Astérisque

AST

Représentations linéaires des groupes finis - Luminy, 16-21 mai 1988 - Pages préliminaires

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__1_0>

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

181-182 ASTÉRISQUE

1990

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Luminy, 16-21 mai 1988

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mots-clés :

méthodes locales, algèbres de source, théorie d'Auslander-Reiten, équivalences de Morita, isométries, modules de permutation, catégories dérivées, méthodes cohomologiques, foncteurs de Mackey.

COLLOQUE SUR LES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

C.I.R.M. Luminy, 16-21 mai 1988.

Le colloque de Luminy a réuni des spécialistes des groupes finis pour qui les représentations linéaires constituent non seulement un outil efficace mais aussi un objet d'études plus générales. Les résultats (et les conjectures...) présentés à Luminy forment un ensemble significatif des recherches actuelles dans ce domaine. De plus, les liens entre les différents exposés se sont avérés nombreux ; certains étaient attendus, d'autres se sont révélés à cette occasion. Le présent volume devrait donc confirmer la vitalité de la recherche sur les groupes finis.

Le colloque a été organisé dans le cadre du projet de coopération franco-allemand PROCOPE dont la partie allemande a assuré le financement. Il faut également remercier la Société Mathématique de France pour son soutien, d'abord au CIRM, puis par Astérisque.

Ceux qui connaissent le CIRM apprécient l'agrément du travail là-bas. Cet agrément doit beaucoup à Gilles Lachaud et Anne Zeller-Meier. A Paris, le colloque a été matériellement organisé par Michel Enguehard et Claudine Picaronny.

Je voudrais également remercier les auteurs pour leur confiance et leur rapidité qui ont rendu possible ce volume.

Marc Cabanes

DMI-ENS, 45, rue d'Ulm, 75005 PARIS.

Liste des participants.

Anne-Marie AUBERT (ENS Paris), Frank BERNHARDT (Université de Mainz), Christine BESSENRODT (Université d'Essen), Robert BOLTJE (Université d'Augsburg), Michel BROUE (ENS Paris), Marc CABANES (ENS Paris), Christian CUVIER (ENS Paris), François DIGNE (ENS Paris), Michel ENGUEHARD (ENS Paris), Karin ERDMANN (Mathematical Institute, Oxford), Paul FONG (Université de l'Illinois, Chicago), Odile GAROTTA (Université du Michigan, Ann Arbor), Holger GOLLAN (Université d'Essen), Ingo JANISZCZAK (Université de Bielefeld), Reinhard KNORR (Université d'Essen), Burkhardt KULSHAMMER (Université d'Essen), Udo LEISERING (Université de Mainz), Markus LINCKELMANN (ENS Paris), Olaf MANZ (Université de Mainz), Gerhardt MICHLER (Université d'Essen), Jorn OLSSON (Université de Copenhague), Claudine PICARONNY (ENS Paris), Lluis PUIG (ENS Paris), Geoffrey ROBINSON (UMIST Manchester), Leonard SCOTT (Université de Virginie, Charlottesville), Maria Chiara TAMBURINI (Université Catholique de Brescia), Peter WEBB (Université de Manchester), Wolfgang WILLEMS (Université de Mainz).

Table des matières

pages

Résumés. 5

Christine Bessenrodt, ... 11
Some new block invariants coming from cohomology.

Robert Boltje, ... 31
A canonical Brauer induction formula.

Michel Broué, ... 61
Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées.

Marc Cabanes, ... 93
A criterion for complete reducibility and some applications.

François Digne, Jean Michel, ... 113
On Lusztig's parametrization of characters of finite groups of Lie type.

Michel Enguehard, ... 157
Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques.

Karin Erdmann, ... 173
On the local structure of tame blocks.

Odile Garotta, ... 191
On Auslander-Reiten systems.

Reinhard Knörr, Wolfgang Willems, ... 195
The automorphism groups of generalized Reed-Muller codes.

Burkhard Külshammer, ... 209
Morita equivalent blocks in Clifford theory of finite groups.

Udo Leisering, ... 217
On the p-part of character degrees of solvable groups.

Lluis Puig, ... 221
Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley.

Geoffrey R. Robinson, Reiner Staszewski, ... 237
More on Alperin's conjecture.

Leonard L. Scott, ... 257
Defect groups and the isomorphism problem.

Jacques Thévenaz, Peter Webb, ... 263
Mackey functor versions of a conjecture of Alperin.

Résumés-Abstracts

Christine Bessenrodt, **Some new block invariants coming from cohomology.**

In this article we introduce some new invariants for blocks of group algebras of finite groups which are based on the notion of complexity as defined by Alperin. These invariants are used to obtain some contributions to a problem posed by Scott and Alperin in 1986 : the isomorphism type of the defect groups of a block is determined by the block algebra (i.e. independently of the chosen group basis) for certain types of defect groups. For example, this applies to the situation where the defect groups are known to be abelian or, more generally, hamiltonian. Our results hold for blocks of integral as well as modular group algebras.

Dans cet article nous introduisons des invariants nouveaux pour des blocs des algèbres des groupes finis, qui utilisent la notion de complexité définie par Alperin. Ces invariants sont employés pour obtenir une réponse partielle à une question posée par Scott et Alperin en 1986 : nous montrons en effet que le type d'isomorphisme des groupes de défaut est déterminé par l'algèbre de bloc (indépendamment du groupe ambiant) dans le cas, par exemple, où les groupes de défaut sont *a priori* supposés abéliens ou plus généralement hamiltoniens. Nos résultats s'appliquent non seulement aux blocs des algèbres entières, mais encore aux blocs des algèbres modulaires.

Robert Boltje, **A canonical Brauer induction formula.**

En 1946, R. Brauer a démontré que tout caractère d'un groupe fini est combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères induits par des caractères de dimension 1. On donne une forme explicite de ce théorème d'existence, c'est-à-dire une formule explicite pour écrire un caractère arbitraire de cette façon. Cette formule est fonctorielle par rapport à la restriction des caractères, et elle est unique satisfaisant quelques conditions naturelles. Par la même méthode on obtient des formules fonctorielles exprimant un caractère arbitraire comme combinaison linéaire à coefficients rationnels des caractères induits par des caractères de dimension 1 de sous-groupes d'un type restreint. Par exemple on retrouve le théorème d'Artin, où le type de sous-groupes est donné par les sous-groupes cycliques.

Michel Broué, **Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées.**

Notre conviction est que la structure l-locale d'un groupe fini G a une profonde influence sur la catégorie dérivée de l'algèbre de G sur un anneau l-adique. Ce mémoire a pour objet de convaincre le lecteur du bien-fondé de cette conviction. Dans cette perspective, nos résultats sont modestes. Nous nous concentrons presque exclusivement sur ce qui se passe au niveau des caractères. Nous définissons et étudions la notion d'"isométrie parfaite" entre deux groupes finis, qui doit être comprise comme la correspondance induite au niveau des caractères par une équivalence de catégories dérivées. Nous en fournissons de nombreux exemples, qui viennent à l'appui de notre conviction.

Marc Cabanes, **A criterion for complete reducibility and some applications.**

Let A be a finite dimensional algebra over a field k, let Y be a f.g. A-module, let $A-\mathbf{mod}_Y$ be the full subcategory of endomorphic images of powers of Y in A-**mod**. We show that if $\mathrm{End}_A Y$ is self-injective then A-$\mathbf{mod}_Y$ and $(\mathrm{End}_A(Y))^o$-**mod** are equivalent. The subcategory A-$\mathbf{mod}_Y$ is not stable by quotients in A-**mod** but when it contains the simple modules this leads to a criterion of complete reducibility. This applies to $A = kG$, $Y = \mathrm{Ind}_U^G k$ when G is a finite BN-pair of characteristic $p = \mathrm{char}(k)$ and U is one of its Sylow p-subgroups ; $\mathrm{End}_{kG} Y$ is a modular Hecke algebra. The equivalence of categories and the criterion of complete reducibility are applied to certain questions on kG-modules stemming from the study of finite geometries and extensions of simple modules.

François Digne, Jean Michel, **On Lusztig's parametrization of characters of finite groups of Lie type.**

In this paper we first give conditions ensuring unicity for the Jordan decomposition of irreducible characters of finite groups of Lie type with a connected centre. In the case of groups with a non-connected centre, we extend Lusztig's parametrization of irreducible characters. This generalization is such that formulas giving the multiplicities of irreducible characters in Deligne-Lusztig characters are the natural generalizations of the connected centre case (*i. e.*, given by "Fourier transforms"). We then compute under suitable assumptions (which we prove to be verified in the case of principal series characters) Shintani descent of irreducible characters using this parametrization and the Fourier transform.

Dans cet article nous donnons des conditions assurant l'unicité de la décomposition de Jordan des caractères irréductibles de groupes finis de type de Lie à centre connexe. Nous généralisons ensuite aux groupes à centre non connexe la paramétrisation de Lusztig des caractères irréductibles, de façon que les multiplicités des caractères irréductibles dans les caractères de Deligne-Lusztig soient données par des formules ("transformation de Fourier") généralisant le cas du centre connexe. Enfin nous donnons en termes de cette paramétrisation et de la transformation de Fourier une formule conjecturale pour la descente de Shintani des caractères irréductibles et nous prouvons cette formule pour la série principale.

Michel Enguehard, **Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques.**

Soient p un nombre premier, G un groupe symétrique et B un p-bloc de G. On sait, depuis les travaux de Robinson et Osima, que certains invariants de B, à savoir le nombre d'irréductibles ordinaires, le nombre d'irréductibles modulaires, ainsi que les invariants de similitude de la matrice de Cartan de B sont déterminés par un entier naturel attaché à B, aoppelé communément le "poids" ("weight") de B. On démontre ici qu'entre les groupes de Grothendieck de deux blocs de groupes symétriques de même poids il existe une isométrie parfaite au sens de Broué. L'existence de cette isométrie implique l'égalité des invariants cités plus haut. La démonstration est inductive et utilise une décomposition de l'espace des fonctions centrales propre aux groupes symétriques, décomposition déjà employée par Osima. Elle s'appuie sur la formule de Murnaghan-Nakayama, donc finalement sur une propriété combinatoire relative à la géométrie des crochets d'une partition.

Karin Erdmann, **On the local structure of tame blocks.**

Let B be a p-block of tame representation type, that is, $p = 2$ and the defect groups are dihedral or semidihedral or (generalized) quaternion. These blocks have been classified recently as algebras, up to Morita equivalence. In this paper we show how these results on algebras determine $l(B)$, $k(B)$, Cartan matrices and decomposition numbers for the blocks. In particular, this gives new proofs of results by Brauer and Olsson.

Odile Garotta, **On Auslander-Reiten systems.**

After recalling our definition of Auslander-Reiten systems, which generalize almost split sequences of kG-modules in terms of idempotents in a symmetric interior G-algebra, we give sufficient conditions for the Auslander-Reiten system ending in a given idempotent i to be a pullback from the tensor product $i \otimes \mathcal{L}_k$, where $\mathcal{L}_k$ denotes the Auslander-Reiten system ending in the identity element of the trivial interior G-algebra k. Our approach and results are different from those of Auslander and Carlson for almost split sequences (J. Alg. 103), and they apply to the significant case where i is a source of a block algebra ; in this case we give an explicit generator of the socle of the bimodule relevant for constructin the Auslander-Reiten system.

Nous rappelons notre définition des systèmes de Auslander-Reiten, qui généralisent les suites presque scindées de kG-modules en termes d'idempotents d'une G-algèbre intérieure symétrique, et nous décrivons des conditions suffisantes pour que le système de Auslander-Reiten d'extrémité donnée l'idempotent i soit un relevé du système $i \otimes \mathcal{L}_k$, où $\mathcal{L}_k$ désigne le système de Auslander-Reiten d'extrémité l'unité de la G-algèbre intérieure triviale k. Notre approche et nos résultats diffèrent de ceux obtenus par Auslander et Carlson pour les suites presque scindées (J. Alg. 103), et ils s'appliquent au cas particulier significatif où i est une source d'une algèbre de bloc ; dans ce cas nous donnons un générateur explicite du socle du bimodule associé à la construction du système de Auslander-Reiten.

Reinhard Knörr, Wolfgang Willems, **The automorphism groups of generalized Reed-Muller codes.**

It is clear that the automorphism group of a generalized Reed-Muller code $\mathrm{GRM}(r,m)$ of degree p^m over a prime field F_p contains the scalars F_p^* and the affine linear group $\mathrm{AGL}(m,p)$. It is shown that in general it is not bigger, i.e.

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{GRM}(r,m)) = \mathrm{F}_p^* \times \mathrm{AGL}(m,p)$$

with the obvious exceptions for $r = 0$, $m(p-1)$ and $m(p-1)-1$. This generalizes results known for $p = 2$ to arbitrary primes. The proof depends on the classification of doubly transitive groups ; a few small cases are done by *ad hoc* methods.

Burkhard Külshammer, **Morita equivalent blocks in Clifford theory of finite groups.**

Let F be an algebraically closed field of prime characteristic p, let H be a finite group, and let K be a normal subgroup of H. Let B be a block of the group algebra FK, and let A be a block of FH covering B. We are intersted in the question under what conditions A and B are Morita equivalent. We define a special type of Morita equivalence and show that A and B are equivalent in this way if and only if they have the same defect and H acts by inner automorphisms on B. In case B is G-stable this condition is satisfied for A and B if and only if it is satisfied for their Brauer correspondents.

Udo Leisering, **On the p-part of character degrees of solvable groups.**

Assume $p^2 \nmid \beta(1)$ for all $\beta \in \mathrm{IBr}(G)$, where G is a finite solvable group. Then we obtain that the Sylow p-subgroups of G are elementary abelian and $p^2 \nmid \chi(1)$ for all $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Lluis Puig, **Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley.**

Le point de départ de cet exposé a été constater qu'un simple argument sur des dimensions permet de déterminer l'algèbre de source de certains p-blocs des groupes de Chevalley en caractéristique différente de p : il s'agit des p-blocs induits — au sens soit de Brauer soit de Harish-Chandra — à partir d'un p-bloc "cuspidal" d'un sous-groupe de Levi rationel, ayant un groupe de Weyl d'ordre premier à p, un groupe de défaut dont le centralisateur est contenu dans le sous-groupe de Levi et une structure locale nilpotente.

The starting point of this lecture has been the remark that an easy dimensional argument is powerful enough to get the source algebra of some p-blocks of Chevalley groups in characteristic different of p : it concerns the p-blocks induced — both in Brauer and Harish-Chandra's senses — from a p-block of a rational Levi subgroup, having a Weyl group of order prime to p, a defect group with the centralizer contained in the Levi subgroup and a nilpotent local structure.

Geoffrey R. Robinson, Reiner Staszewski, **More on Alperin's conjecture.**

We consider how Alperin's conjecture on the number of simple kG-modules is affected by the presence of proper, non-trivial, normal subgroups. We prove that a minimal counterexample to this conjecture has no non-trivial p-factor-group (where $p = \mathrm{char}(k)$), and we present other conjectures, related to Alperin's, which predict some compatibility with the action of a group of automorphisms. We prove that one of these conjectures (though apparently stronger) is actually equivalent to Alperin's conjecture.

Leonard L. Scott, **Defect groups and the isomorphism problem.**

As a ring, a block arise from more than one finite group. The resulting conjugacy issue for defect groups is important for the group ring isomorphism problem and for understanding block theory in general. There are even indirect structural consequences for finite groups, through G. Robinson's work on the "Z-star theorem" for odd primes. A positive answer to the defect group conjugacy problem is given here for the principal block in the case of cyclic, T.I., Sylow p-subgroups.

Jacques Thévenaz, Peter Webb, **Mackey functor versions of a conjecture of Alperin.**

Dans cette note, nous présentons une conjecture sur l'existence de foncteurs de Mackey pour un groupe fini G. Ces foncteurs devraient être projectifs relativement aux sous-groupes p-locaux de G et leurs dimensions devraient donner le nombre de représentations modulaires irréductibles non projectives de G en caractéristique p. Le résultat principal affirme que cette conjecture est équivalente à la conjecture d'Alperin.

In this note, we present a conjecture on the existence of Mackey functors for a finite group G. These functors should be projective relative to p-local subgroups of G and their dimensions should give the number of non-projective irreducible modular representations of G in characteristic p. The main result asserts that this conjecture is equivalent to Alperin's conjecture.