

# *Astérisque*

AST

**Orbites unipotentes et représentations - I. Groupes finis  
et Algèbres de Hecke - Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 168 (1988), p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1988\\_\\_168\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__168__1_0)

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**168**

**ASTÉRISQUE**

**1988**

**ORBITES UNIPOTENTES  
ET  
REPRÉSENTATIONS**

**I. Groupes finis et Algèbres de Hecke**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**  
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**A.M.S. Subjects Classification (par article) :**

**20 G 40, 20 G 15 - 20 G 40, 20 G 40, 20 G 40, 20 G 40, 14 L 35.**

## AVANT-PROPOS

L'apparition dans des domaines différents : la théorie des représentations des groupes de Lie réductifs réels ou  $p$ -adiques (classification et construction des représentations, formules de caractères, unitarisabilité), la théorie des formes automorphes, la théorie des représentations des groupes finis simples du type de Lie (classification et calcul des caractères), la classification des idéaux primitifs des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie semisimples, d'un certain nombre d'idées communes est à l'origine de la rencontre dont les présents recueils constituent les actes. Ce sont notamment la géométrie de la variété des drapeaux, la géométrie des orbites unipotentes de la représentation adjointe, les représentations des groupes de Weyl, la structure des algèbres de Hecke, la correspondance de Springer.

Une certaine unité des méthodes et la diversité de leurs champs d'application rendaient intéressante l'idée de rassembler (presque) tous les spécialistes de ces questions pour une période dépassant la semaine habituelle. Le Centre national de la recherche scientifique et la direction de la recherche du Ministère de l'éducation nationale ayant manifesté leur intention d'appuyer la recherche en mathématiques en rendant possible en France des rencontres d'une certaine envergure sous la forme d'années à thème, nous avons décidé en janvier 1986 d'organiser en juin et juillet de l'année suivante la période spéciale "orbites unipotentes, représentations des groupes réductifs réels,  $p$ -adiques et finis, et représentations des algèbres de Hecke". J'ai accepté d'en présider le comité d'organisation, constitué par ailleurs de François Digne, Michel Duflo, Guy Henniart, Paul Gérardin et Jean-Pierre Labesse.

Décrivons brièvement le déroulement de la période spéciale. Sept séries de cours, en général le matin, présentaient les aspects principaux des développements de ces dernières années. Les après-midis étaient consacrées à des conférences plus spécialisées. La plupart du temps, les rencontres avaient lieu soit à Paris, soit à Orsay, et les activités étaient concentrées sur trois jours par semaine afin de laisser aux participants le temps de comprendre, ou, plus simplement, de souffler. Cependant, la semaine centrale s'est déroulée sous forme d'un colloque au Centre international de recherches mathématiques à Luminy. Après quatre semaines de travail intensif dans l'agitation parisienne (Jussieu ou Orsay), le cadre et les excellentes installations et conditions de travail du CIRM ont été particulièrement appréciés.

On trouvera à la suite de cette présentation la liste des participants (plus de cent mathématiciennes et mathématiciens de dix-huit pays) ainsi que la liste des cours et des conférences. Ceux des intervenants qui le désiraient ont proposé leurs contributions, rédaction de cours ou article de recherche, pour publication dans les actes. Conformément à la tradition d'*Astérisque*, les manuscrits proposés ont été examinés individuellement par un referee... et acceptés ou non suivant la procédure

## ORBITES UNIPOTENTES ET REPRÉSENTATIONS

habituelle, par le comité de rédaction de la revue. En fin de compte, la liste des articles rassemblés dans ces trois volumes est représentative de la période spéciale elle-même.

Les actes sont, pour des raisons plus techniques que scientifiques, divisés en trois volumes: *Groupes finis et algèbres de Hecke*, *Groupes  $p$ -adiques et réels*, *Orbites et faisceaux pervers*. Les frontières entre les trois volumes sont quelque peu arbitraires, et il est préférable de penser aux trois volumes comme formant un tout - un témoignage, en quelque sorte, de l'unité profonde de la théorie des groupes et de la géométrie.

Au cours de la période spéciale un autre colloque a eu lieu, en l'honneur de Roger Godement à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire. La parution de ces actes nous fournit l'occasion de lui rendre hommage, tant pour son oeuvre mathématique, que pour son souci constant de penser les rapports entre science et société.

Je tiens à remercier ici M. Daniel Barsky, président du comité national du C.N.R.S. pour les mathématiques et Monsieur Claude Godbillon, chargé de mission pour les mathématiques à la direction de la recherche du Ministère de l'éducation nationale pour leur soutien sans faille pendant les dix-huit mois de préparation de cette entreprise. Nous avons aussi bénéficié de la compréhension du directeur scientifique au C.N.R.S. pour les mathématiques et la physique de base, Monsieur Jean-Claude Lehmann, et de l'efficace intervention du président de la section compétente du Conseil supérieur des universités, Monsieur Jean-Louis Nicolas.

Si le C.N.R.S. et le Ministère de l'éducation nationale ont fourni une part essentielle du budget, la période spéciale n'aurait pas eu l'ampleur voulue sans des contributions parfois importantes de plusieurs établissements universitaires et d'équipes de recherche : les universités Paris 7, Paris-Sud (Orsay), Pierre et Marie Curie, l'Ecole Normale Supérieure, l'Université de Dijon, l'Université de Nancy I, les unités associées au C.N.R.S. 748 "Théorie des groupes, représentations, applications", 744 "Théorie des groupes finis", 752 "Géométrie algébrique et théorie des nombres", 762 "Laboratoire de mathématiques de l'E.N.S."

Dans la préparation matérielle, j'ai eu la chance de pouvoir compter sur la collaboration de Mme Claude Orioux (qui assurait le secrétariat de l'U.A. 748), dont la compétence et le dévouement exceptionnels m'ont considérablement facilité la tâche. Je tiens également à remercier le personnel administratif de l'UER de mathématiques de l'Université Paris 7, et tout particulièrement Mlle Marie-Thérèse Gschwendtner, ainsi que le personnel de l'administration centrale de l'Université Paris 7, de l'administration déléguée du C.N.R.S. de la rue Pierre et Marie Curie, du CIRM, du département de mathématiques et de l'administration centrale de l'Université Pierre et Marie Curie. Je voudrais enfin remercier mes collègues de l'U.A. 748 de leur aide et de leur gentillesse.

Martin ANDLER

## Liste des participants

ADAMS J.  
AHUMADA G.  
ANDLER M.  
ARTHUR J.  
ASAI T.  
AUBERT A.M.  
BALDONI-SILVA W.  
BARBASCH D.  
BARLET D.  
BARRAT P.  
BEDARD R.  
BENLOLO E.  
BENOIST Y.  
BERLINE N.  
BIEN F.  
BLANC P.  
BLOCK J.L.  
BOUAZIZ A.  
BRYLINSKI J.L.  
CARAYOL H.  
CARMONA J.  
CARTIER P.  
CHARBONNEL J.Y.  
CHOUCROUN F.  
CLOZEL L.  
COUILLENS M.  
CURTIS C.W.  
DELORME P.  
DEXEUS J.  
DIGNE F.  
DOURMASHKIN P.  
DU CLOUX F.  
DUFLO M.  
ENGUEHARD M.  
FLICKER Y.  
FRIEDBERG S.  
FUJIWARA H.  
GALLEGOS-JARPA G.  
GARFINKLE D.  
GERARDIN P.  
GUEMES J.  
GUICHARDET A.  
GUPTA H.  
HAASTERT B.  
HALES T.  
HARINCK P.  
HECKMAN G.  
HENNIART G.  
HERSANT A.  
HOWE R.  
ILAMED Y.L.  
JACQUET H.  
JANTZEN J.C.  
JOHNSON J.  
JOSEPH A.  
KAC V.  
KAMOUN N.  
KASHIWARA M.  
KAWANAKA N.  
KHALGUI M.S.  
KNAPP A.W.  
KOTTWITZ R.  
KRAFT H.  
LABESSE J.P.  
LAUMON G.  
LEHRER G.I.  
LEVASSEUR T.  
LI W.  
LICHTIN B.  
LUSZTIG G.  
MACDONALD I.G.  
MALLIAVIN M.P.  
MATHIEU O.  
MATSUMOTO H.  
MELNIKOV A.  
MICHEL J.  
MIRKOVIC I.  
MOEGLIN C.  
MOONS T.  
MOY A.  
MURNAGHAN F.  
NGHIEM-XUAN-HAI  
PERETS G.  
PERRIN P.  
PICHET C.  
POLO P.  
PROCESI M.  
RENTSCHLER R.  
RODIER F.  
ROSSMANN W.  
ROSSO M.  
RUBENTHALER H.  
SAITO M.  
SALLY P.  
SANCHEZ-PALACIO J.L.  
SANSUC J.-J.  
SAVIN G.  
SCHAPIRA P.  
SCHMID W.  
SHELSTAD D.  
SHI J.  
SHOJI T.  
SOTO-ANDRADE J.  
SPALTENSTEIN N.  
SPEH B.  
SPRINGER T.  
SRINIVASAN B.  
SUND T.  
TADIC M.  
TANISAKI T.  
TITS J.  
TORASSO P.  
UZAWA T.  
VAN LEEUWEN M.  
VANNONI C.  
VERGNE M.  
VIGNERAS M.-F.  
VILONEN K.  
VOGAN D.  
WALDSPURGER J.-L.  
WIGNER D.  
WOLF J.  
ZUCKER S.

Titres des conférences

ADAMS J.	L-Functoriality for Dual Pairs.
ARTHUR J.	Global motivation for the Unitary Dual (I,II,III,IV). $L^2$ -cohomology and Hecke operators
ASAI T.	On the irreducible representations of the finite classical groups with non-connected centers.
AUBERT A.M.	Représentation métaplectique et sous-groupes d'Iwahori.
BARBASCH D.	Unipotent representations for semi-simple Lie group (I,II).
BARLET D.	Fundamental class and intersection cohomology
BENOIST Y.	On the $n$ -cohomology of $n$ -locally nilpotent $\mathfrak{g}$ -modules.
BIEN F.	Unipotent representations of $\text{Diff } S^1$ .
BOUAZIZ A.	Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ .
BRYLINSKI J.L.	Hochschild homology and orbital integrals. Twisted differential operators and $\mathfrak{g}$ -finite endomorphisms
CARTIER P.	Representations of Hecke algebras of type $A_n$ .
CLOZEL L.	Howe's conjecture.
CURTIS C.W.	Representations of Hecke Algebras (I, II, III). The Gelfand-Graev representation of a finite Chevalley group
DIGNE F.	Shintani descent and Hecke algebras
FLICKER Y.	A simple trace formula.
GARFINKLE D.	Cells in Weyl groups.
GUEMES J.	On the homology classes for the components of some fibres of Springer's resolution.
GUPTA H.	Translation actions and limits of functions on adjoint orbits
HALES T.	Germes and transfer for subregular unipotent classes.
HECKMAN G.	Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$
HOWE R.	Minimal K-types, Hecke algebras and the classification of representations of $GL(n)$ .
JACQUET H.	Spherical functions and trace formula.
JANTZEN J.C.	Support varieties for restricted Lie algebras.
JOHNSON J.	Base change $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ .
JOSEPH A.	Primitive ideals (I,II,III). Scale factors in Goldie rank polynomials.
KAC V.	Moduli of curves and representation theory.
KASHIWARA M.	$D$ -modules and representation theory (I,II,III,IV,V). Character formula and Matsuki correspondence.
KAWANAKA N.	Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semi-simple Lie algebra.

*TITRES DES CONFÉRENCES*

- KNAPP A.W. A construction of unitary representations in parabolic rank two.
- KOTTWITZ R. On Tamagawa numbers.
- KRAFT H. Normality and non-normality of closures of conjugacy classes
- LAUMON G. Un analogue global du cône nilpotent.
- LEHRER G.I. Actions of Coxeter groups on certain cohomology groups.  
The Kazhdan-Lusztig polynomials and reflection subgroups in Coxeter groups.
- LUSZTIG G. Affine Hecke algebras (I, II, III, IV).  
Fixed point varieties on affine flag manifolds.
- MACDONALD I.G. Symmetric functions and spherical functions.
- MATHIEU O. Weyl formula for general Kac-Moody Lie algebras.
- MIRKOVIC I. Characteristic varieties of character sheaves.
- MOY A. Isomorphisms of Hecke algebras.
- POLO P. A good filtration for tensor products of modules associated with Schubert varieties.
- PROCESI M. Cohomology of compactifications of symmetric varieties.
- ROSSMANN W. Equivariant multiplicities.
- ROSSO M. Algèbres de Hecke et groupes quantiques.
- SAVIN G. Limit multiplicities of cusp forms.
- SCHMID W. Local cohomology and the duality theorem.
- SHELSTAD D. Regular unipotent germs and transfer.
- SHIJ. Some recent developments on cells of affine Weyl groups.
- SHOJI T. Geometry of orbits and Springer correspondence (I,II,III). A remark on the Shintani descent for finite algebraic groups.
- SOTO-ANDRADE J. Generalized Weil representations.
- SPALTENSTEIN N. Nilpotent orbits and conjugacy classes in the Weyl group.
- SPEH B. Automorphic representations for complex semisimple Lie groups, and Lefschetz numbers.
- SPRINGER T. Character Sheaves (I, II, III, IV).  
Some properties of Kazhdan-Lusztig polynomials.
- TADIC M. Geometry of dual spaces of p-adic reductive groups.
- TANISAKI T. Hodge modules and Hecke algebras.
- UZAWA T. Equivariant compactifications of symmetric spaces.
- VERGNE M. On Zuckerman's functor.
- VILONEN K. A good category of  $(\mathfrak{g}, \mathbf{K})$ -modules.
- VOGAN D. Unitary dual for real reductive groups (I, II, III, IV).  
On the definition of Arthur's characters.
- WALDSPURGER J.L. Les intégrales orbitales pour le groupe linéaire sur un corps p-adique.
- WOLF J. Harmonic analysis on general semi-simple Lie groups.
- ZUCKER S.  $L^2$ -cohomology of arithmetic varieties and intersection homology of their Baily-Borel-Satake compactification.





## TABLE DES MATIÈRES

### Volume I - Groupes finis et Algèbres de Hecke

	Page
<b><u>Cours</u></b>	
CURTIS C.W., <i>Representations of Hecke Algebras.</i> .....	13
SHOJI T., <i>Geometry of orbits and Springer correspondence.</i> .....	61
 <b><u>Articles</u></b>	
HOWLETT R.B. and LEHRER G.I., <i>On the integral group algebra of a finite algebraic group.</i> .....	141
LUSZTIG G., <i>On the representations of reductive groups with disconnected centre .</i> .....	157
PANTOJA J. and SOTO-ANDRADE J., <i>Groupes de Grassmann-Heisenberg et représentations de Weil généralisées pour <math>SL(n)</math>, <math>n</math> pair.</i> .....	167
SPALTENSTEIN N., <i>Polynomials over local fields, nilpotent orbits and conjugacy classes in Weyl groups.</i> .....	191

**Volume II - Groupes p-adiques et réels**

**Cours**

ARTHUR J., *Unipotent automorphic representations : Conjectures.*  
LUSZTIG G., *Representations of affine Hecke algebras.*

**Articles**

ADAMS J., *L-Functoriality for dual pairs.*  
BALDONI-SILVA M.W. and KNAPP A.W. : *Intertwining operators and unitary representations II.*  
BOUAZIZ A., *Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ .*  
HALES T.C., *Shalika Germs on  $GSp(4)$ .*  
HOWE R. and MOY A., *Minimal K-types for  $GL(n)$  over a p-adic field .*  
SHELSTAD D. , *A formula for regular unipotent germs.*  
WALDSPURGER J.L., *Intégrales orbitales sphériques pour  $GL(N)$  sur un corps p-adique.*

**Volume III - Orbites et Faisceaux pervers**

**Cours**

JOSEPH A. , *The primitive spectrum of an enveloping algebra.*  
KASHIWARA M., *Representation theory and D-modules on flag varieties.*  
MARS, J.G.M. and SPRINGER, T.A., *Character sheaves.*

**Articles**

GINSBURG V., *Admissible modules on a symmetric space.*  
GÜEMES J.J., *On the homology classes for the components of some fibres of Springer's resolution.*  
KRAFT H. and PROCESI C. , *A special decomposition of the nilpotent cone of a classical lie algebra.*  
POLO P., *Variétés de Schubert et excellentes filtrations.*  
ROSSMANN W. , *Equivariant multiplicities on complex varieties.*

## GROUPES FINIS ET ALGÈBRES DE HECKE

### ABSTRACTS

CURTIS, C.W. *Representations of Hecke Algebras.*

These lecture notes begin with a survey of some applications of Hecke algebras to the representation theory of reductive algebraic groups over finite fields, and to the zeta functions of the Deligne-Lusztig varieties. The main subject is the representation theory of the generic Hecke algebra  $\mathbf{H}$  of a finite Coxeter group  $W$ , following the approach of Kazhdan and Lusztig. Particular emphasis is given to new asymptotic methods introduced by Lusztig. These lead to the connection between Duflo involutions and left cells in  $W$ , and the construction of a  $\mathbf{Z}$ -algebra  $J$ , which is an asymptotic form of  $\mathbf{H}$ . The irreducible character values of the algebra  $J$  in a splitting field turn out to be the leading terms of the irreducible character values of  $\mathbf{H}$ . This information can be applied to calculate an important numerical function on  $W$  in terms of the generic degrees associated with irreducible characters of  $W$ .

SHOJI, T. *Geometry of orbits and Springer correspondence.*

In these lecture notes, we give an exposition of the theory of Springer correspondence, i.e., the relationship between unipotent conjugacy classes of a reductive group and representations of its Weyl group, originated by Springer. The main parts of these notes are devoted to the theory of generalized Springer correspondence, which is a beautiful generalization due to Lusztig of the above theory. We also discuss about the generalized Green functions in connection with the representation theory of reductive groups over a finite field, and also about the Fourier transforms of perverse sheaves on a Lie algebra. Both of them are closely related to the theory of generalized Springer correspondence.

HOWLETT, R.B. and LEHRER, G.I. *On the integral group algebra of a finite algebraic group.*

Let  $G$  be the group of  $\mathbf{F}_q$ -rational points of a connected reductive

algebraic group defined over  $\mathbf{F}_q$ , and let  $U$  be a maximal unipotent subgroup of  $G$ . The standard embeddings of  $E_R = \text{End}_{RG}(\text{Ind}_U^G(1))$  into  $RG$  (the group ring over  $R$ ) involve division by the integers

$[UnU : U]$  (for  $n \in G$ ). We give explicit embeddings of  $E_{\mathbf{Z}}$  into  $\mathbf{Z}G$  which depend on the multiplicative properties of certain "stratified double coset sums". The embeddings are related to the Steinberg representation of  $G$  and imply the existence of certain involutory automorphisms of  $E_{\mathbf{Z}}$ . They also imply earlier results concerning the embeddings of the ordinary Hecke algebras  $H_R(G, B)$  where  $R = \mathbf{Z}[|B/U|-1]$  in  $RG$ . All of these results are relevant to the characteristic  $p$  representation theory of  $G$  and may stem from the geometry of Bruhat cells.

LUSZTIG, G. *On the representations of reductive groups with disconnected center.*

Let  $G$  be a connected reductive algebraic group defined over a finite field and  $F : G \rightarrow G$  its Frobenius map. In the case when the centre of  $G$  is disconnected, we give a parametrization of the irreducible  $\ell$ -adic representations of the finite group  $G^F$ , in terms of the dual group. The case where the center of  $G$  is connected was known previously and the proof in the general case proceeds by reduction to this special case.

PANTOJA, J. and SOTO-ANDRADE, J. *Groupes de Grassmann-Heisenberg et représentations de Weil généralisées pour  $SL_n$ ,  $n$  pair.*

In this paper, A. WEIL's original method for constructing the metaplectic projective representation of the symplectic groups over a local field is extended to the groups  $SL_n$  ( $n$  even) over a finite field  $k$ . To this end, generalized higher order HEISENBERG groups are introduced (here called GRASSMANN-HEISENBERG groups) and SCHRÖDINGER-like representations of these groups are constructed.

SPALTENSTEIN, N. *Polynomials over local fields, nilpotent orbits and conjugacy classes in Weyl groups.*

Kazhdan and Lusztig have defined a natural map from nilpotent orbits of a semisimple complex Lie algebra to conjugacy classes in the Weyl group. In this paper this map is described in terms of partitions for the symplectic and orthogonal Lie algebras (this leaves some

## *ABSTRACT*

indeterminacies in type  $D_{2n}$ ,  $n \geq 2$ ). Consider a discrete valuation ring  $R$  and its residual field  $k$ , with  $R$  complete,  $k$  algebraically closed and  $\text{char}(k) \neq 2$ . The determination of the map defined by Kazhdan and Lusztig relies on the analysis of the generic factorization pattern for the characteristic polynomial of an element in a split symplectic or orthogonal Lie algebra over  $R$  which reduces to a given nilpotent element over  $k$ .