suivant **[B4]**. En b), nous établissons des formules de localisation asymptotiques. En c), nous introduisons l'opérateur de Dirac.

En d), nous rappelons le formalisme d'Atiyah **[A]** sur l'espace des lacets. En e), on introduit certaines formes différentielles naturelles sur cet espace. En f), on rappelle les résultats de **[A]** et **[B2]** sur le lien entre théorème de l'indice et localisation. En g), on montre le rôle des formules de P. Lévy dans le théorème de l'indice. En h), on rappelle brièvement la preuve de **[B5]** d'un résultat de convergence pour des noyaux de la chaleur et on montre le lien entre un tel résultat et les résultats de b). Ce résultat joue un rôle esssentiel dans notre preuve dans **[B5]** des inégalités de Demailly **[De]**.

a) Formules de localisation en cohomologie équivariante.

Soit M une variété connexe compacte orientée. On suppose que TM est munie d'une métrique g.

Soit X un champ de vecteurs de Killing, c'est-à-dire un champ de vecteur préservant la métrique g.

Soit $\Lambda(T^*M)$ l'espace des sections C^∞ de l'algèbre extérieure de T^*M.

Sur l'espace $\Lambda(T^*M)$ opèrent naturellement les opérateurs :

- d qui augmente le degré de 1 ;
- i_X qui diminue le degré de 1 .

L'opérateur $d+i_X$ agit naturellement sur $\Lambda(T^*M)$. Son carré est donné par :

$$(1.1) \qquad (d+i_X)^2 = d\,i_X + i_X d\ .$$

De manière équivalente, si L_X est l'opérateur de dérivée de Lie associé à X, on a :

$$(1.2) \qquad L_X = (d+i_X)^2\ .$$

Ainsi, $d+i_X$ est une racine carrée non triviale de l'opérateur L_X .

On dira qu'une forme $\mu \in \Lambda(T^*M)$ est X fermée si

$$(1.3) \qquad (d+i_X)\mu = 0\ .$$

Naturellement par (1.2), on trouve que si μ est X fermée, alors $L_X\mu = 0$.

Soit F la variété des zéros de X. F est une variété totalement géodésique dans M. Soit N le fibré normal à F dans M. La connexion de Levi-Civita ∇ de M induit une connexion euclidienne ∇^N sur N, dont la courbure est notée R^N.

Soit J^X l'action infinitésimale de X sur N. En coordonnées locales, J^X est donnée par :

$$(1.4) \qquad J^X = \partial X/\partial x\ .$$

Le membre de droite de (1.4) est intrinsèquement défini sur la variété F.

On oriente N par la condition $Pf(J_X) > 0$ (où $Pf(J_X)$ est le Pfaffien de J_X). F est donc aussi orientée.

Nous donnons d'abord une démonstration des formules de localisation de Duistermaat-Heckman **[DH]**, Berline-Vergne **[BV]**. Ces formules trouvent leur origine dans Bott **[Bo]**. Nous suivons ici la preuve de **[B4]**.

Théorème 1.1. *Si* μ *est* X *fermée, alors*

$$\int_M \mu = \int_F \mu / \mathrm{Pf}[(J_X+R^N)/2\pi] . \tag{1.5}$$

Avant de démontrer la formule, interprétons le membre de droite de (1.5) . $(J_X+R^N)/2\pi$ est une forme paire sur F à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques de N. $\Lambda(T^*F)$ est une algèbre commutative. $\mathrm{Pf}[(J_X+R^N)/2\pi]$ est donc un élément de $\Lambda^{\mathrm{paire}}(T^*F)$. Son terme de degré 0 est $\mathrm{Pf}[J_X/2\pi]$ qui est non nul. On fait donc un développement en série formelle

$$1/\mathrm{Pf}[(J_X+R^N)/2\pi] = 1/\mathrm{Pf}[J_X/2\pi] + \dots \tag{1.6}$$

avec des formes sur F de degré 0, 2, 4,.... On multiplie cette série formelle par μ, et on intègre sur F la forme de degré égal à la dimension de F.

Preuve de (1.5).

On reprend la méthode de **[B4]**. Soit X' la un-forme duale de X. Comme X est de Killing, on a $L_X X' = 0$, et donc :

$$(d + i_X)(d + i_X)X' = 0 . \tag{1.7}$$

On tire de (1.7) que, pour $s>0$

$$(d + i_X) \exp\{-s(d+i_X)X'\} = 0 . \tag{1.8}$$

On montre tout d'abord que pour tout $s>0$

$$\int_M \mu = \int_M \exp\{-s(d+i_X)X'\}\mu . \tag{1.9}$$

En effet, (1.9) est vrai en $s=0$. De plus

$$\partial/\partial s \int_M \exp\{-s(d+i_X)X'\}\mu = -\int_M ((d+i_X)X')\exp\{-s(d+i_X)X'\}\mu \tag{1.10}$$
$$= -\int_M (d+i_X)[X'\exp\{-s(d+i_X)X'\}\mu] = 0 .$$

La deuxième égalité dans (1.10) est évidente par (1.3) et (1.8). On montre la dernière égalité par le Théorème de Stokes et par le fait que si $\nu \in \Lambda(T^*M)$, $i_X\nu$ n'est jamais de degré maximal. On a bien montré (1.9).

Posons $s = 1/2t$. On a donc

$$\int_M \mu = \int_M \exp\{-(d+i_X)X'/2t\}\mu . \tag{1.11}$$

Faisons tendre t vers 0 dans (1.11). On a le développement exact

(1.12)
$$\exp\{-(d+i_X)X'/2t\} = \exp(-|X|^2/2t)(1-dX'/2t+(dX')^2/8t^2+\ldots).$$

Quand $t\downarrow 0$, l'intégrale à droite de (1.11) se localise donc sur $X=0$. On prend un système de coordonnées $x\in F$, $y\in N_X$. Par changement de variable, $y=\sqrt{t}y'$, on trouve que pour un $\varepsilon>0$, quand $t\downarrow 0$

$$\int_M \exp\{-(d+i_X)X'/2t\}\mu \tag{1.13}$$
$$\simeq t^{\dim N/2}\int_M [\exp\{-(d+i_X)X'/2t\}\mu](x,\sqrt{t}y) .$$

Quand $t\to 0$, on a

$$|X|^2/t\,(x,\sqrt{t}y) \to |J_X y|^2 . \tag{1.14}$$

$dX'(x,0)$ est exactement la 2-forme J_X. $(dX'/t)^{\dim N/2}$ a une singularité en $1/t^{\dim N/2}$ qui compense la puissance $t^{\dim N/2}$. On doit aussi calculer le développement de $dX'/t\,(x,\sqrt{t}y)$ à l'ordre t. En effet, comme X préserve la connexion de Levi-Civita, on trouve que si R est le tenseur de courbure de TM

$$\nabla_y \nabla.X + R(X,y) = 0 . \tag{1.15}$$

En utilisant (1.13) et en procédant comme dans (1.14), on trouve en définitive que le membre de droite de (1.13) tend vers

$$(1.16) \qquad \int_F \mu \int_N \exp\{-R(J^X y,y)/2 - |J^X y|^2/2\}\, Pf(J_X)dy\ .$$

Dans (1.16), $R(J^X y,y)$ est la 2-forme sur TF

$$Y, Z \longrightarrow \langle Y, R(J^X y,y)Z\rangle .$$

Or, par les symétries du tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita, on a :

$$(1.17) \qquad \langle Y,R(J^X y,y)Z\rangle = \langle R(Y,Z)y,J_X y\rangle\ .$$

Donc, (1.16) prend la forme :

$$(1.18) \qquad \int_F \mu \int_N \exp\{-\tfrac{1}{2}\langle R^N(.,.)y,J_X y\rangle - |J_X y|^2/2\}\, Pf(J_X)dy\ ,$$

où $R^N(.,.)$ est considérée comme une 2-forme sur F.

L'intégrale gaussienne dans (1.18) s'exprime à l'aide de la racine carrée d'un déterminant. Or le Pfaffien d'une matrice antisymétrique est une racine carrée de son déterminant. En procédant comme dans **[B4]**, on obtient que (1.18) est égale à :

$$(1.19) \qquad \int_F \mu / Pf[(J_X+R^N)/2\pi]. \qquad \square$$

<u>Remarque 1.2</u>. Il faut noter plusieurs points dans la preuve du Théorème 1.1.

- Le poids des variables de Grassmann dans $\Lambda(N^*)$ ou $\Lambda(T^*F)$ a joué un rôle essentiel dans la preuve.

- Le miracle est que $t^{\dim N/2}$ compense exactement $(dX'/t)^{\dim N/2}$. Il est très remarquable que l'approximation (1.13) produise un résultat de convergence ponctuelle en chaque point de F. En Théorie de l'indice, ce résultat s'exprime par le mécanisme des "extraordinary cancellations" conjecturées par Mc Kean-Singer **[MKS]**.

b) Formules de localisation asymptotiques.

Nous allons maintenant étudier le principe d'une formule de localisation asymptotique locale où μ varie aussi avec t. Une telle formule est la clé d'une interprétation correcte de notre preuve **[B5]** des inégalités de Demailly **[De]**.

Soit en effet A une 1-forme sur M qui est imaginaire et X invariante, i.e. $L_X A = 0$.

Pour $k \in N$, on a :

(1.20) $$(d+i_X)\exp\{k(d+i_X)A\} = 0 .$$

Soit μ un élément de $\Lambda(T^*M)$ non nécessairement X fermé. On désigne par $\mu^{(0)}$ la composante de degré 0 de μ.

Soit F_+ la réunion des composantes de F de dimension maximale dans F.

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 1.3. *Pour tout* $s>0$, *on a l'identité*

(1.21) $$\lim_{k\to+\infty} 1/k^{\dim F_+/2} \int_M \mu \exp\{(-k(d+i_X)X'/2s) + k(d+i_X)A\}$$
$$= \int_{F_+} \mu^{(0)} \exp(dA)/Pf(J_X/2\pi) .$$

<u>Preuve</u>. Pour démontrer (1.21), on commence par établir un résultat simple sur A. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur TM.

Proposition 1.4. A *s'annule sur* N. Si $x \in F$, $Y,Z \in T_xM$, *alors*

(1.22) $$(\nabla_Y A)(J_X Z) + (\nabla_{J_X Y} A)(Z) = 0 .$$

Sur F, *on a :*

(1.23) $$J_X dA = 0 .$$

En particulier, TF *et* N *sont orthogonaux pour* dA.

Preuve. On a :

(1.24) $$L_X = \nabla_X - \nabla . X \ .$$

Comme $L_X A = 0$, on trouve que sur F

(1.25) $$A(\nabla . X) = 0 \ ,$$

ou encore

(1.26) $$A(J_X .) = 0 \ .$$

Comme J_X est inversible de N dans lui-même, A s'annule sur N.

Comme $L_X A = 0$ et comme X préserve la connexion de Levi-Civita, alors $L_X \nabla . A = 0$. En utilisant (1.24), on voit que si Y, Z sont des champs de vecteurs C^∞ sur M

(1.27) $$(\nabla_X \nabla_Y A)(Z) + (\nabla_Y A)(\nabla_Z X) - (\nabla_{[X,Y]} A)(Z) = 0 \ .$$

Sur F, on tire de (1.27) que

(1.28) $$(\nabla_Y A)(J_X Z) + (\nabla_{J_X Y} A)(Z) = 0 \ .$$

On a donc montré (1.22). De plus

(1.29) $$d A(Y,Z) = \nabla_Y A(Z) - \nabla_Z A(Y) \ .$$

De (1.28), on tire immédiatement que $J_X dA = 0$. Comme J_X est inversible sur N et nul sur TF, on trouve bien que TF et N sont orthogonaux pour dA. □

Preuve du Théorème 1.3.

On doit étudier la limite quand $t \to 0$ de

(1.30) $$t_+^{\dim F/2} \int_M \mu \exp\{-(d+i_X)X'/2st + (d+i_X)A/t\} \ .$$

Comme A est imaginaire, $\exp\{i_X A/t\}$ reste bornée. La localisation de l'intégrale reste dictée par le terme $\exp\{-|X|^2/2st\}$. L'intégrale (1.30) se localise encore sur F.

On se place en $x \in F$, $y \in N_x$. Après changement de variables, on doit étudier en $x \in F$

(1.31)

$$\int_{|y| \leq \varepsilon/\sqrt{t}} t^{\dim N/2}[\mu \exp\{-(d+i_X)X'/2st\}\, t^{\dim F_+/2} \exp\{(d+i_X)A/t\}](x,\sqrt{t}\,y).$$

On a :

(1.32) $$(\partial/\partial\sqrt{t})\,A(X) = (\nabla_y A)(X) + A(\nabla_y X) \ .$$

En $t=0$, $X=0$. Par la Proposition 1.3, $A(\nabla_y X) = 0$ et donc en $t=0$

(1.33) $$(\partial/\partial\sqrt{t})\,A(X) = 0 \ .$$

De plus, en $t=0$

(1.34) $$(\partial^2/(\partial\sqrt{t})^2)\,A(X) = 2(\nabla_y A)(J_X y) + A(\nabla_y \nabla_y X) \ .$$

Par (1.15), $\nabla_y \nabla_y X = 0$ sur F et donc

(1.35) $$(\partial^2/(\partial\sqrt{t})^2)\,A(X) = 2(\nabla_y A)(J_X y) \ .$$

De (1.33)-(1.35), on tire que :

(1.36) $$A(X)/t \longrightarrow (\nabla_y A)(J_X y) \ .$$

De (1.22), on tire que :

(1.37) $$\nabla_y A(J_X y) + \nabla_{J_X y} A(y) = 0 \ .$$

De (1.32)-(1.37), on tire que :

(1.38) $$A(X)/t \longrightarrow dA(y, J_X y)/2 \ .$$

Remarquons maintenant que par la Proposition 1.4, TF et N sont orthogonaux pour dA. Notons $(dA)^H$ la restriction de dA à TF, et $(dA)^V$ la restriction de dA à N.

Notons que dans $\exp\{dA/t\}$, le terme $\exp\{dA^V/t\}$ subsistera à la limite, puisque dA^V y a le poids $1/t$. Notons également que dA^H a le poids $1/t$. Seul le terme $(dA^H/t)^{\dim F_+/2}$ peut compenser le terme $t^{\dim F_+/2}$.

On suppose donc maintenant que $x \in F_+$.

En particulier, toutes les variables de Grassmann horizontales sont tuées par ce processus. Ainsi dans (1.31), il n'est plus nécessaire de développer $(dX'/t)(x,\sqrt{t}y)$ i.e. l'identité (1.15) devient inutile.

En utilisant (1.38), on trouve que si $\mu^{(0)}$ est la composante de degré 0 de μ, alors pour $x \in F_+$

(1.39)

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_N t^{\dim N/2} [\mu \exp -(d+i_X)X'/2st]\, t^{\dim F_+/2} \exp\{(d+i_X)A/t\}(x,\sqrt{t}y)$$

$$= \mu_x^{(0)} \int_N \exp\{-|J_X y|^2/2s + dA(y,J_X y)/2 + J_X/s + dA^V + dA^H\}\ .$$

On trouve facilement par intégration d'une gaussienne que :

$$(1.40) \qquad \int_N \exp\{-|J_X y|^2/2s + dA(y,J_X y)/2 + J_X/s + dA^V\} = \\ = 1/\mathrm{Pf}[J_X/2\pi].$$

On déduit de (1.39) et (1.40) que :

(1.41)

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_N t^{\dim N/2} [\mu \exp -(d+i_X)X'/2st]\, t^{\dim F_+/2} \exp\{(d+i_X)A/t\}(x,y\sqrt{t})$$

$$= \mu_x^{(0)}/\mathrm{Pf}[J_X/2\pi]\ (\exp\{dA^H\}(x))^{\max}\ .$$

De (1.41), on tire (1.21). □

Remarque 1.5. Si μ est X fermée et si $\dim F_+ > 0$, les intégrales à gauche de (1.21) tendent trivialement vers 0. $\mu^{(0)}$ est constante sur F_+ et le membre de droite de (1.21) est également nul.

Remarque 1.6. La convergence locale dans la preuve du Théorème 1.3 a autant d'intérêt que le Théorème lui-même. Notons en particulier le phénomène étonnant que, dans les formules (1.18) et (1.39), $\langle R^N(.,.)y, J_X y\rangle$ et $dA(y, J_X y)$ jouent des rôles formellement très proches, bien qu'ils apparaissent pour des raisons différentes.

Remarquons aussi que, quand $s \downarrow 0$, par (1.16), on a une convergence locale sur F de $\int_M \mu \exp\{-k(d+i_X)X'/2s + k(d+i_X)A\}$ vers $\int_F (\mu \exp kdA)/\mathrm{Pf}[(J_X+R^N)/2\pi]$.

Le terme local dominant quand $k \longrightarrow +\infty$ de cette dernière expression est $k^{\dim F_+/2} \int_{F_+} (\mu^{(0)} \exp dA)/\mathrm{Pf}[J_X/2\pi]$ qui coïncide localement avec le membre de droite de (1.21).

c) **Opérateur de Dirac.**

Soit M une variété riemannienne orientée compacte, connexe spin de dimension paire $n = 2\ell$. Soit $F = F_+ \oplus F_-$ son fibré des spineurs. Soit ξ un fibré Hermitien avec connexion unitaire ∇^ξ, de courbure L.

Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur de Dirac agissant sur les sections C^∞ de $F \otimes \xi$, et échangeant les sections de $F_+ \otimes \xi$ et $F_- \otimes \xi$.

D est décrit en détail dans Atiyah-Singer **[A]** et dans **[B1]**. Disons seulement que son symbole principal est donné par $i\xi$ (où ξ est l'opérateur de multiplication de Clifford par ξ). En particulier, comme $(i\xi)^2 = |\xi|^2$, on voit que au moins par son symbole principal, D apparaît comme une racine carrée non triviale du Laplacien $-\Delta$. Naturellement, c'est pour cette raison que Dirac a introduit l'opérateur D .

d) **Espace des lacets.**

Nous suivons maintenant Atiyah **[A]**.

Soit LM l'espace des lacets C^∞ sur M, i.e. l'espace des applications C^∞ $s \in S_1 = R/Z \rightarrow x \in M$.

LM a naturellement une structure de variété de dimension infinie. Si $x \in LM$, $Y \in T_x LM$ est un champ de vecteurs C^∞ $s \in S_1 \rightarrow Y_s \in T_{x_s} M$.

Si $Y, Y' \in T_x LM$, posons :

(1.42) $$\langle Y, Y' \rangle = \int_0^1 \langle Y_s, Y'_s \rangle_{x_s} ds .$$

LM devient ainsi une variété riemannienne.

S_1 agit naturellement sur LM par le groupe de transformations :

(1.43) $$(k_t x)_s = x_{s+t} .$$

Les applications k_t sont des isométries. Le champ de vecteurs de Killing X engendrant le groupe k est donné par :

(1.44) $$X(x)_s = (dx/ds)_s .$$

X' est la 1-forme :

(1.45) $$Y \in T_x LM \ , \quad X'(Y) = \int_0^1 \langle Y_s, dx_s \rangle .$$

Soit D/Ds l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion de Levi-Civita le long de $s \rightarrow x_s$. On vérifie facilement que si $Y, Z \in T_x LM$,

(1.46) $$dX'(Y,Z) = 2 \int_0^1 \langle DY/Ds, Z_s \rangle ds$$

$i_X X'$ est l'énergie du lacet

$$i_X X' = \int_0^1 |dx/ds|^2 ds .$$

e) Formes différentielles X fermées sur LM.

Par (1.8), nous savons déjà que pour tout $t>0$, la forme différentielle

$$\exp\{-(d+i_X)X'/2t\} \tag{1.47}$$

est X fermée.

Nous allons brièvement décrire une autre classe de formes X fermées décrite dans **[B2]**.

Supposons pour simplifier que ξ est un fibré en droite. La courbure L de ξ est une 2-forme sur M à valeurs complexes.

L définit une 2-forme sur LM

$$Y,Z \in T_x LM \longrightarrow \int_0^1 L_{x_s}(Y_s,Z_s)\,ds\,. \tag{1.48}$$

Si $x \in LM$, soit $\tau_0^1 \in \mathbb{C}$ l'holonomie de ξ pour la connexion ∇^ξ, i.e. l'opérateur de transport parallèle de x_1 en x_0 pour la connexion ∇^ξ. Comme ∇^ξ est unitaire, on a : $|\tau_0^1|=1$.

Théorème 1.7. *On a l'identité :*

$$(d+i_X)\left[\tau_0^1 \exp\left(\int_0^1 L_{x_s}\,ds\right)\right] = 0\,. \tag{1.49}$$

<u>Preuve</u>. On peut trivialiser ξ le long de x par une section C^∞ non nulle σ. En supposant pour simplifier x sans point double, on prolonge σ en une section C^∞ non nulle sur un voisinage V de x. Soit A la forme de connexion évaluée sur X.

On a par définition :

$$\tau_0^1 = \exp\int_0^1 \langle A_{x_s}, dx_s\rangle\,. \tag{1.50}$$

On a aussi sur V

$$L = dA\,. \tag{1.51}$$

Donc

(1.52) $$\tau_0^1 \exp\left(\int_0^1 L_{x_s} ds\right) = \exp\left(\int_0^1 (A_{x_s}(dx_s/ds) + L_{x_s}) ds\right) .$$

Identifions A à la 1-forme X invariante $Y \longrightarrow A(Y) = \int_0^1 A_{x_s}(Y_s) ds$.
Alors

(1.53) $$dA = \int_0^1 L_{x_s} ds .$$

De (1.52) et (1.53), on tire que :

(1.54) $$\tau_0^1 \exp\left(\int_0^1 L_{x_s} ds\right) = \exp\{(d+i_X)A\} .$$

Comme A est X invariante, de (1.20), on tire (1.49). □

Remarque 1.8. En général, L n'est pas exacte, i.e. A n'est pas globalement définie.

Remarquons que dans **[B2]**, on a donné l'analogue de (1.49) pour des fibrés ξ de dimension quelconque.

f) Indice de l'opérateur de Dirac

On désigne par $\operatorname{Ind} D_+$ l'indice de l'opérateur D_+, i.e. :

$$\operatorname{Ind} D_+ = \dim \operatorname{Ker} D_+ - \dim \operatorname{Ker} D_- .$$

La formule de l'indice par l'équation de la chaleur de Mc Kean-Singer **[MKS]** nous dit que pour $t > 0$

(1.55) $$\operatorname{Ind} D_+ = \operatorname{Tr}[\exp((-t/2)D_- D_+)] - \operatorname{Tr}[\exp(-t D_+ D_-/2)] .$$

On peut donner à (1.55) une représentation probabiliste rigoureuse du type

(1.56) $$\operatorname{Ind} D_+ = \int_{\overline{LM}} dR^t(x) ,$$

où $dR^t(x)$ est une mesure signée sur $\overline{LM}$ (qui est l'espace des lacets continus).

Il résulte du formalisme d'Atiyah et Witten **[A]** et de **[B2]** que si ξ est un fibré en droite, on peut mettre (1.56) sous la forme non rigoureuse :

$$\text{(1.57)} \qquad \operatorname{Ind} D_+ = C \int_{LM} \exp\{-(d+i_X)X'/2t\} \; \tau_0^1 \exp\{\int_0^1 L_{X_s} ds\} ,$$

où C est la constante infinie

$$\text{(1.58)} \qquad C = \Big(\big(i \prod_1^{+\infty} m^2/2\pi\big)\Big)^{\ell} .$$

La forme différentielle apparaissant dans (1.57) est X fermée. La remarque fondamentale d'Atiyah **[A]** est que si on applique formellement la formule du Théorème 1.1 à la variété de dimension infinie LM, en notant que M est la variété des zéros de X, on devrait trouver

$$\text{(1.59)} \qquad \operatorname{Ind} D_+ = C \int_M \frac{\exp L}{\prod_{i=1}^{\ell} \prod_1^{+\infty} (m^2 - (x_j^2/4\pi^2))}$$

où $\pm i x_j$ représentent formellement les valeurs propres du tenseur de courbure R de la connexion de Levi-Civita sur TM.

En notant que

$$\text{(1.60)} \qquad \prod_{m=1}^{+\infty} (1 - (x_j^2/4\pi^2 m^2)) = (\sin x_j/2) / x_j/2 ,$$

on trouve que si la formule du Théorème 1.1 s'applique, on a :

$$\text{(1.61)} \qquad \operatorname{Ind} D_+ = (1/2\pi)^{\ell} \int_M \prod_1^{\ell} ((x_j/2)/(\operatorname{sh} x_j/2)) \exp(iL) ,$$

ce qui est exactement le théorème d'Atiyah-Singer **[AS]**.

Cette observation fondamentale a été faite par Atiyah et Witten dans **[A]** pour les opérateurs de Dirac agissant sur les spineurs. Nous l'avons étendue dans **[B2]** au cas des opérateurs de Dirac agissant sur des spineurs twistés par un fibré ξ général.

L'extension de la formule (1.57) au cas où ξ est de dimension infinie est l'une des clés pour comprendre au fond la preuve par l'équation de la chaleur de l'indice des familles **[B3]**. Une telle extension est donnée dans **[B4]**.

Notre preuve donnée dans **[B4]** des formules de localisation en dimension finie a été motivée par la formule (1.57) (qui est en dimension infinie). Elle légitime a posteriori la méthode de l'équation de la chaleur comme étant une preuve très naturelle des formules de localisation en dimension infinie.

g) Les formules de Paul Lévy.

Dans ce contexte, la preuve probabiliste du Théorème de l'indice **[B1]** et la preuve du Théorème 1.1 deviennent strictement parallèles.

Nous allons illustrer brièvement ce fait en examinant les formules finales de la preuve de **[B1]**.

Soit D l'opérateur de Dirac sur les spineurs de la variété M. Soit $P_t^0(x,x')$ et $P_t^1(x,x')$ les noyaux C^∞ des opérateurs $\exp(-tD_-D_+/2)$ et $\exp(-tD_+D_-/2)$.

De (1.55), on tire que :

$$\text{(1.62)} \qquad \operatorname{Ind} D_+ = \int_M [\operatorname{Tr} P_t^0(x,x') - \operatorname{Tr} P_t^1(x,x')]\, dx\ .$$

On montre dans **[ABP]**, **[B1]**, **[BU2]**, **[G1,2]**, **[Gi]**, **[P]** que pour tout $x \in M$

$$\text{(1.63)} \qquad \lim_{t \downarrow 0} \operatorname{Tr}[P_t^0(x,y)] - \operatorname{Tr}[P_t^1(x,y)]$$

existe, et on calcule la limite.

Ce calcul doit être interprété comme l'analogue de (1.16) qui réduit le calcul à un calcul dans le fibré normal.

Soit R la courbure de la connexion de Levi-Civita de TM. Soit η la forme Riemannienne d'orientation de M. On montre dans **[B1]** que si P_1 est la loi du pont Brownien w^1 dans T_xM avec $w_0^1 = w_1^1 = 0$, alors

(1.64) $\lim\ [\mathrm{Tr}P_t^0(x,x) - \mathrm{Tr}P_t^1(x,x)]\ \eta(dx) =$

$$(i/2\pi)^{\ell}\ \Big[\int \exp\{-\int_0^1 (R(dw^1,w^1)/2)\}\ dP_1(w^1)\Big]^{\max} .$$

Le membre de droite est l'analogue exacte de (1.16).

En effet, la fibre normale à M dans LM en $x \in M$ est donnée par : $N_x = \{w^1 \in L_2([0,1];T_xM);\ \int_0^1 w^1\, ds = 0\}$. $J_x w^1$ est exactement donné par $(J_x w^1)_s = dw^1/ds$.

Si C est la constante infinie (1.58), la mesure P_1 est exactement donnée par :

(1.65) $$(2\pi/i)^{\ell}\ C \exp\{-\tfrac{1}{2}\int_0^1 |dw^1/dt|^2 dt\}\ dD(w^1) .$$

Les formules (1.16) et (1.64) sont maintenant directement reliées.

En utilisant les symétries du tenseur R, on montre -comme dans (1.18)- que (1.64) est égal à

(1.66) $$(i/2\pi)^{\ell} \int \exp\{-\int_0^1 \langle R(.,.)w^1,dw^1\rangle/2\}\ dP^1(w^1) .$$

Rappelons maintenant la formule d'aire de P. Lévy **[L]** . Soit (b^1,b^2) un pont Brownien bidimensionnel avec $(b^1,b^2)_0 = (b^1,b^2)_1 = (0,0)$. Par Lévy **[L]**, on sait que pour tout $x \in R$

(1.67) $$E\exp\{ix\int_0^1 (b^1db^2 - b^2db^1)\} = x/\mathrm{sh}\,x .$$

Avec les conventions de (1.59), on trouve que

(1.68) $$(i/2\pi)^{\ell} \int \exp\{-\int_0^1 \langle R(.,.)w^1,dw^1\rangle/2\}\ dP_1(w^1)$$

$$= (1/2\pi)^{\ell} \prod_1^{\ell} ((x_j/2)/(\mathrm{sh}\,x_j/2))$$

ce qui est exactement le membre de droite de (1.61).

Il faut remarquer que Lévy lui-même a calculé (1.67) sous la forme

$$(1.69) \qquad E \exp\left\{ix \int_0^1 (b^1 db^2 - b^2 db^1)\right\} = \frac{1}{\prod_1^{+\infty} (1 + (x^2/\ \pi^2 n^2)} = x/\operatorname{sh} x \quad ,$$

i.e. sous la forme d'un déterminant infini.

Bien que d'autres preuves de ce résultat existent, c'est la factorisation (1.69) qui est la plus éclairante du point de vue géométrique.

h) Equation de la chaleur et inégalités de Demailly.

Dans **[De]**, Demailly a établi de remarquables inégalités de Morse asymptotiques sur le complexe $\bar\partial$ associé à un fibré en droite $E^{\otimes k}$ quand on fait tendre k vers l'infini.

Nous avons donné dans **[B5]** une preuve par l'équation de la chaleur des inégalités de Demailly. Cette preuve a été inspirée par l'énoncé du Théorème 1.2.

Soit en effet M une variété complexe compacte connexe, de dimension complexe ℓ. Supposons M Kählérienne pour simplifier. Soit E un fibré en droite holomorphe Hermitien, soit r la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur E.

Pour $k \in N$, soit

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,0}(E^{\otimes k}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow[\bar\partial^k]{} \Omega^{0,\ell}(E^{\otimes k}) \longrightarrow 0$$

le complexe de Dolbeault associé.

Soit $\square^k$ le Laplacien : $\square^k = (\bar\partial^k + \bar\partial^{k*})^2$.

Pour $0 \leq p \leq \ell$, soit $P_s^{p,k}(x,x')$ le noyau C^∞ associé à l'opérateur $\exp(-s\square^k)$ agissant sur les sections C^∞ de $\Omega^{0,p}(E^{\otimes k})$.

Soit r^d l'opérateur sur $\Lambda(T^{*(0,1)}M)$

$$(1.70) \qquad r^d = -r(\partial/\partial z^i, \partial/\partial \bar z^j)\, d\bar z^j \wedge i_{\partial/\partial \bar z^i} \,.$$

On montre dans **[B5,** Théorème 1.5**]** le résultat suivant :

Théorème 1.9. *Pour tout* $x \in M$, p $(0 \le p \le \ell$, $s > 0)$, *on a*

$$(1.71) \qquad \lim_{k \to +\infty} (2\pi/k)^{\ell} \operatorname{Tr}[P_s^{p,k}(x,x)] = ((\det r)/\det(I - e^{-sr}))\operatorname{Tr}_p(e^{sr^d})(x)$$

uniformément sur M.

Preuve. Nous donnons un résumé de la preuve de **[B5]**, en mettant en regard les analogies avec la preuve du Théorème 1.3.

Posons $t = 1/k$. Soit $x_{\cdot}^{st}$ le pont Brownien tel que $x_0^{st} = x_1^{st} = x$ associé à la métrique g/st, où g est la métrique de M.

Soit τ_0^h l'opérateur de transport parallèle de x_1^{st} en x_0^{st} sur le fibré $\Lambda(T^{*(0,1)}M)$.

Si α est la courbure de $\det T^{(1,0)}M$, on considère l'équation différentielle

$$(1.72) \qquad dU^t/dh = U^t \tau_0^h [st\, d\,\bar z^i \wedge i_{\partial/\partial \bar z^j}\, \alpha/2\, (\partial/\partial \bar z^i, \partial/\partial z^j) + s\, \tau_0^h\, r^d]\,.$$

$$U_0{}^t = I_{\Lambda T_x^{*(0,1)}M}\,.$$

Soit $(\tau_0^h)_E$ l'opérateur de transport parallèle sur le fibré E. On a : $(\tau_0^h)_{E^{\otimes k}} = (\tau_{0,E}^h)^{\otimes k}$.

En utilisant la formule de Lichnerowicz, on trouve dans **[B5,** Equation (1.34)**]** que si p_u est le noyau de la chaleur scalaire pour la métrique g et si E^{st} est la loi du pont Brownien $x_{\cdot}^{st}$, alors

$$(1.73) \qquad P_s^{p,k}(x,x) = p_{st}(x,x)\, E^{st}\left[\exp\left\{\int_0^1 r/2_{x_h^{st}}(\partial/\partial z^i, \partial/\partial \bar z^i)\, dh\right\}\right.$$

$$\left.(\tau_{0,E}^1)^{\otimes k}\, U_1\, \tau_0^1\right]\,.$$

Comme x^{st} est un lacet, $\tau_{0,E}^1 \in C$, et donc

(1.74) $$(\tau^1_{0,E})^{\otimes k} = (\tau^1_{0,E})^k = (\tau^1_{0,E})^{1/t} .$$

De plus

(1.75) $$|\tau^1_0|^{1/t} = 1 .$$

(Noter que dans la preuve du Théorème 1.3, on utilise le fait que A est imaginaire.)

En paramétrant $x^{st}_{\cdot}$ par un pont Brownien w^1 dans T_xM comme dans **[B1]**, on trouve que

(1.76) $$(\tau^1_{0,E})^{1/t} \longrightarrow \exp\left\{-s/2 \int_0^1 r_{x_0}(dw^1, w^1)\right\}$$

(voir l'équation (1.38)).

On en déduit que si $r' = \Sigma\, r(\partial/\partial z^i, \partial/\partial \bar{z}^i)$

(1.77) $$\lim_{k \to +\infty} (2\pi/k)^{\ell} [P^k_s(x,x)]$$

$$= (1/s^{\ell}) \int \exp\left\{sr'_x/2 - s/2 \int_0^1 r_x(dw^1, w^1)\right\} \exp(sr^d_x) dP_1(w^1)$$

(Voir la formule (1.39)).

En utilisant de nouveau la formule de Lévy **[L]**, on en déduit (1.71). □

<u>Remarque 1.10</u>. La similarité des calculs dans les preuves des Théorèmes 1.3 et 1.9 n'est pas accidentelle. Le rôle de A est joué ici par la forme de connexion.

Du Théorème 1.9, on déduit dans **[B5]** les inégalités de Demailly.

La remarque 1.6 nous permet de comprendre pourquoi le terme $\det r$ est strictement identique au terme dominant local dans la formule de Riemann-Roch.

RÉFÉRENCES

[ABP] ATIYAH M.F., BOTT R., PATODI V.K., On the heat equation and the Index Theorem, Invent. Math. 19 (1973), 279-330.

[A] ATIYAH M.F., Circular symmetry and stationary phase approximation, Colloque en l'honneur de L. Schwartz, Astérisque n° 131 (1985), 43-59.

[AS] ATIYAH M.F., SINGER I.M., The Index of elliptic operators, Ann. of Math. I, 87 (1968), 484-530 ; III, 87 (1968), 546-604.

[BV1] BERLINE N., VERGNE M., Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, Duke Math. J. 50 (1983), 539-549.

[BV2] BERLINE N., VERGNE M., A computation of the equivariant Index, Bull. Soc. Math. France 113 (1985), 305-345.

[B1] BISMUT J.-M., The Atiyah-Singer Theorems: a probabilistic approach I, J. Funct. Anal. 57 (1984), 56-99.

[B2] BISMUT J.-M., Index Theorem and equivariant cohomology on the loop space, Comm. Math. Phys. 98 (1985), 213-237.

[B3] BISMUT J.-M., The Atiyah-Singer Theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1986), 91-151.

[B4] BISMUT J.M., Localization formulas, superconnections and the Index Theorem for families, Comm. Math. Phys. 103 (1986), 127-166.

[B5] BISMUT J.M., Demailly's asymptotic Morse inequalities: a heat equation proof, J. Funct. Anal. 72 (1987), 263-278.

[Bo] BOTT R., Vector fields and characteristic numbers, Mich. Math. Journal 14 (1967), 231-244.

[DH] DUISTERMAAT J.J., HECKMAN G., On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, Invent. Math. 69 (1982), 259-268 ; Addendum, 72 (1983), 153-158.

[De] DEMAILLY J.P., Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' cohomologie, Ann. Inst. Fourier 35 (4) (1985), 189-229.

[G1] GETZLER E., Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem, Comm. Math. Phys. 92 (1983), 163-178.

[G2] GETZLER E., A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem, Topology 25 (1986), 111-117.

[Gi] GILKEY P., Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, Adv. in Math. 10 (1973), 344-382.

[L] LÉVY P., Wiener's random functions and other Laplacian random functions, Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat, and Prob., J. Neyman ed., Univ. of Calif. Press, Berkeley 1951, p.171-187.

[MKS] Mc KEAN H., SINGER I.M., Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom. 1 (1967), 43-69.

Université Paris-Sud
Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex
France