Astérisque

LOUIS BOUTET DE MONVEL
ANDREI IORDAN

Sur les feuilletages $\mathbb{C}$-tangents des sous-variétés du bord d'une variété complexe

Astérisque, tome 217 (1993), p. 39-52
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__39_0>

SUR LES FEUILLETAGES $\mathbb{C}$-TANGENTS DES SOUS-VARIÉTÉS DU BORD D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE

Louis BOUTET de MONVEL et Andrei IORDAN

§1. Introduction

Dans cet article nous étudions la géométrie de contact ou symplectique des bords des domaines complexes, en relation avec l'analyse complexe sur ces domaines.

Soient D un domaine de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe C^1, et M une sous-variété de classe C^1 de ∂D. On dit que M est $\mathbb{C}$-tangente en un point $p \in M$ si l'espace tangent $T_p(M)$ est contenu dans le plus grand sous-espace $T_p^c(\partial D)$ de l'espace tangent $T_p(\partial D)$ stable par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$. On dira que M est $\mathbb{C}$-tangente si elle l'est en chacun de ses points. On dit encore qu'un feuilletage de M est $\mathbb{C}$-tangent si ses feuilles sont $\mathbb{C}$-tangentes. Si D est strictement pseudoconvexe à frontière de classe C^2, il est prouvé dans [BS], [HT] qu'une sous-variété $\mathbb{C}$-tangente est totalement réelle et de dimension inférieure ou égale à n-1.

On note $\mathcal{O}(\overline{D})$ l'algèbre des fonctions sur $\overline{D}$ qui admettent un prolongement holomorphe au voisinage de $\overline{D}$. Un sous-ensemble E de ∂D est un ensemble localement pic (resp. localement de module maximum) pour $\mathcal{O}(\overline{D})$ s'il existe, pour tout $p \in E$, un voisinage U de p et une fonction holomorphe dans U, tels que f=1 sur $E \cap U$ (resp. $|f|=1$ sur $E \cap U$) et $|f|<1$ sur $\overline{D} \cap U \setminus E$.

On note $A^k(D)$ $(k \leq \infty)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D qui admettent un prolongement de classe C^k à $\overline{D}$; on définit de façon analogue les ensembles localement pic ou localement de module maximum pour $A^k(D)$.

Cette étude est motivée entre autre par les résultats suivants:

THEOREME 1 ([HS],[CC2]).- *Soit* D *un domaine strictement pseudoconvexe, à frontière* C^∞, *dans* $\mathbb{C}^n$. *Un sous-ensemble fermé* E *de* ∂D *est localement pic pour* $A^\infty(D)$ *si et seulement si, au voisinage de chacun de ses points,* E *est contenu dans une sous-variété* $\mathbb{C}$*-tangente de dimension* n-1 *de* ∂D.

THEOREME 2 ([DS]).- *Soient* D *un domaine strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle dans* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété analytique totalement réelle, de dimension* n *de* ∂D. *Alors* M *est localement un ensemble de module maximum pour* $\mathcal{O}(\bar{D})$ *si et seulement si* M *possède un feuilletage analytique réel* $\mathbb{C}$*-tangent de dimension* n-1.

Si D est un domaine strictement pseudoconvexe à frontière C^∞ de $\mathbb{C}^n$, il est prouvé dans [I3] qu'un ensemble localement de module maximum pour $A^\infty(D)$ est, au voisinage de chacun de ses points, contenu dans une sous-variété totalement réelle de dimension n de ∂D qui admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1. Dans le cas d'un domaine borné D strictement pseudoconvexe à frontière C^∞ un sous-ensemble fermé de ∂D localement pic pour $A^\infty(D)$ est globalement un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ [FH]. Il n'en est pas de même pour les ensembles de module maximum: un ensemble localement de module maximum pour $A^\infty(D)$ n'est pas nécéssairement globalement un ensemble de module maximum pour $A^\infty(D)$ (voir [DS] pour un exemple). Dans [I2] il est prouvé qu'une sous-variété M totalement réelle de dimension n de la frontière d'un domaine D à frontière de classe C^2 admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1 si et seulement si la forme de Levi est "diagonalisable dans $T(M) \cap T^c(\partial D)$" (voir §4 corollaire 3).

Dans cet article on étudie les sous-variétés $\mathbb{C}$-tangentes du bord d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ dont la forme de Levi est non-dégénérée en utilisant la structure de contact du bord. En particulier dans le cas strictement pseudoconvexe on caractérise en termes de la forme de Levi les sous variétés du bord qui admettent un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1 (cf th. 4 et cor. 3). On donne aussi des applications aux sous-variétés localement pics ou localement de module maximum pour $\mathcal{O}(\overline{D})$.

§2. Préliminaires.

a) Structures symplectiques.

Rappelons qu'une variété symplectique est une variété différentiable X de dimension paire, $\dim X=2n$, munie d'une forme symplectique, c'est à dire d'une 2-forme Ω fermée ($d\Omega=0$) et non-dégénérée (ie. Ω^n ne s'annule en aucun point de X).

On dit qu'une sous-variété M de X est isotrope (ou isotrope pour Ω) si $\Omega(\xi,\eta)=0$ pour tous vecteurs ξ,η tangents à M. Si M est une sous-variété isotrope de X on a $\dim M\leq n$. Si de plus $\dim M=n$, on dit que M est une sous-variété lagrangienne de X.

Le résultat suivant est dû à A.Weinstein ([W]) dans le cas le plus général; nous l'utiliserons dans le cas plus facile où M_1 et M_2 sont isotropes:

THEOREME 3 [W].- *Soient* (X_1,Ω_1), (X_2,Ω_2) *deux variétés symplectiques,* $M_1\subset X_1$, $M_2\subset X_2$ *des sous-variétés. Soit* φ: $M_1\to M_2$ *un difféomorphisme isométrique (ie. tel que* $\varphi^*(\Omega_2 \mid M_2)=\Omega_1 \mid M_1$*)*[1]. *Alors pour tout* $p\in M_1$ *il existe un voisinage* V_1 *de* p *dans* X_1, *un difféomorphisme* ψ *de* V_1 *sur un voisinage* V_2 *de* $\varphi(p)$ *dans* X_2 *tel que* $\psi\mid_{V_1\cap M_1}=\varphi$ *et* $\psi^*(\Omega_2\mid_{V_2})=\Omega_1\mid_{V_1}$.

Si les données sont analytiques réelles, on peut choisir le difféomorphisme ψ *analytique réel.*

b) Structures de contact

Rappelons qu'une variété de contact est une variété différentiable Z de dimension impaire, $\dim Z=2n+1$, munie d'une forme de contact, c'est à dire d'une 1-forme ω telle que $\omega\wedge(d\omega)^n$ ne s'annule en aucun point de Z (élément de volume).

[1] Nous notons $\Omega \mid M$ la forme induite par Ω sur M : $\Omega \mid M = i^*\Omega$ si $i : \Omega\to M$ est l'injection canonique.

Si (Z,ω) est une variété de contact, il existe un unique champ de vecteurs X_ω sur Z (le champ de vecteurs caractéristique de ω) tel que

$$i(X_\omega)\omega = 1, \quad i(X_\omega)d\omega = 0,$$

où on a noté $i(\xi)\eta$ le produit intérieur gauche d'une forme différentielle η par un champ de vecteurs ξ: $i(\xi)$ est l'unique antidérivation de l'algèbre des formes différentielles telle que $i(\xi)\omega=\langle\xi,\omega\rangle$ (resp. 0) si ω est de degré 1 (resp. 0). La forme $d\omega$ est un invariant intégral absolu de X_ω, ie. on a $i(X_\omega)d\omega=0$ et $\mathcal{L}_{X_\omega}(d\omega)=0$, où $\mathcal{L}_{X_\omega}= d\, i(X_\omega)+i(X_\omega)d$ est la dérivée de Lie. Localement elle fournit par passage au quotient une forme symplectique sur l'espace des orbites de X_ω. Le théorème de Darboux montre qu'il existe au voisinage de chaque point de Z un systèmes de coordonnées locales $(x_0, x_1, \dots x_{2n})$ dans lequel on a $\omega=dx_0+\sum_1^n x_i\, dx_{n+i}$ (dans ces coordonnées on a $X_\omega=\frac{\partial}{\partial x_0}$).

On a $TZ=L_\omega\oplus\ker\omega$, où L_ω est le fibré de rang 1 engendré par X_ω.

On dit qu'une sous-variété N de Z est isotrope (pour ω) si $TN\subset\ker\omega$, ie. si la forme induite sur N par ω est nulle. Si N est une sous-variété isotrope de Z, on a $\dim N\leq n$ (puisque $d\omega\,|\,TN$ est nulle et $d\omega\,|\ker\omega$ est non dégénérée); on dit que N est une sous-variété lagrangienne si de plus $\dim N=n$. La notion d'isotropie, comme le fibré $\ker\omega$ (mais pas X_ω), ne dépendent que de la classe conforme de Z, c'est à dire de ω à un facteur multiplicatif près.

c) Forme de Levi

Soit V est une variété complexe. Notons V^R la variété réelle sous jacente et TV^R le fibré tangent réel de V^R, muni de la structure complexe $J\in L(TV^R)$ $(J^2=-1)$, déduite de celle de V. On a $\mathbb{C}\otimes TV^R=T'(V)\oplus T''(V)$ avec $T'=\ker(J-i)$, $T''=\ker(J+i)$.

Si ρ est une fonction de classe C^2 sur V^R, la (1,1)-forme $\partial\bar\partial\rho$ définit une forme bilinéaire L_ρ sur $T'\times T''$ ($L_\rho(X,\bar Y)=\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar z_k} X_j\bar Y_k$ si on a choisi un système de coordonnées locales holomorphes z_i).

Si on suppose $d\rho\neq 0$ pour $\rho=0$, l'ensemble $\{\rho=0\}$ est une hypersurface W, coorientée par le signe de ρ, qui détermine ρ à un facteur >0 près. On dispose alors des objets suivants:

- Le fibré $T^c(W)=TW\cap JTW$, plus grand sous-fibré de TW stable par la structure complexe. On a $\mathbb{C}\otimes T^c(W)=T'(W)\oplus T''(W)$, où on a posé $T'(W)=T'(V)\cap\mathbb{C}\otimes TW$, $T''(W)=T''(V)\cap\mathbb{C}\otimes TW$; T^c est de rang 2n-2 sur $\mathbb{R}$, $T'(W)$ et $T''(W)$ de rang n-1 sur $\mathbb{C}$. La structure complexe J de $\mathbb{C}^n$ induit une structure complexe sur T^c.

- La forme différentielle réelle $\omega=j^*(\frac{1}{i}\partial\rho)=j^*(\frac{1}{2i}(\partial\rho-\bar\partial\rho))$ où j est l'injection canonique de W dans V. Cette 1-forme est bien définie, à un facteur $\varphi>0$ près comme ρ (on a $j^*(\frac{1}{i}\partial\varphi\rho)=\varphi\omega$). T^c est le fibré orthogonal à ω ($T^c=\ker\omega$).

- La forme de Levi, forme hermitienne $\mathcal{L}$ définie sur $T^c(W)$ par

$$\mathcal{L}(\xi,\eta)=L_\rho(X,\bar Y) \quad \text{si } \xi,\eta\in T^c \text{ sont des champs de vecteurs,}$$
$$\xi=\tfrac{1}{2}(X+\bar X),\ \eta=\tfrac{1}{2}(Y+\bar Y) \text{ avec } X,Y\in T',\ \bar X,\bar Y\in T''.$$

L'identité suivante résulte de la formule de Cartan pour d, compte tenu qu'on a $\partial\bar\partial\rho\,|\,W=-id\omega$, que T^c est l'orthogonal de ω et que T' et T'' sont intégrables ($[T',T']\subset T'$ et $[T'',T'']\subset T''$):

LEMME 1.- Pour toutes sections ξ,η de $T^c(W)$ on a l'égalité:

$$d\omega(\xi,\eta)=-\omega([\xi,\eta])=-\tfrac{1}{4}\omega([X,\bar Y]+[Y,\bar X])=\tfrac{1}{4}d\omega(X\wedge\bar Y+\bar X\wedge Y)=-\tfrac{1}{2}\operatorname{Im}\mathcal{L}(\xi,\eta)$$

Ce qui précède montre enfin que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) ω est une forme de contact ($d\omega\,|\,T^c=\ker\omega$ est symplectique)

(ii) la forme de Levi $\mathcal{L}$ est non dégénérée.

Si D est strictement pseudoconvexe $\mathcal{L}(\xi,\eta)$ définit une métrique hermitienne sur $T^c(\partial D)$. On dira que ξ et η sont $\mathcal{L}$-orthogonaux si $\mathcal{L}(\xi,\eta)=0$.

§3. Feuilletages isotropes.

Le résultat suivant est "généralement bien connu", bien que nous n'ayons pas de référence précise à proposer:

PROPOSITION 1.- *Soit* (X,ω) *une variété de contact de dimension* $2n+1$ *et* M *une sous-variété isotrope de dimension* k de X, $0\leq k\leq n$. *Alors pour tout* $p\in M$ *il existe un sytème de coordonnées locales défini au voisinage de* p *dans lequel on a* $\omega=dx_0+\sum_1^n x_i\, dx_{i+n}$, *et* M *est défini par les équations* $x_0=x_{k+1}=\ldots x_{2n}=0$. *En particulier* M *est intersection de sous variétés de Legendre de* X *au voisinage de* p.

Preuve: soit p un point de M. Le champ caractéristique X_ω de ω est transverse à M puisque la forme induite sur M par ω est nulle et $i(X_\omega)\omega=1$, on peut choisir un voisinage U de p tel que le quotient $Y=U/X_\omega$ soit une variété, et que la projection π: $U\to Y$ induise un isomorphisme de $M\cap U$ sur une sous-variété $\pi(M)$ de Y. Y est muni de la forme symplectique σ déduite de $d\omega$, pour laquelle $\pi(M)$ est isotrope, comme M. Le théorème 3 de prolongement des isométries symplectiques montre que le couple $(Y,\pi(M))$ est, au voisinage de $\pi(p)$, symplectiquement isomorphe au couple $(\mathbb{R}^{2n}, M_k)$ où $\mathbb{R}^{2n}$ est muni de la forme symplectique canonique $\Omega=\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{i+n}$ et M_k est la sous-variété isotrope standard de dimension k, d'équation $x_{k+1}=\ldots x_{2n}=0$. De façon équivalente, il existe un système de coordonnées $(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{2n})$ au voisinage de $\pi(p)$ dans Y dans lequel on a $\sigma=\sum_{i=1}^n d\tilde{x}_i\wedge d\tilde{x}_{i+n}$, et N est défini par les équations $\tilde{x}_{k+1}=\ldots\tilde{x}_{2n}=0$.

Notons x_i la fonction $\tilde{x}_i\circ\pi$ sur U; on a donc $d\omega=\sum_{i=1}^n dx_i\wedge dx_{i+n}$. Au voisinage de p la forme $\omega-\sum_1^n x_i\, dx_{i+n}$ est fermée donc il existe une fonction x_0 telle que $\omega=dx_0+\sum_1^n x_i\, dx_{i+n}$; comme ω est une forme de contact les dx_i sont indépendants et la famille $(x_0,x_1,\ldots x_{2n})$ est un système de coordonnées; enfin la 1-forme $\sum_1^n x_i\, dx_{i+n}$ induit 0 sur M, donc aussi la différence $dx_0=\omega-\sum_1^n x_i\, dx_{i+n}$ de sorte que x_0 est constante sur

M au voisinage de p. Quitte à le remplacer x_0 par x_0+constante, on peut supposer x_0 nul sur M, d'où la première assertion.

Pour terminer on remarque qu'avec les notations précédentes M est, au voisinage de p, l'intersection des variétés de Legendre d'équations $x_0=x_{k+1}=\ldots x_{k+n}=0$ resp. $x_0=x_{n+1}=\ldots x_{2n}=0$

PROPOSITION 2.- *Soient* (X,ω) *une variété de contact de dimension* $2n+1$ *et* M *une sous-variété de dimension* $k+1$ *de* X *transverse à* $\ker\omega$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

a) $j^*(\omega\wedge d\omega)=0$ (où j est l'injection $M\to X$).

b) M *admet un feuilletage isotrope de codimension* 1.

c) il existe localement des coordonnées dans lesquelles $\omega=\varphi\left(dx_0+\sum_{i=1}^{n}x_i\,dy_i\right)$, *avec* $\varphi\neq 0$ *et* $M=\{x_{k+1}=\ldots=x_n=y_1=\ldots=y_n=0\}$.

En particulier M *est localement intersection de sous-variétés feuilletées par des variétés de Legendre.*

Preuve: les implications c) ⇒ b) ⇒ a) sont évidentes; il suffit donc de prouver a) ⇒ c). On déduit du théorème de Frobenius qu'il existe un voisinage U de p dans M et une fonction non-nulle f sur U telle que $j^*(f\omega)$ soit fermée (j: $M\to X$ désigne l'injection canonique). Soit u une fonction définie au voisinage de p telle que $j^*(f\omega-du)=0$. Puisque $T_p(M)\not\subset\ker\omega(p)$ on a $j^*(f\omega)\neq 0$ au voisinage de p et il existe un champ de vecteurs ξ tangent à M tel que $i(\xi)\,j^*(f\omega)=1$.

LEMME 2.- *Si* f *est comme ci-dessus, il existe une fonction* g *définie au voisinage* V *de* p, *telle que* $g=1$ *sur* M *et* $i(\xi)\,d(gf\omega)=0$ *sur* M.

Preuve du lemme 2: puisque $j^*d(f\omega)=0$ et que ξ est un champ de vecteurs tangent à M on a $j^*(i(\xi)\,d(f\omega))=i(\xi)\,j^*d(f\omega)=0$. Donc $i(\xi)\,d(f\omega)$ est de la forme

$$\sum \alpha_r\,du_r + u_r\beta_r$$

où les α_r, β_r sont respectivement des 0-formes et des 1-formes définies dans un voisinage V de p dans X, et $u_r=0$ sur M. Si g est une fonction sur V on a

$$i(\xi)\, d(gf\omega) = i(\xi)\, (dg\wedge(f\omega) + gd(f\omega)) = (i(\xi)dg)f\omega - (i(\xi)(f\omega))dg + g\,(i(\xi)\, d(f\omega)).$$

Si g=1 sur M on a: $i(\xi)\, dg\,|_M=0$, puisque ξ est tangent à M, et

$$i(\xi)\, d(f\omega)\,|_M = \Sigma(\alpha_r\, du_r + u_r\, \beta_r)\,|_M = \Sigma\,\alpha_r\, du_r\,|_M, \quad \text{d'où}$$

$$i(\xi)\, d(gf\omega)\,|_M = (-\,dg + g\,\Sigma\,\alpha_r\, du_r)\,|_M = (-\,dg + \Sigma\,\alpha_r\;\, du_r)\,|_M$$

puisque $i(\xi)\, (f\omega)\,|_M=1$. On a donc $i(\xi)\, d(gf\omega)\,|_M=0$ si on choisit $g=1 + \Sigma\,\alpha_r\, u_r$.

Fin de la preuve de la proposition 2: soient g et V comme dans le lemme 2, et posons $\varphi=fg$ et $\omega'=\varphi\,\omega$. Soit $\eta=X_{\omega'}$ le champ de vecteurs caractéristique de ω' sur V. Comme η est l'unique champ de vecteurs tel que $i(\eta)\, d\omega'=0$ et $i(\eta)\omega'=1$ on déduit du lemme 2 qu'on a $\eta=\xi$ sur $M\cap V$, donc que η est tangent à M. Comme $i(\eta)\omega'=1$ et $\omega'-du\,|_M=f\omega-du\,|_M=0$, il existe un prolongement $\tilde{u}$ de u à V tel que $i(\eta)d\tilde{u}=1$.

On considère le feuilletage sur X défini au voisinage de p par les surfaces de niveau $\tilde{u}$=constante; puisque $i(\eta)\, d\tilde{u}=1$ il existe un intervalle réel I et un difféomorphisme ψ: $x\to(t,y)$ de V sur $I\times Y$, qui transforme η en $\frac{\partial}{\partial t}$; Y s'identifie à la variété des orbites, qui est symplectique, munie de la forme déduite de $d\omega'$ par passage au quotient (rappelons que $d\omega'$ est un invariant intégral absolu de η: $i(\eta)d\omega'=0$, ie. $d\omega'$ ne dépend pas de t ni de dt, et est image inverse d'une 2-forme symplectique sur Y).

Finalement M est (au voisinage de p) invariante par le champ de vecteurs η, ainsi que le feuilletage de M par les surfaces de niveau de $u=\tilde{u}\,|M$=constante, dont les feuilles sont isotropes. Ainsi dans l'isomorphisme ci-dessus M s'identifie à un produit $I\times M'$ où M' est une sous-variété isotrope de Y, et on obtient la proposition 2 en appliquant le théorème 3, comme dans la preuve de la proposition 1 plus haut.

§4. Formes de Levi diagonalisables et variétés $\mathbb{C}$-tangentes

On utilise les notations du §1 c. Sauf mention explicite du contraire, les frontières des domaines considérés par la suite, ainsi que leurs sous-variétés, sont de classe C^∞, mais la plupart des assertions sont encore vraies lorsqu'elle s sont de classe C^2.

PROPOSITION 3.- *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété* $\mathbb{C}$*-tangente de* ∂D. *Alors* $\mathscr{L}(\xi,\eta)$ *est réel sur* M *pour tous vecteurs* ξ,η *tangents à* M.

Preuve: on considère la forme ω définie au §1.c et on note j: $M \rightarrow \partial D$ l'injection canonique. On a $j^*(\omega)=0$, donc $j^*(d\omega)=0$ et la proposition résulte du lemme 1.

COROLLAIRE 1.- *Soit* D *un domaine strictement pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété* $\mathbb{C}$*-tangente de dimension* k *de* ∂D. *Pour tout* $p \in M$, *il existe un voisinage* U *de* p *et un repère complexe* C^∞*,* $\mathscr{L}$*-orthogonal* $\{X_1,...,X_{n-1}\}$ *de* $T^c(\partial D)|_U$ *tel que* $\{X_1,...,X_k|M\}$ *soit une base de* T(M) *sur* $\mathbb{R}$.

Preuve: on considère des champs de vecteurs sur un voisinage U de p qui engendrent T(M) et on applique le procédé Gram-Schmidt et la proposition 3. Dans cet énoncé et les suivants un repère complexe (resp.réel) C^∞ d'un fibré E sur une variété U est une famille $\{X_1,...,X_{n-1}\}$ de sections C^∞ de E sur U qui forme une base de E sur $\mathbb{C}$ (resp, $\mathbb{R}$) en chaque point.

Remarque 1.- Ainsi si dim M=n-1, et si la forme de Levi est définie positive, elle est diagonalisable dans T(M).

LEMME 3.- *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété de dimension* k *de* ∂D. *Soit* $p \in M$ *tel que* M *n'est pas* $\mathbb{C}$*-tangente en* p. *Alors il existe un voisinage* U *de* p *tel que* $\dim T_z(M) \cap T_z^c(\partial D) = k-1$ *pour tout* $z \in U$.

Preuve: puisque M n'est pas $\mathbb{C}$-tangente en p, il existe un voisinage U de p tel que $T_z(M) \not\subset T_z^c(\partial D)$ pour tout $z \in M \cap U$, donc $\dim T_z(M) \cap T_z^c(\partial D) < k$. Mais $T_z(M)$ et $T_z^c(\partial D)$ sont des sous-espaces de $T_z(\partial D)$, donc

$$\dim T_z(M) \cap T_z^c(\partial D) \geq \dim T_z(M) + \dim T_z^c(\partial D) - \dim T_z(\partial D) = k+(2n-2)-(2n-1) = k-1$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2.- *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$, M *une sous-variété de dimension* 2 *de* ∂D *et* p$\in$M, *tel que* M *ne soit pas* $\mathbb{C}$*-tangente en* p. *Alors* M *admet au voisinage de* p *un feuilletage* $\mathbb{C}$*-tangent de rang* 1.

Preuve: il résulte du lemme 3 que le fibré $T(M)\cap T^c(\partial D)$ est de rang 1 sur M au voisinage de p, donc $T(M)\cap T^c(\partial D)$ est intégrable et l'assertion résulte du théorème de Frobenius.

THÉORÈME 4.- *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété de dimension* $k\geq 3$ *de* ∂D. *Soit* p$\in$M *tel que* M *ne soit pas* $\mathbb{C}$*-tangente en* p. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

a) Il existe un voisinage U *de* p *dans* M *tel que* M *admet un feuilletage* $\mathbb{C}$*-tangent de dimension* k-1 *sur* U.

b) $\mathscr{L}(\xi,\eta)$ *est réel pour toutes les sections* ξ, η *sur un voisinage* U *de* p *du fibré* $T(M)\cap T^c(\partial D)$.

Preuve: il résulte du lemme 3 qu'il existe un voisinage V de p tel que $T(M)\cap T^c(\partial D)$ soit un fibré de rang k-1 sur $M\cap V$. D'après le théorème de Frobenius, M admet un feuilletage $\mathbb{C}$- tangent de dimension k-1 si et seulement si $T(M)\cap T^c(\partial D)= T(M)\cap\ker\omega$ est une distribution intégrable. Mais $T(M)\cap\ker\omega$ est intégrable si et seulement s'il existe une 1-forme φ sur M telle que $j^*(d\omega)=\varphi\wedge j^*(\omega)$, où j est l'injection canonique: $M\to\partial D$. L'implication a) $\Rightarrow$ b) résulte alors du lemme 1.

Réciproquement, supposons qu'on a $\mathrm{Im}\,\mathscr{L}(\xi,\eta)=j^*(d\omega)(\xi,\eta)=0$ pour toutes ξ, η du fibré $T(M)\cap\ker\omega$. Alors on a $j^*(d\omega)(\xi,\eta)=j^*(\omega)(\xi)-j^*(\omega)(\eta)-j^*(\omega)[\xi,\eta]$. Puisque $j^*(d\omega)(\xi,\eta)=j^*(\omega)(\xi)=j^*(\omega)(\eta)=0$ il en résulte qu'on a $j^*(\omega)[\xi,\eta]=0$, donc $[\xi,\eta]$ est une section de $T(M)\cap\ker\omega$ et $T(M)\cap\ker\omega$ est involutif, d'où le résultat.

De même que pour le corollaire1 on obtient:

COROLLAIRE 3.- *Soit* D *un domaine strictement pseudoconvexe et* M *une sous-variété de dimension* $k \geq 3$ *de* ∂D. *Soit* $p \in M$ *tel que* M *n'est pas* $\mathbb{C}$*-tangente en* p. *Alors* M *admet un feuilletage* $\mathbb{C}$*-tangent de codimension* 1 *au voisinage de* p *si et seulement s'il existe, au voisinage de* p, *un repère complexe* C^∞, $\mathscr{L}$*-orthogonal* $\{X_1,...,X_{n-1}\}$ *de* $T^c(\partial D)$ *tel que* $X_1,...,X_k$ *engendrent* $T(M) \cap T^c(\partial D)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.- Dans [I2] il est prouvé qu'une sous-variété totalement réelle M de dimension n de la frontière d'un domaine D de $\mathbb{C}^n$ admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1 si et seulement si la forme de Levi est "diagonalisable dans $T(M) \cap T^c(\partial D)$". Le théorème 4 est une généralisation et une forme invariante de ce résultat. Du corollaire 3 on voit que, dans le cas strictement pseudoconvexe, on peut obtenir la diagonalisation par des champs de vecteurs sur M à valeurs dans $T(M) \cap T^c(\partial D)$.

§5. Sous-variétés localement de module maximum pour $\mathcal{O}(\bar{D})$

En utilisant la variété de contact $(\partial D, \omega)$ définie dans §1 c et les proposition 1 et 2 on montre les propositions suivantes:

PROPOSITION 4.- *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *dont la forme de Levi est non-dégénérée et* M *une sous-variété* $\mathbb{C}$*-tangente de* ∂D. *Alors* $\dim M \leq n-1$ *et* M *est localement intersection transverse de sous-variétés* $\mathbb{C}$*-tangentes de dimension* n-1.

Remarque 3.- Dans [CC1] il est prouvé qu'une sous-variété $\mathbb{C}$-tangente de la frontière d'un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ est localement contenue dans des sous-variétés $\mathbb{C}$-tangentes de dimension n-1.

PROPOSITION 5.- *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *dont la forme de Levi est non dégénérée,* M *une sous-variété de* ∂D *et* $p \in M$ *tel que* M *n'est pas* $\mathbb{C}$*-tangente en* p *et*

M *admet au voisinage de* p *un feuilletage* $\mathbb{C}$*-tangent de codimension* 1 *dans* M. *Alors* $\dim M \leq n$ *et* M *est localement au voisinage de* p *intersection transverse de sous-variétés de dimension* n *de* ∂D *qui admettent un feuilletage* $\mathbb{C}$*-tangent de dimension* $n-1$.

Remarque 4.- Si D est strictement pseudoconvexe alors une sous-variété qui n'est pas $\mathbb{C}$-tangente et admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent est totalement réelle.

Remarque 5.- Si les données sont analytiques réelles, les variétés qui figurent dans la proposition 4 peuvent être choisies analytiques réelles. De même si, en plus, les feuilletage de la proposition 5 est analytique réel les feuilletages obtenus sont analytiques réels.

COROLLAIRE 4.- *Soient* D *un domaine strictement pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$ *à frontière analytique réelle et* M *une sous-variété analytique réelle de* ∂D *telle que* M *ne soit* $\mathbb{C}$*-tangente en aucun de ses points. Alors* M *est localement un ensemble de module maximum pour* $\mathcal{O}(\bar{D})$ *si et seulement si* $\mathcal{L}(\xi,\eta)$ *est réel pour toutes sections* ξ,η *de* $T(M)\cap T^c(\partial D)$. *C'est toujours le cas si* $\dim M \leq 2$.

Preuve: si $\dim M=2$, il résulte du corollaire 3 et de la remarque 5 que M admet un feuilletage analytique réel $\mathbb{C}$-tangent de rang 1 et le théorème 2 est vrai dans ce cas.

Si $\dim M=1$, M est localement intersection de deux variétés de dimension 2. Ces deux variétés sont localement des ensembles de module maximum pour $\mathcal{O}(\bar{D})$, d'où le résultat dans ce cas.

Dans le cas général on démontre le résultat de la même manière en utilisant le théorème 2, le théorème 4 et la remarque 5.

Remarque 6.- Nagel et Rosay [NR] ont montré que si $D\subset\mathbb{C}^n$ est un domaine strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle, et M une sous-variété totalement réelle de dimension n du bord qui soit localement ensemble de module maximum pour $A^2(D)$, alors M est analytique réelle. Dans ce cas les résultats du corollaire 4 ont été obtenus dans [I 2].

COROLLAIRE 5.- *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle et* M *une sous-variété analytique réelle totalement réelle de dimension* n *de* ∂D. *Alors* M *est localement un ensemble de module maximum pour* $\mathcal{O}(\overline{D})$ *si et seulement si, pour tout* $p \in M$, *il existe un repère complexe* C^∞, $\mathcal{L}$*-orthogonal de* $T^c(\partial D)$ *sur un voisinage de* p *qui engendre* $T(M) \cap T^c(\partial D)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Preuve: on applique les corollaires 3 et 4.

COROLLAIRE 6.- *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle et* M *une sous-variété analytique réelle de* ∂D. *Alors* M *est localement un ensemble pic pour* $\mathcal{O}(\overline{D})$ *si et seulement si* M *est* $\mathbb{C}$*-tangente.*

Preuve: la nécessité résulte du théorème 1. Si dim M=n-1 on voit en utilisant la proposition 1 que M est localement feuille d'une sous-variété M' analytique totalement réelle de ∂D qui admet un feuilletage analytique réel $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1. Il résulte alors du théorème 1 que M' est localement un ensemble de module maximum pour $\mathcal{O}(\overline{D})$, donc que M est un ensemble pic pour $\mathcal{O}(\overline{D})$ ([DS]).

Si dim M< n-1 on obtient le résultat en utilisant la proposition 4.

Remarque 7.- Si D est faiblement pseudoconvexe le résultat n'est pas vrai: on trouvera dans [I 1] un exemple de domaine D à frontière analytique réelle de $\mathbb{C}^2$ tel que ∂D contienne une courbe analytique réelle $\mathbb{C}$-tangente γ, localement pic pour $A^\infty(D)$ mais pas localement pic pour $\mathcal{O}(\overline{D})$.

RÉFÉRENCES

[BS] D. Burns et E.L. Stout, Extending functions from submanifolds of the boundary. Duke Math. J., 43 (1976), 391-404.

[CC1] J. Chaumat et A.M. Chollet, Ensembles pics pour $A^\infty(D)$, Ann. Inst. Fourier (3), 29, (1979), 171-200.

[CC2] J. Chaumat et A.M. Chollet, Caractérisation et propriétés des ensembles localement pics de $A^\infty(D)$, Duke Math. J., 47 (1980), 763-787.

[DS] Th. Duchamp et E.L. Stout, Maximum modulus sets, Ann. Inst. Fourier (3), 31 (1981), 37-69.

[FH] J.E. Fornaess et B.S. Henriksen, Characterization of global peak sets for $A^\infty(D)$, Math. Ann. 259 (1982), 125-130.

[HS] M. Hakim et N. Sibony, Ensembles pics dans des domaines strictement pseudoconvexes, Duke Math. J., 45 (1978), 601-617.

[HT] G.M.Henkin et A.E.Tumanov. Interpolation submanifolds of pseudoconvex manifolds. Proc. 7th winter school, Drogobych, 1974; Amer Math. Soc. Transl 115 (2) (1980) 59-69.

[I1] A. Iordan, Peak sets in pseudoconvex domains with the (NP) property, Math. Ann. 272 (1985), 231-235.

[I2] A. Iordan, A characterization of totally real generic submanifolds of strictly pseudoconvex boundaries admitting a local foliation by interpolation submanifolds, Math. Ann. 288 (1990), 505-510.

[I3] A. Iordan, Maximum modulus sets in pseudoconvex boundaries, to appear in Journal of Geometric Analysis.

[NR] A.Nagel et J.P.Rosay, Maximum modulus sets and reflection sets. Ann. Inst. Fourier 41, 2 (1991)431-466.

[W] A. Weinstein, Lectures on symplectic manifolds. CBMS Regional Conf. Series, n°29, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1977.

L.Boutet de Monvel
Dept. de Mathématiques, URA 213
Tour 45-46, Université de Paris 6
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

A.Iordan
Dept. de Mathématiques, URA 213
Tour 45-46, Université de Paris 6
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05