CLAIRE VOISIN

Miroirs et involutions sur les surfaces K3

Astérisque, tome 218 (1993), p. 273-323
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__218__273_0>

Miroirs et involutions sur les surfaces $K3$

Claire Voisin*

§0 - Introduction

0.1. On propose dans ce travail une construction explicite de la "mirror symmetry" prédite par les physiciens et portée récemment à l'attention des mathématiciens par le travail de D. Morrison ([21]), pour un certain nombre de familles de variétés de Calabi-Yau, construites à l'aide de surfaces $K3$ munies d'une involution. Les numéros 0.2 à 0.5 sont une tentative de description des idées des physiciens sur le sujet (voir aussi [21]).

0.2. La prédiction du phénomène de miroirs entre variétés de Calabi-Yau provient de la théorie des supercordes et des σ-modèles et de la recherche d'un modèle consistant mathématiquement et physiquement, rendant compte de différents types d'interactions, refletées dans l'allure générale de l'action S, et quantifiable. L'action classique en théorie des cordes (se propageant dans une variété Riemannienne (M, g)) associe à une surface de Riemann avec bords (Σ, γ) et à une application $\varphi : \Sigma \to M$ son énergie $S(\varphi) = \int_\Sigma \|d\varphi\|^2 \, dA_\Sigma$; les solutions classiques sont des extrémales de S, par rapport à φ et γ. L'introduction de fermions (variables anticommutatives à considérer comme des sections tordues de φ^*TM), permet d'ajouter à cette action des termes fermioniques, où interviennent la connexion de Levi-Civita de M, et la courbure de M.

* Avec le support partiel du projet Science "Geometry of Algebraic varieties", Contrat SCI-0398-C(A)

L'action peut enfin être modifiée par l'ajout d'une terme du type $S_\omega(\varphi) = \int_\Sigma \varphi^*\omega$, où ω est une 2-forme fermée sur M. La somme de ces trois actions est invariante sous certaines transformations. L'action classique est invariante par difféomorphisme de Σ et changements conformes de métrique γ. L'introduction des variables fermioniques permet de définir au moins localement la supersymetrie, et l'existence de deux supersymetries dont le supercommutateur engendre les transformations conformes, recherchée pour des raisons physiques, conduit à prédire l'existence d'une structure complexe sur M.

Les physiciens cherchent à quantifier la théorie, c'est-à-dire à calculer des valeurs probables de certaines fonctionnelles (les "observables") sur l'espace des applications $\varphi : \Sigma \to M$ (et d'autres données comme les variables fermioniques), ayant des valeurs fixées sur le bord de Σ. L'instrument principal est fourni par les intégrales de Feynman.

Pour préserver les symétries de l'action lors de ce processus de quantification, les physiciens sont menés à imposer certaines conditions à la variété M, dont $\dim_{\mathbb{R}} M = 10$, et en supposant, dans une théorie à la Kaluza-Klein, que $M = \mathbb{R}^4 \times K$ avec K compacte de dimension 6, la préservation de la sypersymétrie mène à imposer que (K, g_K) soit une variété Kählerienne à courbure de Ricci nulle, c'est-à-dire une variété de Calabi-Yau. (Ce résultat qui résulte d'un calcul perturbatif au deuxième ordre, est d'ailleurs contredit par le calcul des termes d'ordre supérieur).

En admettant la possibilité de quantifier rigoureusement la propagation des supercordes dans une variété de Calabi-Yau de dimension trois, on est amené à associer à la donnée d'une telle variété X, d'une forme de Kähler η (correspondant à une métrique de Kähler Einstein) et d'une classe réelle λ dans $H^2(X)$ (correspondant au terme $\displaystyle\int_\Sigma \varphi^*\lambda$ de l'action), une théorie $N = 2$ surperconforme des champs. $\alpha = \eta + i\lambda$ est alors un élément de $H^1(\Omega_X)$ tel que $\operatorname{Re}\alpha$ soit une classe de Kähler.

0.3. Gepner [14] a conjecturé que cette correspondance est bijective à condition de ne considérer que les théories conformes à charges $U(1)$ entières et à charge centrale $c = 9$. D'autre part, il existe une involution naturelle sur l'espace des théories $N = 2$ surperconformes, qui consiste à considérer la même théorie conforme des champs sous-jacente, mais à changer le signe de certaines "charges" q, determinées comme les valeurs propres d'un opérateur de l'algèbre superconforme, représentée sur l'espace de Hilbert de la théorie.

Si X est une variété de Calabi-Yau, et $\alpha \in H^1(\Omega_X)$, l'espace tangent à la variété paramétrant les déformations de (X, α) se scinde naturellement en $H^1(T_X) \oplus H^1(\Omega_X)$. Witten [24] a expliqué comment construire un isomorphisme entre $H^1(T_X) \oplus H^1(\Omega_X)$ et les champs primaires "chiraux" (correspondant à $H^1(T_X)$) ou "antichiraux" (correspondant à $H^1(\Omega_X)$) de charge conforme $h = 2$ de la théorie conforme associée, qui décrivent l'espace tangent aux déformations (générateurs) de la théorie conforme. L'effet de l'involution mentionnée ci-dessus est le suivant: les champs primaires "chiraux" satisfont la condition $h = 2q$, tandis que les "antichiraux" satisfont $h = -2q$. A supposer que la théorie superconforme obtenue par involution provienne d'une donnée (X', α'), on doit donc avoir des isomorphismes $H^1(T_X) \simeq H^1(\Omega_{X'}), H^1(\Omega_X) \simeq H^1(T_{X'})$; (X', α') est appelé le miroir de (X, α). Notons que les isomorphismes ci-desus doivent être obtenus comme la différentielle de l'application miroir, dont l'existence résulte de la conjecture de Gepner.

0.4. Finalement, un des aspects les plus fascinants de cette application miroir réside dans la formule précise, annoncée par les physiciens, comparant l'accouplement de Yukawa sur $H^1(T_X)$ et la forme d'intersection sur $H^1(\Omega_{X'})$ où (X', α') est le miroir de (X, α). L'accouplement de Yakawa sur $H^1(T_X)$ est la forme cubique ψ donnée par l'application naturelle $S^3H^1(T_X) \to H^3(\Lambda^3 T_X)$. Ce dernier espace est rendu isomorphe à $\mathbb{C}$ par le choix d'une section de $K_X^{\otimes 2}$. La formule est alors la suivante: soit $u \in H^1(T_X)$ et $v \in H^1(\Omega_{X'})$ l'élément correspondant à u par l'isomorphisme : $H^1(T_X) \simeq$

$H^1(\Omega_{X'})$. Alors:

$$\psi(u) = \int_{X'} v^3 + \sum_{f:\mathbb{P}^1 \to X} e^{-\int_{\mathbb{P}^1} \alpha'} n(f) \left(\int_{\mathbb{P}^1} v\right)^3 \tag{0.4.1}$$

où la somme est effectuée sur toutes les composantes de l'ensemble des applications holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \to X$, et où $n(f)$ est un entier. Aspinwall et Morrison [4], ont montré, en utilisant la définition précise de $n(f)$ (cf [24]) que $n(f) = 1$ pour une immersion $\mathbb{P}^1 \subset X'$ avec fibré normal $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, ainsi que pour les familles données par les revêtements ramifiés d'une telle courbe.

0.5. Les exemples connus de phénomène de miroir sont essentiellement fournis par les intersections complètes "du type Fermat" dans les espaces projectifs anisotropes, et leurs quotients par des sous-groupes du groupe d'isomorphimes agissant sur celles ci en préservant "la" forme holomorphe.

Cela tient à la construction de Gepner, qui constitue une des évidences pour la conjecture de Gepner, et qui produit une série de théories superconformes satisfaisant les conditions de 0.3, essentiellement obtenues par produits tensoriels de modèles E_k (connus) formant une série discrète indicée par les entiers. Le k^{ieme} modèle de la série discrète a une charge centrale $c_k = 3k/k + 2$. Pour obtenir, en composant les modèles $E_{k_1}, \cdots, E_{k_5}$, une théorie conforme $E_{(k)}$ de charge centrale $c = 9$, on doit imposer la condition $3\sum_1^5 k_i/(k_i+2) = 9$, ce qui est équivalent au fait que l'hypersurface de Fermat $M_{(k)}$ définie par $\sum_{i=1}^5 X_i^{k_i+2} = 0$ dans l'espace projectif inhomogène $\mathbb{P}(d/(k_1+2)), \cdots, (d/(k_5+2))$, où $d = PPCM(k_i+2)$, est à fibré canonique trivial.

Gepner [(1)] suppose alors que $E_{(k)}$ est la théorie conforme des champs

(1) En fait, Gepner n'a noté cette correspondance que pour les hypersurfaces de Fermat dans l'espace projectif usuel. L'extension au cas anisotrope est due Greene-Vafa-Warner [16].

associée à la propagation des cordes dans $M_{(k)}$ et donne les justifications suivantes: $H^1\left(TM_{(k)}\right)$ et $H^1\left(\Omega_{M_{(k)}}\right)$ ont la dimension de l'espace des champs primaires "chiraux" et "antichiraux" respectivement de charge conforme $h = 2$ de $E_{(k)}$ (cf. 0.3). De plus $M_{(k)}$ et $E_{(k)}$ ont le même groupe d'automorphismes, représenté de façon isomorphe sur les générateurs de $E_{(k)}$ et sur $H^1\left(TM_{(k)}\right)$ et $H^1\left(\Omega_{M_{(k)}}\right)$.

Enfin les sous-groupes agissant trivialement sur la (3,0)-forme de $M_{(k)}$ d'une part, de façon compatible avec la supersymétrie d'autre part sont identiques.

Dans [15], Greene et Plesser ont montré comment l'involution de 0.3 peut-être realisée concrètement sur les modèles $E_{(k)}$ construits par Gepner, et ceux qui en sont déduits en prenant l'espace des invariants par un sous-groupe H des isomorphismes de $E_{(k)}$ compatibles avec la supersymétrie. La théorie conforme miroir est obtenue en prenant l'espace des invariants de $E_{(k)}$ par un sous-groupe H', dual natural de H. Cela suggère que le miroir géométrique (0.3) de $M_{(k)}/H$ (probablement munie de la forme α la plus naturelle du point de vue géométrique) est $M_{(k)}/H'$. Roan [23] a montré rigoureusement que $M_{(k)}/H$ et $M_{(k)}/H'$ admettent des désingularisations qui sont des variétés de Calabi-Yau et a exhibé un isomorphisme naturel:

$$H^1\left(T_{M_{(k)}/H}\right) \simeq H^1\left(\Omega_{M_{(k)}/H'}\right).$$

0.6. Les variétés que l'on considère dans ce travail sont obtenues par désingularisation de quotients $X = E \times S/(j,i)$ où j est l'involution standard d'une courbe elliptique, de quotient $E/j \simeq \mathbb{P}^1$, et i est une involution sur une surface $K3$ S, de quotient $T = S/i$ rationnelle.

En utilisant les résultats de Nikulin on montre comment (avec quelques exceptions) on peut associer à i, caractérisée par son action $H(i)$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})$, une involution miroir $H(i')$. On construit dans la section 2 une correspondance bijective entre les structures complexes i invariantes marquées de S et les formes α invariantes sous $H(i')$, satisfaisant la condition $(\operatorname{Re}\alpha)^2 > 0$.

Dans la première section on calcule les nombres de Hodge de X et ses accouplements de Yukawa. On voit facilement alors que $X = \widetilde{E \times S}/(j,i)$ et $X' = \widetilde{E \times S'}/(j,i')$, où (S',i') est une surface $K3$ munie d'une involution i' agissant comme $H(i')$ sur $H^2(S',\mathbb{Z})$, satisfont:

$$b_2(X) = h^{2,1}(X') \quad , \quad b_2(X') = h^{2,1}(X).$$

De plus, la construction de la section 2, ainsi que la contruction des miroirs pour les courbes elliptiques, [10], fournissent l'application miroir $(X,\alpha) \to (X',\alpha')$, mais seulement sur un sous-espace de la famille paramètrant les données (X,α).

Dans la troisième section, on calcule le comportement asymptotique des accouplements de Yakawa de X, lorsque S dégénère, et l'on montre que le résultat obtenu confirme la formule 0.4.1, lorsque l'on fait tendre la partie réelle de α' vers l'infini.

§1 - Construction de variétés de Calabi-Yau

1.1. Soit S une surface $K3$ munie d'une involution i holomorphe, agissant par -1 sur la deux forme holomorphe $w \in H^{2,0}(S)$. Le lieu fixe de i est alors contitué d'une union disjointe de courbes lisses $C_1,\cdots,C_N$ de genres respectifs $g_1,\cdots,g_N$.

Par le théorème de l'indice de Hodge, et par la relation $C_i^2 = 2g_i - 2, C_iC_j = 0$, on voit qu'il existe au plus un entier i tel que $g_i > 1$, et que si un tel entier existe, C_j est rationnelle pour $j \neq i$. Si d'autre part toutes les courbes C_i sont de genre 0 ou 1, on a les quatre possibilités suivantes:

1.1.1.

o) $N = 0$

i) Toutes les C_i sont rationnelles.

ii) L'une des courbes C_i est elliptique et les autres sont rationnelles.

iii) $N = 2$ et C_1, C_2 sont elliptiques.

En effet, notons T la surface quotient $S/i, U = T \backslash \cup C_i$, et $V = S \backslash \cup C_i$. Notons $\varphi : V \to U, \varphi : S \to T$ les applications quotients. Par le théorème de Castelnuovo, T est rationnelle, donc simplement connexe, dès que $N > 0$. Supposons $N \neq 0$; on a la suite exacte de faisceaux de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ modules sur U:

$$0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U \to \varphi_* ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_V) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U \to 0, \tag{1.1.1}$$

qui montre que $\operatorname{Ker} \varphi^* : H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(V, \mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par ailleurs on a le diagramme commutatif suivant de suites exactes de cohomologie relative :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \oplus H^0(C_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha_T} & H^2(T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
 & & {\scriptstyle \varphi^*}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 0} & & \downarrow {\scriptstyle \varphi^*} \\
0 & \longrightarrow & H^1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \oplus H^0(C_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\alpha_S]{} & H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})
\end{array}$$

où les applications α_S et α_T s'identifient par la dualité de Poincaré aux applications $\oplus H_2(C_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\oplus H_2(C_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_2(T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induites par les inclusions de C_i dans S et T.

Ceci montre que le noyau α_T est de rang 1 et necessairement engendré par $\oplus [C_i]$.

Si au moins deux des courbes C_i sont elliptiques, soit C_1 et C_2, elles sont homologues dans S, par le théorème de l'indice, donc aussi dans T, puisque $H^2(T, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion, et $[C_1] + [C_2]$ est dans $\operatorname{Ker} \alpha_T$. On a donc $[C_1] + [C_2] = \sum_i [C_i]$ ce qui entraîne iii).

1.2. Fixons une courbe elliptique E, munie d'une involution j telle que le quotient E/j soit isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Le lieu fixe de j est alors constitué de quatre points $p_1, \cdots, p_4$. Soit $k = (j, i)$ l'involution agissant sur le produit $E \times S$. k a pour lieu fixe les courbes disjointes $p_t \times C_s, r = 1, \cdots, 4, s = 1, \cdots, N$.

Les variétés que l'on considérera sont obtenues par éclatement des quotients $E \times S/k$ le long de $\bigcup\limits_{(r,s)} p_r \times C_s$. Ce que l'on notera: $X = (\widetilde{E \times S/k})$. On a:

1.3. Lemme: X est lisse, à fibré canonique trivial et est simplement connexe dès que $N > 0$.

Démonstration: La lissité est facile à montrer; X peut-être définie de manière équivalente comme le quotient $\widetilde{E \times S}/\widetilde{k}$ de l'éclatement de $E \times S$ le long des courbes $p_r \times C_s$, par l'involution $\widetilde{k}$ agissant naturellement sur $\widetilde{E \times S}$. Comme $\widetilde{k}$ a au moins un point fixe 0 dès que $N > 0$, et agit par -1 sur $\pi_1(\widetilde{E \times S}, 0)$, on a $\pi_1(X) = 0$. Donc $H^2(X, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion et il suffit de montrer que le pull-back $\varphi^*(c_1(K_X))$ est nul dans $H^2(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Z})$ où $\varphi : \widetilde{E \times S} \to X$ est l'application quotient. Soit D le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\tau : \widetilde{E \times S} \to E \times S$, on a $\varphi^* K_X = K_{\widetilde{E \times S}} - D$, et $K_{\widetilde{E \times S}} = \tau^* K_{E \times S} + D$. Comme $K_{E \times S}$ est trivial, on en déduit que $\varphi^* K_X$ est aussi trivial.

1.4. Par le Lemme 1.3 on voit donc qu'on a, pour chaque type d'involution i comme en 1.1 (avec $N > 0$) un type de déformations de variétés de Calabi-Yau de dimension trois simplement connexe. La suite de cette section est consacrée à la description de la structure de Hodge, de l'accouplement de Yukawa, et de la forme d'intersection de ces variétés.

1.5. On commence d'abord par calculer les nombres de Hodge de X. En utilisant la représentation $X = \widetilde{E \times S}/\widetilde{k}$, on voit que $H^2(X, \mathbb{Q}) = H^2(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Q})^+$ est l'espace des invariants sous $\widetilde{k}$ de $H^2(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Q})$. De même $H^3(X, \mathbb{Q}) = H^3(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}}$, cette égalité étant un isomorphisme de structures de Hodge. Il vient alors:

1.6 Lemme: $H^2(X, \mathbb{Q})$ est engendré librement par les classes des diviseurs exceptionnels $D_{r,s} = \tau^{-1}(p_r \times C_s), H^2(E, \mathbb{Q})$ et $H^2(T, \mathbb{Q})$. De plus on a: rang $H^2(T, \mathbb{Q}) = 10 + N - N'$, où $N' = \Sigma g_i$.

Démonstration: k agit sur $H^2(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Q}) = \bigoplus\limits_{(r,s)} [D_{r,s}] \cdot \mathbb{Q} \oplus H^2(S, \mathbb{Q}) \oplus$

$H^2(E,\mathbb{Q})$ en laissant fixe les $[D_{r,s}]$, et comme (j,i) sur la somme $H^2(E)\oplus H^2(S)$. j agit trivialement sur $H^2(T)$, et l'espace des invariants sous i de $H^2(S,\mathbb{Q})$ est isomorphe à $H^2(T,\mathbb{Q})$. $b_2(T)=\operatorname{rang} H^2(T,\mathbb{Q})$ se calcule par la formule de Noether: On a $\chi(\mathcal{O}_T)=1=\dfrac{c_1^2(T)+c_2(T)}{12}$ avec $c_2=b_2+2$.

Enfin, le diviseur $\sum C_i$ de T est un membre du système linéaire $|-2K_T|$, puisque $0=K_S=\varphi^*K_T+\frac{1}{2}\varphi^*\left(\sum C_i\right)$ et que $H^2(T,\mathbb{Z})$ est sans torsion; on a donc: $4K_T^2=\left(\sum C_i\right)_T^2=\frac{1}{2}\left(\sum\varphi^*C_i\right)_S^2=2\left(\sum C_i\right)_S^2$, où dans le dernier terme C_i est considéré comme une courbe de S. Finalement comme les C_i sont disjointes et que K_S est trivial, on trouve: $\left(\sum C_i\right)_S^2=2\left(\sum g_i\right)-2N$, d'où $K_T^2=N'-N$ et $b_2(T)=10-K_T^2=10+N-N'$.

Pour le calcul du nombre de Hodge $h^{2,1}(X)=\dim H^1\left(\Omega_X^2\right)$ on a:

1.7 Lemme: $H^{2,1}(X)$ est engendré librement par les $j_{r,s*}\left(\tau_{r,s}^*\left(H^0\left(\Omega_{C_s}\right)\right)\right)$ où $\tau_{r,s}:D_{r,s}\to p_r\times C_s$ est la restriction de τ et $j_{r,s}:D_{r,s}\hookrightarrow\widetilde{E\times S}$ est l'inclusion, et par $H^0\left(\Omega_E\right)\otimes H^1\left(\Omega_S\right)^-\oplus H^1\left(\mathcal{O}_E\right)\otimes H^0\left(\Omega_S^2\right)$.

Démonstration: On a $H^{2,1}(X)=H^{2,1}(\widetilde{E\times S})^+$ et

$$H^{2,1}(\widetilde{E\times S})=\bigoplus_{(r,s_*)} j_{r,s}\left(\tau_{r,s}^*\left(H^0\left(\Omega_{C_s}\right)\right)\right)\oplus H^0\left(\Omega_E\right)$$
$$\otimes H^1\left(\Omega_S\right)\oplus H^1\left(\mathcal{O}_E\right)\otimes H^0\left(\Omega_S^2\right).$$

k agit trivialement sur le premier terme et agit comme (j,i) sur les deux derniers. Comme j agit par -1 sur $H^1(E)$ (j,i) agit par $-1\otimes H(i)$ sur $H^1(E)\otimes H^2(S)$, ce qui donne immédiatement le résultat.

1.8 Corollaire: On a $b_2(X)=11+5N-N'$ et $h^{2,1}(X)=11+5N'-N$.

Démonstration:

$$b_2(X)=b_2(E)+b_2(T)+\sharp\{(r,s)\}=1+10+N-N'+4N=11+5N-N'$$

$$h^{2,1}(X)=\sum_{r,s}h^0\left(\Omega_{C_s}\right)+1+h^1\left(\Omega_S\right)^-=4N'+1+10-N+N'=11+5N'-N,$$

où l'égalité $h^1(\Omega_S)^- = 10 - N + N'$ vient de $h^1(\Omega_S) = 20 = h^1(\Omega_S)^- + b_2(T)$, et du Lemme 1.6.

1.9. La "mirror symmetry" $X_1 \leftrightarrow X_2$ est supposée échanger les nombres b_2 et $h^{2,1}$, i.e. $b_2(X_1) = h^{2,1}(X_2), b_2(X_2) = h^{2,1}(X_1)$ et d'après le corollaire 1.8, on voit qu'à supposer que le miroir X_2 de $X_1 = \widetilde{E \times S_1}\left(\widetilde{j, i_1}\right)$ soit encore de la forme $X_2 = \widetilde{E \times S_2}/\left(\widetilde{j, i_2}\right)$, cela revient à échanger les nombres N et N', i.e.: $N_1 = N_2', N_2 = N_1'$. Ceci bien sûr n'est possible que si $N_1' > 0$ (on exclut désormais le cas $N = 0$). On montrera dans la section suivante en utilisant les travaux de Nikulin, comment étant donné une involution i_1 sur une surface K_3 S_1 agissant par -1 sur $H^0(\Omega^2_{S_1})$ on peut construire un second type i_2 d'involution sur une surface K_3, satisfaisant la même condition, à condition que $N_1' > 0$ et à l'exception d'un cas (cf. 2.17), et telle que $N_2' = N_1, N_1' = N_2$.

1.10. On va décrire maintenant la forme d'intersection sur $H^2(X, \mathbb{Q})$, dans la base décrite en 1.6. Notons $(d + \alpha + \beta) \in H^2(X, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{r,s} \langle D_{r,s} \rangle \mathbb{Q} \oplus H^2(T, \mathbb{Q}) \oplus H^2(E, \mathbb{Q})$. On a alors:

1.11 Lemme: $(d + \alpha + \beta)^3_X = (d^3)_X + 3(d^2\alpha)_X + 3(\alpha^2\beta)_X$. De plus pour $d = \sum d_{r,s} D_{r,s}$ on a $(d^3)_X = \sum d^3_{r,s} D^3_{r,s}$, avec $D^3_{r,s} = 8 - 8g_s$, et $(d^2\alpha)_X = -2\sum d^2_{r,s}(C_s \cdot \alpha)_T$. Enfin $(\alpha^2\beta)_X = (\alpha^2)_T \cdot \int_E \beta$.

Démonstration: Soit $\varphi : \widetilde{E \times S} \to X$ l'application quotient, $\tau : \widetilde{E \times S} \to E \times S$ l'éclatement et p_1, p_2 les projections de $E \times S$ sur E et S respectivement. On utilise aussi la notation $\varphi : S \to T$ pour l'application quotient.

On a alors

$$(d + \alpha + \beta)^3_X = \frac{1}{2}\left(\varphi^*(d + \alpha + b)\right)^3_{\widetilde{E \times S}} = \frac{1}{2}\left(\varphi^* d + p_1^*\beta + p_2^*\varphi^*\alpha\right)^3.$$

Comme $\varphi^* d$ est supporté sur les diviseurs exceptionnels de τ et que les courbes éclatées sont contenues dans des fibres de p_1, on voit facilement qu'on a les relations suivantes dans l'anneau de cohomologie de $\widetilde{E \times S}$: $(p_1^*\beta)^2 = 0$, $\forall \beta \in H^2(E), p_1^*\beta \cdot d = 0$, $\forall \beta \in H^2(E), \forall d$ supporté sur les diviseurs exceptionnels de $\tau, d \cdot (p_2^*\gamma)^2 = 0$, $\forall \gamma \in H^2(S), \forall d$ supporté sur les diviseurs exceptionnels. Cela montre immédiatement la première assertion du Lemme. Comme les diviseurs exceptionnels sont disjoints on a d'autre part $D_{r,s} \cdot D_{r',s'} = 0$ pour $(r,s) \neq (r',s')$ et donc $\left(d^3\right)_X = \sum d^3_{r,s} \left(D_{r,s}\right)^3_X$, $\left(d^2\alpha\right)_X = \sum d^2_{r,s} \left(D^2_{r,s} \cdot \alpha\right)_X$. Finalement $\left(D_{r,s}\right)^3_X = \frac{1}{2}\left(\varphi^* D_{r,s}\right)^3_{\widetilde{E \times S}} = 4\left(D_{r,s}\right)^3_{\widetilde{E \times S}}$ où dans le dernier terme $D_{r,s}$ est considéré comme le diviseur de $\widetilde{E \times S}$ au dessus de $p_r \times C_s$. Le fibré normal de $p_r \times C_s$ dans $E \times S$ étant égal à $\mathcal{O}_{C_s} \oplus K_{C_s}$ on a $D_{r,s} \simeq \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{C_s} \oplus K^{-1}_{C_s}\right), D_{r,s_{|D_{r,s}}} = \mathcal{O}_{D_{r,s}}(-1)$, soit $\left(D_{r,s}\right)^3_{\widetilde{E \times S}} = \left(\mathcal{O}_{D_{r,s}}(1)\right)^2_{D_{r,s}} = 2 - 2g_s$, et $\left(D_{r,s}\right)^3_X = 8 - 8g_s$.

Enfin $\left(D^2_{r,s} \cdot \alpha\right)_X = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi^* D_{r,s}\right)^2 \cdot p_2^* \circ \varphi^* \alpha\right)_{\widetilde{E \times S}} = 2\left(D^2_{r,s} \cdot p_2^* \circ \varphi^* \alpha\right)_{\widetilde{E \times S}} = 2\left(p_{2*}\left(D_{r,s}\right)^2 \cdot \alpha\right)_S = -2\left(C_s \cdot \varphi^* \alpha\right)_S = -2\left(C_s \cdot \varphi^* \alpha\right)_T$ où l'on a utilisé l'égalité
$p_{2*}\left(D_{r,s}\right)^2_{\widetilde{E \times S}} = -C_s$ dans $H^2(S)$. On a aussi $\left(\alpha^2\beta\right)_X = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi^*\alpha\right)^2 \cdot \varphi^*\beta\right)_{\widetilde{E \times S}}$ $= \frac{1}{2}\left(p_1^*\beta \cdot \left(p_2^*\varphi^*\alpha\right)^2\right)_{\widetilde{E \times S}} = \frac{1}{2}\left(\int_E \beta\right) \cdot \left(\varphi^*\alpha\right)^2_S = \int_E \beta \cdot \left(\alpha^2\right)_T$, ce qui termine la preuve du lemme.

1.12. On va calculer maintenant l'accouplement de Yukawa sur $H^1\left(T_X\right)$. Cet accouplement est une forme cubique dépendant du choix d'une section ω non nulle de K_X, et peut se définir en termes de variations infinitésimales de structure de Hodge de la façon suivante: la variation infinitésimale de structure de Hodge de X est décrite par une application $\varphi = \bigoplus_{p+q=3} \varphi^{p,q} : H^1\left(T_X\right) \to \bigoplus_{(p,q)} \operatorname{Hom}\left(H^q\left(\Omega^p_X\right), H^{q+1}\left(\Omega^{p-1}_X\right)\right)$. Le composé $\varphi^{1,2} \circ \varphi^{2,1} \circ \varphi^{3,0}$ donne alors une application $\psi : S^3 H^1\left(T_X\right) \to \operatorname{Hom}\left(H^{3,0}(X), H^{0,3}(X)\right)$ qui est la forme cubique cherchée moyennant l'isomorphisme $\operatorname{Hom}\left(H^{3,0}(X), H^{0,3}(X)\right) \simeq \mathbb{C}$ donnée par $\omega^{\otimes 2}$.

1.12.1. Par les résultats de Griffiths décrivant la variation infinitésimale de structure de Hodge en termes d'accouplements de Yoneda, on peut aussi définir ψ comme le produit $S^3 H^1\left(T_X\right) \to H^3\left(\Lambda^3 T_X\right)$, le dernier terme étant isomorphe à $\mathbb{C}$ par la multiplication avec $\omega^{\otimes 2}$.

1.12.2. On utilisera aussi la variante suivante: ω fournit, via $\varphi^{3,0}$ un isomorphisme $H^1(\Omega_X^2) \simeq H^1(T_X)$. La forme cubique ψ, vue sur $H^1(\Omega_X^2)$ est alors obtenue comme le produit $S^3H^1(\Omega_X^2) \to H^3(\Lambda^3(\Omega_X^2))$ suivi de l'isomorphisme: $\omega^{-1} : H^3(\Lambda^3(\Omega_X^2)) \xrightarrow{\simeq} H^3(K_X) \simeq \mathbb{C}$.

D'après le lemme 1.7 on a une décomposition naturelle:

$$H^1(\Omega_X^2) \simeq \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}) \oplus H^1(\Omega_S)^- \otimes H^0(\Omega_E) \oplus H^0(\Omega_S^2) \oplus H^1(\mathcal{O}_E).$$

En utilisant l'isomorphisme $H^1(T_X) \simeq H^1(\Omega_X^2)$ de 1.12.2, on obtient une décomposition naturelle:

$$H^1(T_X) = \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}) \oplus H^1(T_S)^+ \oplus H^1(T_E).$$

Dans cette decomposition, il est clair que le sous-espace $W = H^1(T_S)^+ \oplus H^1(T_E)$
correspond aux déformations de X données par une déformation de $E \times S$ préservant l'involution k.

Sur W, la variation de structure de Hodge $\oplus\varphi^{p,q}$ préserve la décomposition de la structure de Hodge de X en somme de $H^3(E \times S)^{\mathrm{inv}}$ et $\bigoplus_{(r,s)} H^1(C_s)$, et l'on a donc: $\varphi^{2,1}_{|W} = \varphi'^{2,1} + \varphi''^{2,1}$, où $\varphi'^{2,1}$ décrit la variation de structure de Hodge de $\bigcup_{(r,s)} p_r \times C_s$, lorque S varie infinitésimalement en préservant l'involution i et $\varphi''^{2,1}$ décrit la variation de structure de Hodge de $E \times S$ lorsque E et S varient.

Soit :

$$\varphi'^{2,1} : W \to \bigoplus_{(r,s)} \mathrm{Hom}\left(H^0(\Omega_{C_s}), H^1(\mathcal{O}_{C_s})\right)$$

et $\varphi''^{2,1}$:

$$W \to \mathrm{Hom}\Big(H^0(\Omega_E) \otimes H^1(\Omega_S)^- \oplus H^1(\mathcal{O}_E) \otimes H^0(\Omega_S^2),$$

$$H^1(\mathcal{O}_E)\otimes H^1(\Omega_S)^- \oplus H^0(\Omega_E)\otimes H^2(\mathcal{O}_S)\Big).$$

La flèche $\varphi''^{2,1}$ décrit la restriction de l'accouplement de Yukawa à W, modulo l'identification donnée par ω:

$$W \simeq H^0(\Omega_E)\otimes H^1(\Omega_S)^- \oplus H^1(\mathcal{O}_E)\otimes H^0(\Omega_S^2)$$
$$W^* \simeq H^1(\mathcal{O}_E)\otimes H^1(\Omega_S)^- \oplus H^0(\Omega_E)\otimes H^2(\mathcal{O}_S),$$

par la relation: $\psi(u) = \left\langle u, \varphi''_{2,1}(u)(u)\right\rangle$, pour $u \in W$. Finalement, si on écrit $u = (u_E, u_S)$ pour $u \in W$, avec $u_E \in H^1(T_E), u_S \in H^1(T_S)^+$, il est clair que $\psi(u_E,u_S) = \psi'(u_E,u_S)$, où ψ' est l'accouplement de Yukawa pour la variété $E\times S$, restreint à $H^1(T_E)\times H^1(T_S)^+ \subset H^1(T_{E\times S})$. D'après 1.12.1 on a: $\psi' : S^3(p_1^*H^1(T_E)+p_2^*H^1(T_S)) \to (\Lambda^3(p_1^*T_E\oplus p_2^*T_S))$ est donnée par le produit et on voit immédiatement que $\psi'(u_E,u_S) = 3\psi_1(u_E)\otimes\psi_2(u_E)$ où $\psi_1(u_E) = u_E \in H^1(T_E), \psi_2(u_S) = u_S^2 \in H^2(\Lambda^2 T_S)$. On a donc montré:

1.13 Lemme: Sur W, l'accouplement de Yukawa est décrit à un coefficient près par $\psi(u_E,u_S) = 3\psi_1(u_E)\psi_2(u_S)$, où ψ_1 est une forme linéaire non nulle sur $H^1(T_E)$ et ψ_2 est une forme quadratique non dégénérée sur $H^1(T_S)^+$. Si l'on choisit une 2-forme $\omega_S \in H^{2,0}(S)$, fournissant un isomorphisme $H^1(T_S)^+ \simeq H^1(\Omega_S)^-, \psi_2$ s'identifie à la forme d'intersection sur $H^1(\Omega_S)^-$.

1.14. On revient à l'application $\varphi'^{2,1}$ qui décrit les accouplements de Yukawa du type $\psi(w,\eta,\gamma)$, pour $w\in W, \eta \in \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}), \gamma \in H^1(\Omega_X^2)$ où ψ est la forme trilinéaire symétrique correspondant à la forme cubique ψ. Le fait que $\varphi'^{2,1}$ soit à valeurs dans $\bigoplus_{(r,s)} \mathrm{Hom}(H^0(\Omega_{C_s}), H^1(\mathcal{O}_{C_s}))$ est équivalent à l'annulation des termes $\psi(w,\eta,w)$ où $w\in W$, $\eta\in\bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s})$, et des termes $\psi(w,\eta_{r,s},\eta_{r',s'})$ pour $w\in W, \eta_{r,s}\in H^0(\Omega_{p_r\times C_s})$ $\eta_{r',s'}\in H^0(\Omega_{p_{r'}\times C_{s'}})$ et $(r,s)\neq(r',s')$.

D'autre part, comme $\varphi'^{2,1}$ décrit la variation de structure de Hodge de $\bigcup_s C_s$ lorsque S varie infinitésimalement (en préservant i), elle est obtenue par le composé de la projection $W \to H^1(T_S)^+$, de l'application ν : $H^1(T_S)^+ \to \bigoplus_s H^1(T_{C_S})$, différentielle de l'application naturelle $\mathrm{Def}(S,i) \to \mathrm{Def}\left(\bigcup_s C_s\right)$, et de l'application décrivant la variation de structure de Hodge de $\bigcup_s C_s$: $\bigoplus_s H^1(T_{C_s}) \to \bigcup_s \mathrm{Hom}\left(H^0(\Omega_{C_s}), H^1(\mathcal{O}_{C_s})\right)$. Il est bien connu que cette dernière flèche est duale de produit: $\bigoplus_s H^0(\Omega_{C_s})^{\otimes 2} \to \bigcup_s H^0(\Omega_{C_s}^{\otimes 2})$. Finalement la flèche $\nu : H^1(T_S)^+ \to \bigcup_s H^1(T_{C_s})$ se dualise, modulo le choix d'une forme $\omega_S \in H^{2,0}(S)$, en une flèche:

1.14.1. $\nu' : \oplus H^0\left(\Omega_{C_s}^{\otimes 2}\right) \to H^1(\Omega_S)^-$, qui permet de réécrire les accouplements $\psi(w,\eta,\gamma)$ sous la forme $\psi(w,\eta,\gamma) = \langle w, \nu'(\eta\gamma)\rangle_S$ pour $w \in H^1(T_S)^+ \simeq H^1(\Omega_S)^-$
$\eta,\gamma \in \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{p_r \times C_s})$. On utilisera dans la section 3 l'interprétation suivante de l'application ν' :

1.15 Lemme: Fixons $\omega \in H^0(K_S), \sigma \in H^0(-2K_T)$ une equation pour $C = \cup C_s$; pour $P \in H^0(-2K_T)$, la forme méromorphe $\frac{P\omega}{\sigma}$, à pôles d'ordre 2 le long de $\cup C_s$ est sans résidus sur C. Sa classe dans $H^2(S,\mathbb{C})$ est en fait dans $F^1H^2(S)^-$, et son image dans $H^1(\Omega_S)^-$ ne dépend que de la restriction $P_{|C} \in \oplus H^0\left(\Omega_{C_s}^{\otimes 2}\right)$. Ceci fournit l'application ν' à un coefficient près.

Cette correspondance, qui est une variation due à Clemens ([8] de la construction de Griffiths [17] est décrite précisement dans [8]. On résume ici l'argument: $\frac{P\omega}{\sigma}$ étant antiinvariante sous i n'a pas de résidu sur C. Elle définit donc une classe dans $H^2(S,\mathbb{C})$. Comme elle est à pôle d'ordre au plus 2 le long de C, la théorie de la filtration par l'ordre du pôle pour la construction de la structure de Hodge mixte sur $H^2(S\backslash C)$ montre que $\frac{P\omega}{\sigma}$ définit une classe dans $F^1H^2(S,\mathbb{C})^-$, donc dans $F^1H^2(S)^-$. Si P s'annule le long de C, $\frac{P\omega}{\sigma}$ n'a pas de pôle et définit un multiple de ω. Donc la classe de $\frac{P\omega}{\sigma}$ dans $H^1(\Omega_S)^-$ ne dépend que de $P_{|C}$. Notons finalement que la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sigma} -2K_T \to \Omega_C^{\otimes 2} \to 0$ et $H^1(\mathcal{O}_T) = 0$ montrent la surjectivité de la restriction $H^0(2K_T) \to H^0\left(\Omega_C^{\otimes 2}\right)$.

Il reste à montrer que l'application ainsi construite est bien égale à ν'. Mais il suffit pour cela de noter que $P \in H^0\left(-2K_{T|C}\right)$ détermine une déformation infinitésimale ε_p de C dans T, et donc une déformation infinitésimale ε'_p i-invariante de S; on a donc une application $\nu'' : H^0\left(-2K_{T|C}\right) \to H^1(T_S)^+$. On peut montrer alors, comme dans le cas des hypersurfaces [7], que $\varphi^{2,0}(\nu''(P)(\omega)$ est égale à la classe de $P\omega/\sigma$ dans $H^1(\Omega_S)^-$, où $\varphi^{2,0} : H^1(T_S)^+ \to \mathrm{Hom}(H^{2,0}(S), H^1(\Omega_S)^-)$ est la variation infinitésimale de structure de Hodge de S.

Il reste alors à voir que $\nu'' : H^0\left(-2K_{T|C}\right) \to H^1(T_S)^+$ est duale de $\nu : H^1(T_S)^+ \to H^1(T_C)$ (modulo le choix de ω).

1.15.1. On montre d'abord que ν'' est donné par le cobord associé à la suite exacte:

1.15.2. $$0 \longrightarrow T_S \xrightarrow{\varphi_*} \varphi^* T_T \longrightarrow N_C T \longrightarrow 0\,.$$

Considérons une déformation infinitésimale de C dans T :

$$\begin{array}{ccc} C_\varepsilon & \subset & T \times \mathbb{C}_\varepsilon \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_\varepsilon & = & \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \end{array}$$

correspondant à $P \in H^0(N_C T)$.

La déformation infinitésimale

$$\begin{array}{ccc} S_\varepsilon & \xrightarrow{\varphi} & T \times \mathbb{C}_\varepsilon \\ \downarrow & & \\ \mathbb{C}_\varepsilon & & \end{array}$$

de S qui lui est associée par ν'' est le revêtement double de $T \times \mathbb{C}_\varepsilon$ ramifié le long de C_ε. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T_S & \longrightarrow & T_{S_\varepsilon|S} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \varphi^*T_T & \longrightarrow & \varphi^*T_{T\times\mathbb{C}_\varepsilon|T} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_CT & = & N_CT & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où la seconde ligne est scindée et où la classe d'extension de la première ligne est $\nu''(P)$, tandis que la section de N_CT obtenue grâce au scindage est P, donne maintenant 1.15.1. En dualisant 1.15.2 on obtient :

1.15.3. $$0 \to \varphi^*\Omega_E \to \Omega_S \xrightarrow{\alpha} N_CS^* \to 0$$

et l'on en déduit que le dual de ν'' est donné par l'application $H^1(T_S)^+ \simeq H^1(\Omega_S)^- \to H^1(T_C)^+$ induite par α, où α est donné par le scindage $\Omega_{S|C} = N_CS^* \oplus \Omega_C$. De façon équivalente, le dual de ν'' est l'application $\nu''' : H^1(T_S)^- \to H^1(T_C)$ induite par la décomposition $T_{S|C} \simeq T_C \oplus N_CS$.

1.15.4. On montre enfin l'égalité de ν et ν''': On considère une déformation

infinitésimale $\begin{array}{ccccc} S_\varepsilon & \longrightarrow & T_\varepsilon & \hookleftarrow & C_\varepsilon \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_\varepsilon & & \mathbb{C}_\varepsilon & & \mathbb{C}_\varepsilon \end{array}$, avec paramètre infinitésimaux $u \in$

$H^1(T_C), v \in H^1(T_S)$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_S & \longrightarrow & T_{S_\varepsilon|S} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T_{S|C} & \longrightarrow & T_{S_\varepsilon|C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T_C & \longrightarrow & T_{C_\varepsilon|C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les classes d'extension de la première et dernière ligne sont respectivement v et u, et la flèche verticale $T_{S_\varepsilon|C} \to T_{C_\varepsilon|C}$ est donnée par le scindage naturel $T_{S_\varepsilon|C} \simeq T_{C_\varepsilon|C} \oplus N_C S$. On en déduit immédiatement que $u = \nu'''(v)$, et que le lemme 1.15 est prouvé.

Le calcul de l'accouplement de Yukawa se termine enfin par la preuve de:

1.16. Lemme: La restriction de l'accouplement de Yukawa au sous-espace $\bigoplus_{r,s} H^0(\Omega_{C_s})$ de $H^1(\Omega_X^2) \underset{\omega}{\simeq} H^1(T_X)$ est nulle.

Démonstration: On utilise la troisième description suivante de X. Soit $E/j = \mathbb{P}^1, \varphi_1 : E \to \mathbb{P}^1$ l'application quotient, de lieu de branchement $A = \{p_1, \cdots p_4\} \subset \mathbb{P}^1$. De même, soit $T = S/i, \varphi_2 : S \to T$ l'application quotient, ramifiée le long de $C = UC_s \subset T$. L'application $(\varphi_1, \varphi_2) E \times S \to \mathbb{P}^1 \times T$ fournit une application $(\widetilde{\varphi_1, \varphi_2}) : \widetilde{E \times S} \to \widetilde{\mathbb{P}^1 \times T}$ où $\widetilde{E \times S}$ et $\widetilde{\mathbb{P}^1 \times T}$ sont les éclatés de $E \times S$ et $\mathbb{P}^1 \times T$ respectivement le long de $\bigcup_{(r,s)} p_r \times C_s$.

Cette application descend en une application $\varphi : X \to \widetilde{\mathbb{P}^1 \times T}$ et fait de X le revêtement double de $Y = \widetilde{\mathbb{P}^1 \times T}$, ramifié le long du transformé propre de $A \times T \cup \mathbb{P}^1 \times C$. On notera I l'évolution agissant sur X au dessus de Y. Comme Y est l'éclaté de $\mathbb{P}^1 \times T$ le long de $\bigcup_{(r,s)} p_r \times C_s$ on a une inclusion

$\oplus j'_{r,s} \circ \tau'^{*}_{r,s} = \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}) \to H^1(\Omega^2_Y)$, où $j'_{r,s} : E_{r,s} \to Y$ est l'inclusion du diviseur exceptionnel au dessus de $p_r \times C_s$ et $\tau'_{r,s} : E_{r,s} \to C_s$ est la restriction de $\tau' : Y \to \mathbb{P}^1 \times T$. On a alors: $\bigoplus_{(r,s)} j_{r,s*} \circ \tau_{r,s} = \varphi^* \circ \left(\bigoplus_{(r,s)} j'_{r,s*} \circ \tau'_{r,s}\right)$: $\bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}) \to H^1(\Omega^2_X)$.

Soit $\eta \in \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s})$; alors

$$\left(\bigoplus_{(r,s)} j_{r,s*} \circ \tau^*_{r,s}(\eta)\right)^3 = \varphi^* \left(\left(\left(\bigoplus_{(r,s)} j'_{r,s} \circ \tau'^{*}_{r,s}\right)(\eta)\right)^3\right)$$

dans $H^3(\Lambda^3(\Omega^2_X))$ où: $\varphi^* : H^3(\Lambda^3(\Omega^2_Y)) \to H^3(\Lambda^3(\Omega^3_X))$ est induite par $\varphi^* : \varphi^*\Omega_Y \to \Omega_X$.

Mais $\Lambda^3(\Omega^2_Y) = K_Y^{\otimes 2}$ et $\pi_*(\Lambda^3(\Omega^2_X)) = K_Y \oplus \mathcal{O}_Y$, et comme l'application $\pi^*(\Lambda^3(\Omega^2_Y)) \xrightarrow{\pi^*} \Lambda^3(\Omega^2_Y)$ s'annule doublement le long du lieu de ramification de π, on voit que l'application induite $\Lambda^3(\Omega^2_Y) \to \pi * (\Lambda^3(\Omega^2_X))$ se factorise par $\Lambda^3(\Omega^2_Y) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_Y$, où σ est l'équation du diviseur de ramification dans Y. Comme $H^3(\mathcal{O}_Y) = 0$, l'application $\varphi^* : H^3(\Lambda^3(\Omega^2_Y)) \to H^3(\Lambda^3(\Omega^2_X))$ est nulle.

Utilisant la définition 1.12.1 de l'accouplement de Yukawa, on obtient donc le Lemme 1.16.

L'accouplement de Yukawa de X est maintenant complètement calculé, et les numéros 1.12 à 1.16 se résument de la façon suivante:

1.17 Proposition: Soit $(w + u_S + u_E) \in \bigoplus_{(r,s)} H^0(\Omega_{C_s}) \oplus H^1(\Omega_S)^- \oplus H^1(\Omega_E) \simeq H^1(T_X)$ où l'isomorphisme dépend du choix de $\omega_S \in H^{2,0}(S)$, $\omega_E \in H^0(\Omega_E)$. Alors $\psi(w + u_S + u_E) = 3(\nu'(w^2) \cdot u_S) + 3\int_E u_E \cdot \int_S u_S^2$ où

$\nu' : \bigoplus_{(r,s)} H^0\left(\Omega_{C_s}^{\otimes 2}\right) \to H^1\left(\Omega_S\right)^-$ est décrite en 1.14.1 et 1.15.

1.18. Il y a évidemment une analogie entre la forme d'intersection cubique sur $H^1\left(\Omega_X\right)$ (Lemme 1.11) et la forme cubique de la proposition 1.17.

Dans la section suivante on construira le miroir $X_2 = \widetilde{E_2 \times S_2}/\left(\widetilde{j_2, i_2}\right)$ de $X_1 = \widetilde{E_1 \times S_1}/\left(\widetilde{j_1, i_1}\right)$, et on montrera qu'on a: $\dim H^1\left(\Omega_{T_1}\right) = \dim H^1\left(\Omega_{S_2}\right)^-$,
$\dim H^1\left(\Omega_{T_2}\right) = \dim H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-$, et le rang du sous espace de $H^1\left(\Omega_{X_1}\right)$ engendré par les diviseurs exceptionnels de X_1 est égal au rang du sous espace de $H^1\left(\Omega_{X_2}^2\right)$ engendré par la cohomologie des diviseurs exceptionnels de X_2. Cependant la forme d'intersection du Lemme 1.11, calculée sur $H^1\left(\Omega_{X_1}\right)$, n'est pas une spécialisation de l'accouplement de Yukawa sur $H^1\left(\Omega_{X_2}^2\right)$, à cause du terme en d^3 qui est non nul. Dans la 3ème section de cet article, on suggère une interprétation possible de ce défaut, en spéculant sur la formule 0.4.1.

§2 - Miroirs

2.1. On va utiliser dans cette section les résultats de Nikulin ([11], [1], [22]) sur les involutions i sur les surfaces $K3$ S, agissant par -1 sur la deux forme holomorphe ω_S de S. L'involution i agit par une isométrie $H(i)$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})$ et $H^2(S,\mathbb{C})$, et par hypothèse la forme ω_S est dans $H^2(S,\mathbb{C})^-$. Par le théorème de l'indice de Hodge appliqué aux surfaces S et $T = S/i$ (T est lisse, projective et $H^{2,0}(T) = 0$), on voit que $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ muni de la forme d'intersection de S est de signature $(2, b_2^- - 2)$. Par le théorème de Torelli pour les surfaces K3, et la surjectivité de l'application des périodes, on peut associer à chaque involution $H(i)$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})$ satisfaisant cette condition sur la signature de H^{2-}, et définie à conjugaison près par le groupe des isométries de $H^2(S,\mathbb{Z})$ une famille de surfaces $K3$ S_t munies d'une involution i agissant par $H(i)$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})$.

2.1.1. On considère en effet $D = \{\omega \in \mathbb{P}(H^2(S,\mathbb{C})^-)/\omega\cdot\omega = 0 \text{ et } \omega\cdot\overline{\omega} > 0\}$

et $U \subset D$, défini par la condition : $\nexists \alpha \in H^2(S,\mathbb{Q})^-, \alpha \neq 0$ et $\alpha \cdot \omega = 0$. Alors U a deux composantes connexes isomorphes et chaque point t de U paramètre une surface $K3$ S_t, projective car $H^2\left(S_t,\mathbb{Z}\right)^+$ est orthogonal à $H^{2,0}(S_t)$ donc de type (1,1), et contient un élément de self-intersection > 0. Comme S_t est projective, il existe une classe de Kähler entière $c \in H^2\left(S_t,\mathbb{Z}\right) \cap H^{1,1}\left(S_t\right)$ et comme $\omega \in U, c \in H^2\left(S_t,\mathbb{Z}\right)^+$. Comme $H(i)$ agit trivialement sur $H^2\left(S_t,\mathbb{Z}\right)^+$, $H(i)$ préserve c, et est donc une isométrie de structure de Hodge préservant une classe de Kähler. Donc par [27], Th. 11.1, $H(i)$ est induite par une involution i sur S_t.

2.1.2. On travaillera en fait sur D, pour $H(i)$ fixé. Les points de $D\backslash U$ correspondent à des surfaces $K3$ S munies d'une involution i' n'agissant pas comme $H(i)$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})$. Par exemple lorsque la courbe de ramification de l'application quotient $S_t \to S_t/i$ acquiert un nœud, par une dégénération de Lefschetz, on peut construire une résolution simultanée de la famille $(S_{\sqrt{t}})$ mais l'involution agissant sur la fibre centrale n'a plus le même type topologique que i_t. Cela est dû au fait que l'espace total de la résolution simultanée est une petite résolution d'une variété de dimension trois avec un point double, et l'involution agissant sur cette variété de dimension trois ne se prolonge pas à la petite résolution; elle se prolonge en un isomorphisme de l'une des petites résolutions sur l'autre.

Ceci étant dit, on voit que ces différentes familles sont essentiellement caractérisées par la classe de conjugaison de l'involution $H(i)$ et le résultat de Nikulin que l'on utilisera est le suivant (cf [11],[22]):

2.2 Théorème :

i) La classe de conjugaison de $H(i)$ (qui est déterminée par la classe de l'immersion primitive $H^2(S,\mathbb{Z})^- \subset H^2(S,\mathbb{Z})$ ne dépend que de la classe d'isométrie du réseau $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ muni de la forme d'intersection induite.

ii) Cette classe d'isométrie est sujette aux conditions:

a) Sign $H^2(S,\mathbb{Z})^- = \left(2, b^{2-} - 2\right)$

b) Le conoyau K de l'application $H^2(S,\mathbb{Z})^- \to H^2(S,\mathbb{Z})^{-*}$ donnée par la forme d'intersection est un groupe de 2-torsion.

iii) La classe d'isométrie du réseau $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ est déterminée par trois invariants (b_2^-, k, δ) où $b_2^- = \text{rang } H^2(S,\mathbb{Z})^-$, $k = \text{rang}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} K$ et $\delta \in \{0,1\}$ est l'entier déterminé de la façon suivante:

La forme d'intersection sur $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ se prolonge uniquement en une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Q}$ sur $H^2(S,\mathbb{Z})^{-*}$. On peut construire alors une fonction quadratique $\overline{q}$ sur K à valeurs dans $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, en posant $\overline{q}(\overline{x}) = q(x) \pmod{2\mathbb{Z}}$. On pose $\delta = 0$ si $\overline{q}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \delta = 1$ sinon.

2.3. On revient maintenant à la situation géométrique $\varphi : S \to T = S/i$ du §1. On rappelle que N = nombre de composantes de la courbe de ramification et N' = somme des genres des composantes de cette courbe. On commence par calculer les invariants b_2^-, k en fonction des nombres N et N'. On a:

2.4 Lemme:

i) $b_2^- = 12 - N + N'$

ii) $k = 12 - N - N'$

Démonstration:

i) a été montré en 1.6 (compte-tenu de $b_2^- = 22 - b_2^+$).

ii) 2^k est le discriminant de la forme d'intersection induite sur $H^2(S,\mathbb{Z})^-$, donc aussi le discriminant de la forme d'intersection induite sur $H^2(S,\mathbb{Z})^+$.

D'autre part, on a une suite exacte:

(2.4.1) $$0 \to H^2(T) \xrightarrow{\varphi^*} H^2(S,\mathbb{Z})^+ \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{N-1} \to 0$$

En effet, reprenant la notation $C = \bigcup_{s=1}^{N} C_s$ pour le lieu de ramification de φ, et notant $U = T\backslash C, V = S\backslash C$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(S,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_*} & H^2(T,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
H^2(V,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\beta]{} & H^2(U,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^3(U,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^3(V,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \rightarrow H^3(U,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0 & & \\
\bigoplus_s H^1(C_s,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & = & \bigoplus_s H^1(C_s,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où la ligne du milieu est induite par la suite exacte 1.1.1. On en déduit immédiatement que le conoyau de φ_* est égal au conoyau de β, et comme $H^3(V,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^3(U,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont de dimension (sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) $N-1$, on a coker $\varphi_* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{N-1}$. D'autre part les applications de φ_* de 2.4.2 et φ^* de 2.4.1 sont reliées par la relation suivante:

Considérons le composé

$$\psi : H^2(S,\mathbb{Z}) \underset{\text{Poincare}}{\simeq} H^2(S,\mathbb{Z})^* \rightarrow H^2(S,\mathbb{Z})^{+*} \overset{(\varphi^*)^{\text{dual}}}{\rightarrow} H^2(T)^* \underset{\text{Poincare}}{\simeq} H^2(T)$$

alors la réduction de $\psi \bmod 2$ est égale à φ_*. Comme la flèche $H^2(S,\mathbb{Z})^* \rightarrow H^2(S,\mathbb{Z})^{+*}$ est surjective et que l'on sait que φ^* a un conoyau de 2-torsion on obtient immédiatement coker $\varphi^* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{N-1}$ et donc 2.4.1. est démontré.

Sur $H^2(T) \subset H^2(S,\mathbb{Z})^+$ la forme d'intersection de S est égale à 2 fois celle de T qui est unimodulaire. Donc son discriminant est égal à $2^{b_2(T)}$. La suite exacte 2.4.1 montre alors que: $\operatorname{discr} H^2(S,\mathbb{Z})^+ = 2^{b_2(T)-2(N-1)}$, ce qui donne $k = 10 + N - N' - 2(N-1) = 12 - N - N'$.

Les entiers N et N' déterminent donc b_2^- et k. Le Lemme suivant permet de construire topologiquement la "mirror symmetry" échangeant les nombres N et N', compte-tenu du théorème de Nikulin:

2.5 Lemme: Soit i une involution sur S agissant par (-1) sur $H^{2,0}(S)$ et d'entiers N, N', δ associés satisfaisant $N > 0, N' > 0$ et $(N, N', \delta) \neq (5,1,0)$. Alors $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ contient un plan hyperbolique.

Démonstration:

2.5.1. Supposons d'abord $N' \geq 2$. Soit $\overline{L} \subset H^2(S, \mathbb{Z})^- \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un sous espace isotropique maximal pour la forme d'intersection réduite modulo 2 $\langle \overline{\cdot} \rangle$. Soit $L \subset H^2(S, \mathbb{Z})^-$ l'image réciproque de $\overline{L}$ par l'application de réduction mod 2. La forme $\langle\ \rangle$ restreinte à L est divisible par 2, soit $\langle\ \rangle_{|L} = 2\langle\ \rangle_L$ et $\langle\ \rangle_L$ est unimodulaire. $\langle\ \rangle_L$ étant indéfinie et n'étant pas paire, (on peut toujours le supposer par un choix adéquat de L), $\langle\ \rangle_L$ est diagonale, soit dans une base convenable $(e_i), \langle x, x\rangle_L = x_1^2 + x_2^2 - \sum\limits_{i>2} x_i^2$. Notons que de $k = 12 - N - N' \geq 0$ et $N' \geq 2$ on tire $N \leq 10$ et $b_2^- \geq 4$ ce qui montre bien que $\langle\ \rangle_L$ est indéfinie. On voit alors facilement que l'ensemble $\{x \in L, \langle x, x\rangle_L = 0\}$ engendre modulo 2 l'hyperplan $\{\sum \overline{x_i} = 0 \bmod 2\}$. On en déduit qu'il existe $x \in L$ tel que $\langle x, x\rangle = 0$ et l'image de x dans $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ a une réduction mod 2 qui n'est pas dans Ker $\langle \overline{\ } \rangle$ car les éléments satisfaisant cette dernière condition engendrent un espace de codimension $N' \geq 2$ dans $L \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut supposer que x est primitif dans L, et alors il existe $y \in H^2(S, \mathbb{Z})^-$ tel que $\langle x, y\rangle = 1$. Comme $\langle y, y\rangle$ est pair x et y engendrent un plan hyperbolique dans $H^2(S, \mathbb{Z})$.

2.5.2 Supposons maintenant $N' = 1$: de $k = 12 - N - N' \geq 0$ on tire $N \leq 11$. Si $N = 11$ on a $k = 0$ et $b_2^- = 2$ et la forme d'intersection sur H^{2-} est paire, unimodulaire et définie positive, ce qui est absurde. Donc $N \leq 10$ et $b_2^- \geq 3$. Reprenons maintenant la construction de 2.5.1: on a $L \subset H^2(S, \mathbb{Z})^-$ avec $\langle\ \rangle_L$ indéfinie de la forme $\langle x, x\rangle_L = x_1^2 + x_2^2 - \sum\limits_{i>2} x_i^2$.

2.5.3 Supposons qu'il existe $x \in L$ primitif tel que $\langle x, x\rangle_L = 0$ et x est divisible par 2 dans $H^2(S, \mathbb{Z})^-$; alors $x = 2y$, et la projection de y dans $H^2(S, \mathbb{Z})^- \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas dans Ker $\langle \overline{\ } \rangle$ donc il existe $z \in H^2(S, \mathbb{Z})^-$ tel que $\langle z, y\rangle = 1$ et comme en 2.5.1, $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ contient un plan hyperbolique.

On sait d'autre part que le noyau de $L \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H^2(S, \mathbb{Z})^- \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

est de rang 1, représenté par un élément $x = \sum x_i e_i \in L$, avec $x_i = 0$ ou 1. Comme $x = 2y, y \in H^2(S,\mathbb{Z})^-$ on a: $\langle x,x\rangle = 4\langle y,y\rangle = 2\langle x,x\rangle_L$, et comme $\langle y,y\rangle$ est divisible par 2, on a $\langle x,x\rangle_L$ divisible par 4. Si $\langle x,x\rangle_L = 0$, on a fini par ce qui précède. Comme $b_2^- = 13 - N \leq 12$ on voit que $\langle x,x\rangle_L = -4$ ou -8 sont les possibilités restantes. Si $\langle x,x\rangle_L = -8$, et $x_1 = x_2 = 0$ on prend $x' = x + 2e_1 + 2e_2$ et alors $\langle x',x'\rangle_L = 0$.

Si $\langle x,x\rangle_L = -8$ et $x_1 = 1$ on prend $x' = x + e_1$ et alors $\langle x',x'\rangle_L = 0$. De même si $x_2 = 1, x_1 = 0$. Dans tous les cas on est ramené à la situation 2.5.3 et donc $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ contient un plan hyperbolique.

Supposons donc $\langle x,x\rangle_L = -4$. Si l'une des coordonnées x_1, x_2 est nulle, soit x_1, il suffit de prendre $x' = x + 2e_1$, et alors $\langle x',x'\rangle_L = 0$. Si $x_1 = x_2 = 1$, et l'une des coordonnées $x_i, i > 2$ de x s'annule, soit x_3, il suffit de prendre $x' = x + 2e_1 + 2e_3$ pour obtenir $\langle x',x'\rangle_L = 0$.

En conclusion, si 2.5.3 n'est pas satisfait, on doit avoir: toutes les coordonnées de x sont égales à 1. Comme $\langle x,x\rangle_L = -4$ on a donc rang $L = 8$, soit encore $12 - N + N' = 8$ et $N = 5$. De plus on a:

2.5.4. $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ est engendré par $e_1 \cdots e_8$ et $y = \frac{1}{2}\sum_1^8 e_i$, la forme d'intersection sur $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ étant donnée par $\langle x,x\rangle = 2\left(x_1^2 + x_2^2 - \sum_{i>2} x_i^2\right)$ dans la base (sur $\mathbb{Q}$) de $H^2(S,\mathbb{Q})^-$ donnée par les e_i.

Le dual $H^2(S,\mathbb{Z})^{-*}$ est engendré par les $\sum x_i e_1^*$ tels que $\sum x_i = 0 \bmod 2$, et l'application ψ donnée par $\langle\ \rangle : \psi : H^2(S,\mathbb{Z})^- \to H^2(S,\mathbb{Z})^{-*}$ est determinée par les conditions:

$\psi(e_i) = 2e_i^*$, pour $i = 1,2; \psi(e_i) = -2e_i^*$ pour $i > 2$. La forme $\langle\ \rangle_*$ obtenue par prolongement de $\langle\ \rangle$ à $H^2(S,\mathbb{Z})^{-*}$ est donc telle que $\langle \sum x_i e_i^*, \sum x_i e_i^*\rangle_* = \frac{1}{4}\left\langle \sum_i \varepsilon_i x_i e_i, \sum_i \varepsilon_i x_i e_i \right\rangle$ où $\varepsilon_i = 1$, $i \leq 2$, $\varepsilon_i = -1$,

$i > 2$. Ce qui donne encore $\langle \sum x_i e_i^*, \sum x_i e_i^* \rangle_* = \frac{1}{2} \left\langle x_1^2 + x_2^2 - \sum_{i>2} x_i^2 \right\rangle$. Mais $\sum x_i e_i^* \in H^2(S, \mathbb{Z})^- \iff \sum x_i \equiv 0 \bmod 2 \iff x_1^2 + x_2^2 - \sum_{i>2} x_i^2 \equiv 0 \bmod 2$. Donc la fonction $\langle x, x \rangle_*$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et δ est nul.

Le cas peut être exceptionnel 2.5.4 est donc caractérisé par les invariants $N = 5, N' = 1, \delta = 0$ et le lemme est démontré.

2.6. Construction de la "mirror symmetry" topologique:

Supposons que $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ contienne un plan hyperbolique P. Soit r_P la réflexion par rapport à P, définie sur $H^2(S, \mathbb{Z})$ par la condition $r_{P|P} = \mathrm{Id}_P, r_{P|P^\perp} = -\mathrm{Id}_{p^\perp}$. Considérons l'involution $i' = r_P \circ H(i)$. Pour i', on a $H^2(S, \mathbb{Z})^{+(i)'} = H^2(S, \mathbb{Z})^- \cap P^\perp$. Donc $H^2(S, \mathbb{Z})^{-(i)'}$ a la signature correcte $(2, b^{2-(i')} - 2)$. De plus, on a clairement $k' = k$, $\delta' = \delta$, où k' et δ' sont les invariants de 2.2 iii associés à i', puisque k' et δ' sont determinés par la forme discriminante $\overline{q}$ de 2.2 iii, qui est la même pour $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ et $H^2(S, \mathbb{Z})^- \cap P^\perp$, donc aussi pour $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ et $H^2(S, \mathbb{Z})^{-(i')} = (H^2(S, \mathbb{Z})^- \cap P^\perp)^\perp$.

Ecrivant $i' = H(i_1)$ pour une involution i_1 agissant sur une surface $K3$ S_1 (cf 2.1), $H(i_1)$ agissant sur (-1) sur $H^{2,0}(S_1)$, on a les entiers N_1 et N_1' définis comme en 2.3, pour (S_1, i_1) et par le Lemme 2.4 appliqué à S_1 et S, on a:

2.6.1:

$$12 - N_1 + N_1' = b_2^-(S_1) = b_2^+(S) + 2 = 12 + N - N'$$
$$k(S_1) = k(S) = 12 - N_1 - N_1' = 12 - N - N'$$

On en déduit immédiatement: $N_1 = N', N_1' = N$.

On appellera $\left(H^2(S_1, \mathbb{Z}), H(i_1)\right)$ (ou par abus (S_1, i_1)) le miroir topologique de $(H^2(S, \mathbb{Z}), H(i))$ (ou par abus (S, i)): le théorème de Nikulin justifie ceci puisqu'il montre que la classe de conjugaison de $H(i_1)$ ne dépend pas du choix du plan P. Remarquons que l'opération $(S, i) \to (S_1, i_1)$ est clairement involutive.

2.7. Cette construction montre aussi que le cas $(N, N', \delta) = (5, 1, 0)$ est bien une exception au Lemme 2.5, compte-tenu de la classification complète des invariants (N, N', δ) possibles données par Nikulin ([22]). En effet, d'une part il existe bien une involution d'invariants (5, 1, 0) associés, d'autre part, il n'existe pas d'involution d'invariants (1, 5, 0), donc, par la construction 2.6, pour l'involution d'invariants associés (5.1.0), $H^2(S, \mathbb{Z})^-$ ne contient pas de plan hyperbolique.

2.8. Soit maintenant donnés $\left(H^2(S_1, \mathbb{Z}), H(i_1)\right)$ et son miroir topologique $\left(H^2(S_2, \mathbb{Z}), H(i_2)\right)$, où $H(i_1)$ et $H(i_2)$ satisfont la condition 2.2 ii) a): On va construire précisément un isomorphisme entre le domaine D_1 des périodes marquées pour S_1, et l'ensemble D_2' des formes $\eta \in H^2(S_2, \mathbb{C})^+$ telles que $(\mathrm{Re}\,\eta)^2 > 0$.

2.9. Ce qu'on appelle domaine des périodes marquées pour (S_1, i_1) est l'ensemble $D_1 = \{\omega \in \mathbb{P}(H^2(S_1, \mathbb{C})^-)/\omega^2 = 0, \omega\overline{\omega} > 0\}$. Un point général de D_1 détermine une structure complexe sur S_1, avec une involution i_1 agissant comme $H(i_1)$ sur $H^2(S_1, \mathbb{Z})$ (cf 2.1.1), ainsi qu'un marquage de $\left(H^2(S_1, \mathbb{Z}), H(i_1)\right)$, mais d'après 2.1.2 ces données différent en général. Ceci étant noté, la construction est la suivante:

2.10. Le plan hyperbolique $P \subset H^2(S_1)^-$ est fixé. P possède deux éléments $\alpha, \beta \in P_{\mathbb{Z}}$ bien définis au signe près, tels que $\alpha^2 = 2, \beta^2 = -2$, et $\alpha\beta = 0$. Soit $\omega \in D_1$(ω définie à un coefficient près); alors $\omega \notin P \otimes \mathbb{C}$ car sinon on aurait : $P \otimes \mathbb{R} = \langle \mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega \rangle \subset H^2(S_1, \mathbb{R})^-$, ce qui contredit le fait que la forme d'intersection sur $P \otimes \mathbb{R}$ est indéfinie, tandis que celle de $\langle \mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega \rangle$ est définie positive. Notons $Q_\omega \subset H^2(S_1)^-$ le sous-espace complexe de dimension trois engendré sur $\mathbb{C}$ par P et ω.

Comme la forme d'intersection de $H^2(S_1, \mathbb{C})^-$ a une restriction non dégénérée sur P, Q_ω se scinde en la somme directe orthogonale: $Q_\omega = P \perp \Delta$, où Δ est la droite complexe $Q_\omega \cap P^\perp$. On a alors:

2.11 Lemme: La forme d'intersection de $H^2(S_1, \mathbb{C})^-$, restreinte à Q_ω, est non dégénérée.

Démonstration: Soit $u \in P \otimes \mathbb{C}$, tel que $\omega + u$ engendre Δ. Il suffit de montrer que $(\omega + u)^2 \neq 0$.

Comme $\omega+u$ est orthogonal à P, on a: $\forall v \in P, (\omega+u)\cdot v = 0 = \omega v+uv$. En particulier $(\omega + u)^2 = \omega^2 + u^2 + 2\omega u = -u^2$, puisque $\omega^2 = 0$.

Si $(\omega + u)^2 = 0, u^2 = 0$, et donc $u = \lambda u'$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u' \in P \otimes \mathbb{R}$. On a $u \neq 0$, car sinon ω serait orthogonale à P; ceci entraînerait que $\mathrm{Re}\,\omega$ et $\mathrm{Im}\,\omega$ sont orthogonales à P, et contredirait le fait que la forme d'intersection de $H^2(S_1, \mathbb{R})^-$, restreinte à $P^\perp$ est la signature $(1, b_2^- - 3)$, tandis qu'elle est définie positive sur $\langle \mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega\rangle$.

Maintenant, de $\omega u + u^2 = 0, u^2 = 0$, on tire $\omega u' = 0$, avec u' réel $\neq 0$, d'où $Re\omega \cdot u' = 0 = \mathrm{Im}\,\omega.u' = 0$, ce qui contredit le fait que $u'^2 = 0$, tandis que $\langle\ \rangle$ est définie négative sur l'orthogonal de $\langle \mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega\rangle$ dans $H^2(S_1)^-$. L'hypothèse $(\omega + u)^2 = 0$ est donc absurde.

2.12. Soit $\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \beta' = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta$, et $\chi \in \Delta$ tel que $\chi^2 = 1$, où α, β sont définis au signe près en 1.10 et χ est défini au signe près.

(α', β', χ) fournissent une base de Q_ω, et on peut écrire: $\omega = \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\chi$, où (λ, μ, ν) sont des coordonnées homogènes, pour $\mathbb{P}(Q_\omega)$. On a $\nu \neq 0$ puisque $\omega \neq P$ (cf 2.20). On a alors:

2.13. Lemme: Soit $\omega \in \mathbb{P}(Q_\omega)$ telle que $\omega^2 = 0$, soit $\eta = i\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\chi \in \Delta$. Alors on a l'équivalence des deux conditions suivantes:

i) $\omega\overline{\omega} > 0$

ii) $(Re\eta)^2 > 0$

Démonstration: Comme α' et β' sont réels, on a $\overline{w} = \overline{\lambda}\alpha' + \overline{\mu}\,\beta' + \overline{\nu}\,\overline{\chi}$. Comme χ est orthogonal à P, qui est réel, $\overline{\chi}$ est orthogonal à P, et l'on a:

2.13.1.

$$\omega\overline{\omega} = \lambda\overline{\lambda} - \mu\overline{\mu} + \nu\overline{\nu}\chi\overline{\chi}$$

$$\omega^2 = \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 = 0$$

Quitte à remplacer ω par $\frac{\omega}{\nu}$ et λ par $\lambda' = \frac{\lambda}{\nu}$, μ par $\mu' = \frac{\mu}{\nu}$, on peut supposer $\nu = 1$.

On a alors $\eta = i(\lambda' - \mu')\chi$. 2.13.1 devient

2.13.2.

i)$\omega\overline{\omega} = \lambda'\overline{\lambda}' - \mu'\overline{\mu}' + \chi\overline{\chi}$

ii)$\omega^2 = \lambda'^2 - \mu'^2 + 1 = 0$

Maintenant $\mathrm{Re}\,\eta = \frac{1}{2}(\eta + \overline{\eta}) = \frac{1}{2}\left(i(\lambda' - \mu')\chi - i(\overline{\lambda}' - \overline{\mu}')\overline{\chi}\right)$ d'où $(\mathrm{Re}\,\eta)^2 = \frac{1}{4}(-(\lambda' - \mu')^2 - (\overline{\lambda}' - \overline{\mu}')^2 + 2(\lambda' - \mu')(\overline{\lambda}' - \overline{\mu}')\chi\overline{\chi})$. D'après 2.13. 2 ii) on a $(\lambda' - \mu')(\overline{\lambda}' - \overline{\mu}') > 0$ et il vient: $2(\mathrm{Re}\,\eta)^2/(\lambda' - \mu')(\overline{\lambda}' - \overline{\mu}') = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda' - \mu'}{\overline{\lambda}' - \overline{\mu}'} + \frac{\overline{\lambda}' - \overline{\mu}'}{\lambda' - \mu'}\right) + \chi\overline{\chi}$. Utilisant 2.13.2 ii) sous la forme $\overline{\lambda}' + \overline{\mu}' = \frac{-1}{\overline{\lambda}' - \overline{\mu}'}$ il vient : $2(\mathrm{Re}\,\eta)^2/(\lambda' - \mu')(\overline{\lambda}' - \overline{\mu}') = \mathrm{Re}((\lambda' - \mu')(\overline{\lambda}' + \overline{\mu}')) + \chi\overline{\chi} = \lambda'\overline{\lambda}' - \mu'\overline{\mu}' + \chi\overline{\chi} = \omega\overline{\omega}$. Le Lemme est donc prouvé.

2.14. Notons finalement que $\eta \in \Delta \subset H^2(S_1, \mathbb{C})^- \cap P^\perp = H^2(S_2, \mathbb{C})^+$ ne dépend pas du choix de χ à ± 1 près, et ne dépend que du point projectif défini par ω dans $\mathbb{P}\left(H^2(S_1, \mathbb{C})^-\right)$. On a donc bien construit une application M_1, clairement holomorphe: $M_1 : D_1 \to D_2'$. Il reste à voir que M_1 est un isomorphisme. On a d'abord:

2.15 Lemme: Soit $\eta \in D_2'$; alors $\eta^2 \neq 0$.

Démonstration: Ecrivons $\eta = \mathrm{Re}\,\eta + i\,\mathrm{Im}\,\eta$; alors $\eta^2 = 0$ entraîne $\mathrm{Re}\,\eta \cdot \mathrm{Im}\,\eta = 0$, et $(\mathrm{Re}\,\eta)^2 = (\mathrm{Im}\,\eta)^2$. Comme $(\mathrm{Re}\,\eta)^2 > 0$, si $\eta^2 = 0, H^2(S_2, \mathbb{R})^+$ contient un plan réel sur lequel la forme d'intersection est définie positive, ce qui contredit le fait que la signature de $H^2(S_2, \mathbb{R})^+$ est $(1, b_2^+(S_2) - 1)$. Par l'isomorphisme $H^2(S_2, \mathbb{R})^+ \simeq H^2(S_1, \mathbb{R})^- \cap P^\perp$, voyons $\eta \in D_2'$ comme un élément de $H^2(S_1, \mathbb{R})^-$, orthogonal à P. Soit Q_η l'espace de dimension 3 complexe engendré par P et η. Ecrivons enfin $\eta = \varepsilon\chi$ avec $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, et $\chi^2 = 1$ (Lemme 2.15); Le Lemme suivant est évident:

2.16 Lemme: Pour $\varepsilon \neq 0$ fixé, il existe un unique couple (λ, μ) de complexes tels que $\lambda^2 - \mu^2 + 1 = 0$ et $i(\lambda - \mu) = \varepsilon$.

Posant alors $\omega = \lambda\alpha' + \mu\beta' + \chi$, on note que le point projectif défini par ω dans $\mathbf{P}(Q_\eta)$ ne dépend pas du choix de χ, et satisfait $\omega^2 = 0$, et $\omega\overline{\omega} > 0$, par le Lemme 2.13. On a donc construit $M_1^{-1} : D_2' \to D_1$.

Echangeant S_1 et S_2, on dispose de $M_2 : D_2 \to D_1'$ et $M_2^{-1} : D_1' \to D_2$. Le couple $\left(M_1, M_2^{-1}\right) : D_1 \times D_1' \to D_2' \times D_2$ fournit une application "miroir" holomorphe et bijective. Ces résultats se résument de la façon suivante:

Théorème: Soit S_1 une surface $K3$ munie d'une involution i_1 telle que $H(i_1)$ agit par (-1) sur $H^{2,0}(S_1)$. Supposons que les invariants (N_1, N_1', δ) associés satisfont $N_1' > 0$ et $(N_1, N_1', \delta_1) \neq (5, 1, 0)$. Fixons un plan P hyperbolique dans $H^2(S_1, \mathbf{Z})^-$. Alors il existe un miroir $\left(H^2(S_2, \mathbf{Z}), H(i_2)\right)$ topologique de $\left(H^2(S_1, \mathbf{Z}), H(i_1)\right)$, qui ne dépend pas du choix de P, et satisfait $N_2 = N_1', N_2' = N_1, \delta_2 = \delta_1$, et un isomorphisme de domaines de périodes marquées: $\left(M_1, M_2^{-1}\right) : D_1 \times D_1' \to D_2' \times D_2$ (qui dépend de P).

2.18 Remarques:

a) Une direction possible d'investigations sur la structure de l'application miroir serait l'analyse de la compatibilité avec l'action des groupes orthogonaux, de manière à supprimer autant que possible le marquage.

b) Il y a évidemment d'autres choix possibles pour M_1: pour tout réel $\lambda \neq 0$, on pourrait aussi bien définir $M_1^\lambda(w) = \lambda M_1(w)$. Peut-être l'étude de a) fournirait elle des raisons pour privilégier l'une de ces applications.

c) Comme noté en 2.1.2 il existe un ouvert U_1' de D_1, avec $U_1 \subset U_1' \subset D_1$ (où U_1 est défini en 2.1.1) sur lequel la structure complexe sur S_1 paramétrée par $t \in U_1'$ est effectivement compatible avec une involution i_1 sur S_1, agissant comme $H(i_1)$ sur $H^2(S_1, \mathbf{Z})$. Il serait intéressant de décrire précisément U_1' et son image $M_1(U_1') \subset D_2'$ pour comprendre le domaine de définition de l'application miroir géométrique (0.3, 2.2.1); il y a en effet une incertitude sur le domaine de définition de la forme α de 0.2, pour laquelle le miroir (X', α')

serait défini; la condition "$\mathrm{Re}\,\alpha$ Kähler" est probablement trop contraignante; cependant la condition $(\mathrm{Re}\,\eta)^2 > 0$ de 2.8 est trop faible.

(Cette dernière remarque suppose la lecture des numéros suivants, où l'on contruit à l'aide de 2.17 la "mirror symmetry" pour les variétés X de la section 1).

2.19. On revient maintenant aux variétés de Calabi–Yau $X_1 = \widetilde{E_1 \times S_1} / \left(\widetilde{j_1, i_1}\right)$ construites dans la section 1. On suppose que le miroir topologique de (S_1, i_1) existe. On supposera donné un marquage de

2.19.1 $$H^3(X_1, \mathbb{Z}) \subset \bigoplus_{(r,s)} H^1(C_s, \mathbb{Z}) \oplus H^1(E_1) \oplus H^2(S_1, \mathbb{Z})^-,$$

incluant un marquage de chacun des termes intervenant dans cette décomposition. L'inclusion de 2.19.1 induit le $\mathbb{Q}$ isomorphisme de 1.5 : $H^3(X, \mathbb{Q}) \simeq H^3(\widetilde{E \times S}, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}}$. De même on se donne un marquage de

$$H^2(X_1, \mathbb{Z}) \subset H^2(E_1, \mathbb{Z}) \oplus H^2(S_1, \mathbb{Z})^+ \bigoplus_{(r,s)} \langle D_{r,s} \rangle .$$

2.20. L'application miroir a été construite explicitement pour les courbes elliptiques (cf. [10], [2]). Cette application que nous noterons $\left(m_1, m_2^{-1}\right)$ pour la distinguer de la précédente, est l'involution sur l'espace paramétrant la donnée d'une courbe elliptique $E \simeq \mathbb{C}/\Gamma$, où $\Gamma = \langle e_1, e_2 \rangle$ est un réseau d'orientation positive dans $\mathbb{C}$, et d'une classe de type (1,1) α_E telle que $\mathrm{Re}\left(\int_E \alpha_E\right) > 0$, simplement définie de la façon suivante: soit $e_2 = \tau e_1, \tau \in \mathbb{C}$; alors $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ et j détermine E. D'autre part soit $\lambda = \int_E \alpha_E$. Alors $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ et λ détermine α_E. On associe alors à (E_1, α_{E_1}) le couple (α_{E_2}, E_2) , où E_2 est définie par: $\tau_2 = i\lambda_1$ et α_{E_2} est définie par: $\lambda_2 = \int_E \alpha_{E_2} = -i\tau_1$. On a utilisé la notation $\left(m_1, m_2^{-1}\right)$ par analogie avec l'application M, et pour souligner le fait que l'application miroir préserve la structure de produit de l'espace considéré ci-dessus en échangeant les facteurs. Ici $m_1(\tau_1) = \lambda_2 = -i\tau_1$, et $m_2 = m_1$.

2.21. On effectue maintenant la synthèse du théorème 2.17, et de la construction 2.20.

Donnons nous une deux forme sur X_1 de la forme $\alpha_{E_1} + \alpha_{S_1}$ où $\mathrm{Re} \int_E \alpha_{E_1} > 0$ et $(\mathrm{Re}\, \alpha_{S_1})^2 > 0$ (plus précisément $\alpha_{S_1} \in M_2(U_2')$ où U_2' est définie dans la remarque 2.1.8.c). Alors via m_2^{-1} α_{E_1} détermine une courbe elliptique marquée E_2 , et via M_2^{-1} α_{S_1} détermine une surface $K3$ marquée S_2 munie d'une involution i_2 agissant comme $H(i_2)$ sur $H^2(S_2, \mathbb{Z})$ qui est marqué. De même pour une structure complexe sur X_1, on a la droite projective $H^{3,0}(X_1) \subset H^3(X_1, \mathbb{C})$ qui détermine, grâce au marquage, les droites projectives $H^{1,0}(E_1) \subset H^1(E_1, \mathbb{C})$, et $H^{2,0}(S_1) \subset H^2(S_1, \mathbb{C})^-$. Via m_1 et M_1 on alors des formes $\alpha_{E_2} \in H^1(\Omega_{E_2})$, et $\alpha_{S_2} \in H^1(\Omega_{S_2})^+$, avec $\mathrm{Re} \int_{E_2} \alpha_{E_2} > 0, (\mathrm{Re}\, \alpha_{S_2})^2 > 0$ d'où une deux forme $\alpha_{E_2} + \alpha_{S_2}$ sur X_2. On définit le miroir de $(X_1, \alpha_{E_1}, \alpha_{S_1})$ comme étant $(X_2, \alpha_{E_2}, \alpha_{S_2})$ avec $X_2 = \widetilde{E_2 \times S_2}/(j_2, i_2)$ où j_2 est l'involution $(-1)_{E_2} \simeq \mathbb{C}/\Gamma_2$.

2.22. Comme on a $N_2 = N_1'$ et $N_2' = N_1$, le lemme 1.8 montre que X_1 et X_2 satisfont $b_2(X_1) = h^{2,1}(X_2)$ et $b_2(X_2) = h^{2,1}(X_1)$. L'application miroir que l'on a construite ici est donc parfaitement conforme à la "mirror symmetry" prédite par les physiciens (0.3). On peut noter cependant que l'on n'a construit ici l'application miroir que sur un sous-espace $H_1 \times K_1$ du produit { structure complexe marque sur X_1} $\times$ { formes de type (1, 1) sur X_1 satisfaisant certaines conditions de positivité }, H_1 étant l'ensemble des structures complexes pour lesquelles X_1 est du type $\widetilde{E_1 \times S_1}/(j_1, i_1)$ et K_1 correspondant à l'ensemble des formes sur X_1 de type $\alpha_{E_1} + \alpha_{S_1}$. Cete application est à valeurs dans les sous-espace $H_2 \times K_2$ correspondant pour X_2.

2.23. Si l'on tient pour vraie la conjecture sur l'existence de la "mirror symmetry", on peut imaginer que l'on a construit ici l'application miroir des physiciens, restreinte à un sous-espace du type $H_1 \times K_1'$, mais il est possible que K_1' ne soit pas l'espace K_1 considéré ci-dessus mais par exemple un translaté de K_2 par une constante $c(X_1) \in H^1(\Omega_{X_1})$ supportée par les diviseurs exceptionnels de X_1. On propose même dans la section suivante une valeur de $c(X_1)$ qui rendrait valide les prédictions des physiciens concernant la comparaison des accouplements de Yukawa et la forme d'intersection, en prenant la limite de 0.4.1 de façon adéquate. Mais ceci est très spéculatif et il est peut-être préférable de considérer le problème suivant comme ouvert:

2.24. Problème : A quel sous-espace de $H^1(\Omega_{X_1})$, naturellement isomorphe à K_1, correspond (via le miroir des physiciens supposé égal au notre) le sous-espace de l'espace des structure complexes sur X_2 constitué des variété du type $\widetilde{E_2 \times S_2}/(j_2, i_2)$?

§3 Accouplements de Yukawa et formes d'intersection.

3.1. On se propose dans cette section de "tester" la formule 0.4.1 pour l'application miroir construite en 2.17, 2.21, au sens suivant: supposons que la formule 0.4.1 soit bien donnée par une série convergente; supposons aussi que α' satisfasse: $\mathrm{Re}\,\alpha'$ est une forme de Kähler; alors on doit pouvoir prouver que l'accouplement de Yukawa sur $X_t :=$ miroir de $(X', t\alpha')$, où t est un réel positif tendant vers $+\infty$, correctement normalisé, converge vers une forme cubique isomorphe à la forme d'intersection $v \to \int_{X'} v^3$ sur $H^1(\Omega_{X'})$. (Ce type de calcul a été aussi effectué dans [3] pour certaines variétés du type 0.5).

3.2. On travaillera avec l'hypothèse naïve 2.23. Cela signifie qu'on supposera que le miroir $(X_2, \alpha_{E_2} + \alpha_{S_2})$ de $(X_1, \alpha_{E_1} + \alpha_{S_1})$ construit en 2.21 s'identifie au miroir des physiciens $(X_2, \alpha_2) \to (X_1, \alpha_1)$, à condition de poser $\alpha_2 = \alpha_{E_2} + \alpha_{S_2} + c(X_2)$, $\alpha_1 = \alpha_{E_1} + \alpha_{S_1} + c(X_1)$ où $c(X_2) \in H^1(\Omega_{X_2})$ (resp $.c(X_1) \in H^1(\Omega_{X_1})$) est une constante supportée sur les diviseurs exceptionnels de X_2 (resp. de X_1). A ce moment là on doit avoir la variante suivante de 3.1: Supposons $\alpha_{E_2} > 0, \alpha_{S_2} > 0$; alors pour $t \in \mathbb{R}^+, t \to +\infty, e^{-\int_{\mathbb{P}^1} tf^*(\alpha_{E_2}+\alpha_{S_2})+f^*c(X_2)} \to 0$ dès que $f : \mathbb{P}^1 \to X_2$ n'est pas un revêtement d'une courbe rationnelle $\mathbb{P}^1_{r,s} \subset X_2$, fibre de l'une des applications $\tau_{r,s} : D_{r,s} \to C_{r,s}$ de 1.7. On doit donc pouvoir prouver que l'accouplement de Yukawa sur $X_{1,t} :=$ miroir de $(X_2, t(\alpha_{E_2} + \alpha_{S_2}) + c(X_2))$ converge vers une forme cubique isomorphe à la forme sur $H^1(\Omega_{X_2})$:

$$(3.2.1) \quad v \mapsto \int_{X_2} v^3 + \sum_{f_{k,r,s}:\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1_{r,s}} e^{-\int_{\mathbb{P}^1} f^*_{k,r,s}(c(X_2))} \left(\int_{\mathbb{P}^1} f^*_{k,r,s} v\right)^3 \times n(f_{k,r,s})$$

où $f_{k,r,s}$ est la composante de l'ensemble des applications holomorphes de $\mathbb{P}^1$ dans X_2 donnée par les revêtements ramifiés de degrés k de $\mathbb{P}^1_{r,s}$. Evidemment il faut pouvoir donner un sens à la somme de cette série. On peut utiliser pour cela le résultat de Aspinwall et Morrison [4], et le lemme suivant :

3.3 Lemme: Pour une déformation générique X'_2 de X_2, et pour $g(C_{2,s}) \geq 1$, les courbes rationnelles obtenues par déformation de $\mathbb{P}^1_{r,s}$ consistent en exactement $2g(C_{2,s}) - 2$ courbes rationnelles $\mathbb{P}^1 \subset X'_2$, de fibré normal $N_{\mathbb{P}^1}X'_2 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Démonstration: On reprend les notations de 1.16. X_2 est la désingularisation du revêtement double de $\mathbb{P}^1 \times T_2$, ramifié le long de la surface d'équation $A_2F_2 = 0$ où $A_2 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4))$ et $F_2 \in H^0(-2K_{T_2})$. Soit $C_2 = \bigcup_{s'} C_{2,s'}$ la courbe d'équation $F_2 = 0$ dans T_2. $C_{2,s}$ est une composante de C_2. L'application composée: $H^0(-K_{T_2}) \to H^0(\Omega_{C_2}) \to H^0(\Omega_{C_{2,s}})$ est surjective, et il existe donc $G_2 \in H^0(-K_{T_2})$, telle que pour chaque s tel que $g(C_{2,s}) \geq 1$ la restriction de G_2 à $C_{2,s}$ ait exactement $2g(C_{2,s}) - 2$ zéros. Soit $B_2 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4))$ générique. On vérifie facilement que pour $t \in \mathbb{C}$ assez petit, la surface d'équation $A_2F_2 + tB_2G_2^2$ est singulière seulement le long de $A_2 = F_2 = G_2 = 0$ avec des singularités quadratiques ordinaires de rang 3 (nœuds) aux points de $p_{2,r} \times C_{2,s} \cap \{G_2 = 0\}$ pour $g(C_{2,s}) \geq 1$, et avec des singularités quadratiques ordinaires de rang 2 le long des courbes $p_r \times C_{2,s}$, avec $g(C_{2,s}) = 0$. On pose $t = v^2$ et on considère la variété de dimension quatre W obtenue comme le revêtement double de $\mathbb{P}^1 \times T \times \Delta$ (Δ un petit disque, muni de la coordonnée v) ramifié le long de l'hypersurface d'équation $A_2F_2 + v^2B_2G_2^2$. Il n'est pas trop difficile de montrer que W admet une désingularisation $\widetilde{W}$, satisfaisant:

i) les fibres de l'application naturelle $\widetilde{W} \xrightarrow{\pi} \Delta$ donnée par la coordonnée v sont lisses;

ii) pour $v \neq 0$ $\pi^{-1}(v)$ est une désingularisation du revêtement double de $\mathbb{P}^1 \times T$ ramifié le long de la surface d'equation $A_2F_2 + v^2B_2G_2^2$, obtenue par éclatement des courbes singulières $p_r \times C_{2,s}$ avec $C_{2,s}$ rationnelle et par petite résolution des nœuds au dessus des points $p_r \times C_{2,s} \cap \{G_2 = 0\}$ pour $g(C_{2,s}) \geq 1$.

iii) $\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à X_2.

On a donc montré que dans $\pi^{-1}(v)$ les courbes $\mathbb{P}^1_{r,s}$ sont remplacées par les $2g(C_{2,s})-2$ courbes exceptionnelles de la petite résolution de W_v, pour $g(C_{2,s})\geq 1$.

3.4. Par le Lemme 3.3, et par le résultat de Morrison et Aspinwall, on peut faire alors $n(f_{k,r,s}) = 2g(C_{2,s})-2$ pour tout $k\geq 1$ et $2g(C_{2,s})\geq 1$, dans la formule 3.2.1. On admettra que ceci reste vrai pour $g(C_{2,s})=0$.

On peut alors pour les valeurs adéquates de $c(X_2)$ assurant la convergence de la série, remplacer 3.2.1 par :

3.4.2
$$\psi_2' : v \mapsto \int_{X_2} v^3 + \sum_{r,s} (2g(C_{2,s})-2)\, e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)} / \left(1-e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)}\right)\left(\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} v\right)^3$$

3.5. La forme ψ_2' est facile à décrire dans la base $\bigoplus_{(r,s)} \langle D_{2,r,s}\rangle \mathbb{Q}\oplus H^2(T_2,\mathbb{Q})\oplus H^2(E_2,\mathbb{Q})$ de $H^2(X_2,\mathbb{Q})$ compte-tenu de $0 = \int_{\mathbb{P}^1_{r,s}}\alpha = \int_{\mathbb{P}^1_{r,s}}\beta$, pour $\alpha\in H^2(T_2,\mathbb{Q})$, $\beta\in H^2(E_2,\mathbb{Q})$, et $\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}}[D_{2,r',s'}] = 0$, pour $(r',s')\neq (r,s)$, $\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}}[D_{2,r,s}] = -2$. Du Lemme 1.11, on tire immédiatement :

(3.5.1)
$$\psi_2'(d+\alpha+\beta) = \sum\nolimits_{r,s} d^3_{r,s}\left[(D_{2,r,s})^3_X - 8\,(2g(C_{2,s})-2)\, e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)} / \left(1-e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)}\right)\right] + 3(d^2\alpha)_X + 3(\alpha^2\beta)_X$$

où $d = \sum_{r,s} d_{r,s} D_{2,r,s}$.

3.6. D'après 1.11, on a $D^3_{2,r,s} = 8-8g(C_{2,s})$, et l'on voit donc que le premier terme s'annule pour $e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)} / \left(1 - e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)}\right) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $e^{-\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2)} = -1$, soit $\int_{\mathbb{P}^1_{r,s}} c(X_2) = i\pi$, ou encore: $c(X_2) = -i\pi/2 \sum_{r,s} [D_{2,r,s}]$.

Pour cette valeur de la constante $c(X_2)$ l'accouplement ψ_2' prend la forme simplifiée :

3.6.1 $\psi_2'(d + \alpha + \beta) = 3\left(d^2\alpha\right)_{X_2} + 3\left(d^2\beta\right)_{X_2}$.

Or d'après la proposition 1.17 c'est précisément la forme générale de l'accouplement de Yukawa ψ pour X_1, puisque l'on a dans la base $\bigoplus_{(r,s')} H^0\left(\Omega_{C_{1,s'}}\right) \oplus H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^- \oplus H^1\left(\Omega_{E_1}\right)$ de $H^1\left(T_{X_1}\right) : \psi\left(w + u_{S_1} + u_{E_1}\right) = 3\left(\nu'(w^2)u_{S_1}\right) + 3\int_{E_1} u_{E_1} \cdot \int_{S_1} u_{S_1}^2$, et que :

$$\operatorname{rang} \bigoplus_{(r,s)} \langle D_{2,r,s}\rangle \cdot \mathbb{C} = 4N_2 = 4N_1' = \operatorname{rang} \bigoplus_{(r,s')} \left(\Omega_{C_{1,s'}}\right)$$
$$\operatorname{rang} H^2\left(T_2, \mathbb{C}\right) = 10 + N_2 - N_2' = \operatorname{rang} H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-.$$

On continue désormais en supposant dans l'hypothèse 2.23 que $c(X_2) = -i\pi/2 \sum_{r,s} D_{2,r,s}$.

3.7. Il reste maintenant à raffiner 3.6, en montrant que les accouplements ψ_2' et ψ deviennent bien isomorphes "à la limite", c'est-à-dire lorsque la structure complexe sur X_1 dégénère, ou lorsque la forme a_{S_2} de X_2 tend vers l'infini.

On reprend d'abord les notations de §2, et on étudie la différentielle de $M_1 : D_1 \to D_2'$ (cf. 2.14), et sa compatibilité avec les formes d'intersection sur $TD_{1(\omega)} = \omega^\perp / \langle\omega\rangle$ et $TD'_{2(\eta)} = H^1\left(\Omega_{S_2}\right)^+$, où $\eta = M_1(\omega)$. On a:

3.8 Proposition: Soit $\eta = M_1(\omega)$, et pour $t \in \mathbb{R}^+$ soit $\omega_t = M_1^{-1}(t\eta)$. Alors lorsque t tend vers $+\infty$, ω_t converge vers $\alpha' - \beta'$, et convenablement multipliée, la différentielle $\left(dM_1\right)_{\omega_t}$ tend vers un isomorphisme $(a' - \beta')^\perp / \langle\alpha' - \beta'\rangle \simeq$

$H^1(\Omega_{S_2})^+$, compatible avec les formes d'intersection.

Démonstration: On reprend les notations de 2.10. 2.13. On a donc $\omega_t = \lambda'_t\alpha' + \mu'_t\beta' + \chi \in \mathbb{P}(Q_\omega) = \mathbb{P}(Q_\eta)$, et $t\eta = i(\lambda'_t - \mu'_t)\chi$, avec: $\lambda'^2_t - \mu'^2_t + 1 = 0$.

Soit $\eta = \varepsilon\chi$; on a donc: $\lambda'_t - \mu'_t = -it\varepsilon$ et $\lambda'_t + \mu'_t = \frac{1}{it\varepsilon}$, soit $\lambda'_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it\varepsilon} - it\varepsilon\right)$ et $\mu'_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it\varepsilon} + it\varepsilon\right)$. Lorsque t tend vers $+\infty$, $-\left(\frac{2}{it\varepsilon}\right)\omega_t$ converge donc vers $\alpha' - \beta'$.

On calcule maintenant la différentielle $dM_{1(\omega)} : d\omega \to d\eta$, avec $d\omega \in \omega^\perp / \langle\omega\rangle$, où $\omega^\perp$ est l'orthogonal de ω dans $H^2(S_1, \mathbb{C})^-$. On a $\lambda' = \omega\cdot\alpha', \mu' = -\omega\cdot\beta'$, et $\eta = i(\lambda' - \mu')\chi$. En différentiant ces relations, on obtient:

3.8.1 $d\omega = d\lambda'\alpha' + d\mu'\beta' + d\chi, d\lambda' = d\omega\cdot\alpha', d\mu' = -d\omega\cdot\beta'$, $d\eta = i(d\lambda' - d\mu')\chi + i(\lambda' - \mu')d\chi$; d'où:

3.8.2 $d\eta = i(d\lambda' - d\mu')\chi + i(\lambda' - \mu')(d\omega - d\lambda'\alpha' - d\mu'\beta')$. Soit $u = (\mu' + \lambda')(\alpha' + \beta') + \chi \in \omega^\perp$; alors l'espace engendré par u et $Q_\omega^\perp$, l'orthogonal de Q_ω dans $H^2(S_1, \mathbb{C})^-$, est naturellement isomorphe à $\omega^\perp/\omega$, et l'on a en appliquant 3.8.1 et 3.8.2.

3.8.3 $dM_{1(\omega)}(v) = i(\lambda' - \mu')v$ pour $v \in Q_\omega^\perp$, et

$$dM_{1(w)}(u) = i(\lambda' - \mu')u + i(u\cdot\alpha' + u\cdot\beta')\chi - i(\lambda' - \mu')$$
$$((u\cdot\alpha')\cdot\alpha' - (u\cdot\beta')\cdot\beta') = i(\lambda' - \mu')(u - ((\mu' + \lambda')\alpha' + (\mu' + \lambda')\beta').$$

Ceci fournit encore:

3.8.4 $\frac{1}{i(\lambda' - \mu')}dM_{1(w)}(v) = v$, pour $v \in Q_w^\perp$, et $\frac{1}{i(\lambda' - \mu')}dM_{1(\omega)}(u) = u - (\mu' + \lambda')(\alpha' + \beta')$.

Faisons maintenant $\eta_t = t\eta$ avec $t \to +\infty$, et soit $\omega_t = M_1^{-1}(\eta_t)$.

On a alors $\lambda'_t + \mu'_t = \frac{1}{it\varepsilon} \to 0$, $u_t \to \chi$, et par le calcul précédent $-\left(\frac{2}{it\varepsilon}\right)\omega \to \alpha' - \beta'$.

$\langle u_t, Q_\omega^\perp\rangle$ converge donc vers $\langle\chi, W_\omega^\perp\rangle$, qui est naturellement isomorphe a $\langle\alpha' - \beta'\rangle^\perp /$
$\langle\alpha' - \beta'\rangle$, par l'inclusion $\langle\chi, W_\omega^\perp\rangle \subset \langle\alpha' - \beta'\rangle^\perp$ et par 3.8.4 $\frac{1}{i(\lambda'-\mu')} dM_{1(\omega_t)}$ converge vers l'isomorphisme composé: $\langle\alpha' - \beta'\rangle^\perp / \langle\alpha' - \beta'\rangle \simeq \langle\chi, Q_\omega^\perp\rangle \simeq H^2(S_1, \mathbb{C})^- \cap P^\perp = H^2(S_2, \mathbb{C}^+) \simeq TD_2'$. Il est clair que cet isomorphisme préserve les formes d'intersection sur ces espaces, induites par celle de $H^2(S_1, \mathbb{C})^-$. La proposition 3.8 est donc montrée.

3.9. La proposition 3.8 montre que la différentielle de l'application miroir, restreinte au sous-espace $H^1(T_{E_1}) \oplus H^1(T_{S_1})^+$ de $H^1(T_{X_1})$ et à valeur dans $H^1(\Omega_{E_2}) \oplus H^1(\Omega_{S_2})^+ \subset H^1(\Omega_{X_2})$ converge, à condition de prendre la limite dans le précisé en 3.8, vers une application transformant la limite de l'accouplement de Yukawa ψ de X_1, restreinte à $H^1(T_{E_1}) \oplus H^1(T_{S_1})^+$, en l'accouplement ψ_2' de 3.6.1 sur $H^1(\Omega_{E_2}) \oplus H^1(\Omega_{S_2})^+$, lorsque α_{S_2} "tend vers l'infini".

Il reste maintenant à étudier le comportement asymptotique des accouplements de Yukawa du type $\psi(w, w, u_{S_1})$ (ici ψ est la forme trilinéaire associée à ψ, $w \in \bigoplus_{(r,s)} H^1(\Omega_{C_{1,s}})$, $u_{S_1} \in H^1(\Omega_{S_1})^-$). On ne fera pas cette étude en considérant des limites du type $\alpha_{S_2} \to t\alpha_{S_2}$, $t \in \mathbb{R}, t \to +\infty$, mais en construisant des dégénérations adéquates de S_1; pour compléter ce travail il resterait encore à montrer qu'on peut réaliser la limite 3.8 et les limites 3.10, 3.14 en même temps. De plus les propositions 3.13, 3.17, 3.19 ne donneront une confirmation du fait que ψ devient isomorphe à ψ_2' "à la limite" que dans les cas où $C_1 = \bigcup_s C_{1,s}$ n'a pas de composantes rationnelles et sous des hypothèses géométriques supplémentaires sur T_1. (cf. 3.20.1). On va d'abord étudier le comportement de l'application ν' (1.14.1) lors d'une dégénération de Lefschetz de la courbe de ramification $C_1 \subset T_1$, telle que la fibre centrale ait p nœuds imposant les conditions indépendantes à $H^0(-K_{T_1})$. On utilisera pour cela le lemme 1.15.

3.10. Soit $F_1 \in H^0(-2K_{T_1})$ définissant une courbe ayant p nœuds $q_1, \cdots, q_p$ imposant des conditions indépendantes à $H^0(-K_{T_1})$.

Soit $F_1' \in H^0(-2K_{T_1})$ telle que $F_1'(q_i) \neq 0$.

Pour t petit, la courbe C_1^t d'équation $F_1 + tF_1'$ est lisse; soit $t = v^2$, et soit $X \xrightarrow{\pi} T_1 \times \Delta$ le revêtement double de $T_1 \times \Delta$ ramifié le long de la surface d'équation $F_1 + v^2 F_1'$. X a des nœuds au dessus des points $(q_i, 0)$, et un choix de petite résolution en chacun des nœuds fournit une application lisse $\widehat{X} \xrightarrow{\widehat{\pi}} T_1 \times \Delta$. La fibre centrale $\widehat{X}_0$ est la désingularisation minimale de X_0 et admet une involution i_1^0 dont le quotient est l'éclaté de T_1 aux points q_i. On a $H^2\left(\widehat{X}_0, \mathbb{Z}\right) \simeq H^2\left(\widehat{X}_v, \mathbb{Z}\right)$ mais sous cet isomorphisme on a : $H^2\left(\widehat{X}_v, \mathbb{Q}\right)^-_{i_1} = H^2\left(\widehat{X}_0, \mathbb{Q}\right)^-_{i_1^0} \bigoplus_i [E_{q_i}]\,\mathbb{Q}$ où E_{q_i} est la courbe exceptionnelle de $\widehat{X}_0$ au dessus de q_i.

Ici i_1 est l'involution générique de $X_{1,v}$ au dessus de T_1. Sur Δ, on a le fibré vectoriel $\mathcal{H}^{1,1}$ de fibre $\mathcal{H}^{1,1}_{(v)} \simeq H^1\left(\Omega_{\widehat{X}_v}\right)$ et le sous-fibré $\mathcal{H}^{1,1^-}$ défini sur Δ^* par $\mathcal{H}^{1,1^-}_{(v)} = \mathcal{H}^1\left(\Omega_{\widehat{X}_v}\right)^-_{i_1}$ se prolonge naturellement en $\mathcal{H}^{1,1^-} \subset \mathcal{H}^{1,1}$ tel que $\mathcal{H}^{1,1^-}_{(0)} \simeq H^1\left(\Omega_{\widehat{X}_0}\right)^-_{i_0} \oplus \bigoplus_i [E_{q_i}]\,\mathbb{C}$, où $[E_{q_i}]$ est la classe de E_{q_i} vue comme un élément de $H^1\left(\Omega_{\widehat{X}_0}\right)$.

Soit $(\omega_v)_{v \in \Delta}$ une section partout non nulle du fibré $\mathcal{H}^{2,0}$ sur Δ de fibre $\mathcal{H}^{2,0}_{(v)} = H^0\left(\Omega^2_{\widehat{X}_v}\right)$. Pour $P \in (-2K_T)$, on définit une section φ_P de $\mathcal{H}^{1,1^-}$ sur Δ^* par $\varphi_P(v) = \nu_v'(P)$, où ν_v' est l'application ν' de 1.14.1, pour la courbe d'équation $F_1 + v^2 F_1'$, et pour $\omega = \omega_v$. Par le lemme 1.15, $\varphi_P(v)$ est la projection dans $H^1\left(\Omega_{\widehat{X}_v}\right)^-_X$ de la classe de la forme méromorphe $P\omega_v / \left(F_1 + v^2 F_1'\right)$ sur $\widehat{X}_v$. On a le lemme suivant:

3.11 Lemme: i) Si P s'annule en $q_i, \forall i \in \{1, \cdots, p\}, \varphi_P$ se prolonge holomorphiquement en 0.

ii) De plus si P s'annule doublement en q_i, $\varphi_P(0) \in H^1\left(\Omega_{\widehat{X}_0}\right)^-_{i_0}$, et $\varphi_P(0) = \nu_0'(P)$, où ν_0' est l'application ν' de 1.14.1, pour la courbe normalisée $\mathcal{C}_1^0 \subset \widehat{X_0}$, qui est la courbe de ramification du revêtement double $\widehat{X_0} \to \widehat{T_1}$, et pour la deux forme w_0. ($P_{|C_1^0}$ est alors considéré comme une section de $\Omega_{C_1^0}^{\otimes 2}$).

iii) en général $v\varphi_P$ se prolonge holomorphiquement en 0, et il existe un isomorphisme naturel $\oplus\,\mathrm{res}_{q_i} : \oplus H^0\left(\mathcal{O}_{q_i}(-2K_T)\right) \simeq \oplus H^0\left(\mathcal{O}_{q_i}\right)$ tel que $v\varphi_P(0) = \sum_i \mathrm{res}_{q_i}\left(P_{|q_i}\right)[E_{q_i}]$.

Démonstration: Au voisinage de q_i, on pose $f_1 = F_1/F_1'$. On peut trouver des coordonnées locales x, y pour T_1, telles que $f_1 = -(x^2+y^2)$. Alors, au voisinage de $(q_i, 0), X$ est décrit par l'équation $u^2 = -(x^2+y^2)+v^2$, dans des coordonnées (u, x, y, v) paramétrant un ouvert de $\mathbb{C}^4$ centré en 0. La famille de formes méromorphes $p\omega_v/\left(F_1 + v^2F_1'\right)$ fournit une famille continue de deux-formes fermées sur les ouverts $X\backslash B \cap X_v$, où B est un voisinage dans X de la surface de ramification $\bigcup_1 C_1^v$. Donc si $(\gamma_v)_{v\in\Delta}$ est une famille continue de classes d'homologie supportées en dehors de $B\cap X_v$, $\int_{\gamma_v} P\omega_v/\left(F_1+v^2F_1'\right)$ se prolonge continûment en 0, et $\int_{\gamma_v} vP\omega_v/\left(F_1+v^2F_1'\right)$ tend vers 0 avec v.

D'autre part, $H_2\left(X_v, \mathbb{Z}\right)^-$ est engendré par les classes supportées sur $X_v\backslash B \cap X_v$ (pour B petit) et les classes des sphères évanescentes $S^2_{q_i}(v)$, décrites dans les coordonnées (u, x, y, v) par: $u = vu_0, x = vx_0, y = vy_0$, avec u_0, x_0, y_0 réels et $u_0^2 + x_0^2 + y_0^2 = 1$. La limite de $S^2_{q_i}(v)$ est égale à la classe de E_{q_i} dans $H^2(\widehat{X}_0, \mathbb{Z})$. $S^2_{q_i}(v)$ est aussi homologue au contour suivant: on remplace $S^2_{q_i}(v)$ par la réunion $T_{q_i}(v)$ de $S^2_{q_i}(v) \cap |u_0| \geq \frac{1}{2}$ et de l'ensemble $\{(u, x, y, v)/u = (v/2)e^{i\theta'}, x = ve^{i\theta}x_1, x_1$ réel, $y = ve^{i\theta}y_1, y_1$ réel avec $\theta, \theta' \in [0, \pi]$ et $e^{2i\theta}\left(x_1^2+y_1^2\right) = 1 - \frac{1}{4}e^{2i\theta'}\}$, qui est une partie d'un fibré en cercle au dessus du cercle évanescent de C_1^v, décrit par: $u = 0,\ x = vx_1,\ y = vy_1, x_1,\ y_1$ réels, et $x_1^2 + y_1^2 = 1$. $T_{q_i}(v)$ est construit pour éviter l'ensemble $\{u = 0\}$. On vérifie facilement que, au voisinage de q_i, on a $\omega_v = \varphi\frac{dx\wedge dy}{v}$ où φ est une fonction non nulle. Il reste à montrer:

3.11.1 i) si $\psi(x, y)$ s'annule en 0, $\displaystyle\int_{T_{q_i(v)}} \frac{\psi dx\wedge dy}{u^3}$ a une limite finie quand v tend vers 0, nulle si ψ s'annule à l'ordre 2.

ii) si $\psi(0) \neq 0$, $\displaystyle\int_{T_{q_i(v)}} \frac{v\psi dx\wedge dy}{u^3}$ a une limite finie non nulle lorsque v

tend vers 0.

3.11.2 i) peut se montrer en supposant que ψ est homogène de degré 1 ou 2 en x et y. Comme les $T_{q_i(v)}$ sont isomorphes par la multiplication par v, on voit immédiatement que dans le premier cas $\int_{T_{q_i(v)}} \frac{\psi dx\wedge dy}{u^3}$ est constant, tandis que dans le second cas $\frac{1}{v}\int_{T_{q_i(v)}} \frac{\psi dx\wedge dy}{u^3}$ est constant.

Pour 3.11.1 ii), on suppose $\psi = 1$, alors $v\displaystyle\int_{T_{q_i(v)}} \frac{\psi dx\wedge dy}{u^3}$ est constant.

Pour voir que $v\displaystyle\int_{T_{q_i(v)}} \frac{dx\wedge dy}{u^3}$ est non nul, on se place dans le quadrique projective de dimension deux Q d'équation $U^2+X^2+Y^2 = V^2$ dans $\mathbb{P}^3$ de coordonnées homogènes (U,X,Y,V): elle contient la quadrique affine $u^2+x^2+y^2 = 1$ et on vérifie que $\frac{dx\wedge dy}{u^3}$ engendre $H^1(\Omega_Q)^{\mathrm{prim}}$, ce qui se montre par la construction 1.15 appliqué au revêtement double $Q \to \mathbb{P}^2, (U,X,Y,V) \to (X,Y,V)$, tandis qu'il est bien connu que $S^2(1)$, donc $T(1)$ engendre $H_2(Q,\mathbb{Z})^{\mathrm{prim}}$.

Le Lemme 3.11 résulte de 3.11.1 de la façon suivante:

i) si P s'annule en zéro $\displaystyle\int_{\gamma_v} P\omega_v/\left(F_1+v^2F_1'\right)$ a une limite finie pour γ_v supportée dans $X_v\backslash B\cap X_v$, et aussi pour $\gamma_v = T_{q_i}(v)$; donc φ_P se prolonge holomorphiquement en zéro.

ii) si P s'annule doublement en zéro, on a $\displaystyle\lim_{v\to 0}\int_{T_{q_i(v)}} P\omega_v/\left(F_1+v^2F_1'\right) = 0 = \int_{E_{q_i}} \varphi_P(0)$, tandis que par la définition de ν_0', (cf 1.15) on a $\displaystyle\lim_{v\to 0}$ $\int_{\gamma_v} P\omega_v/\left(F_1+v^2F_1'\right) = \int_{\gamma_0}\varphi_P(0) = \int_{\gamma_0}\nu_0'(P)$ pour $(\gamma_v)_{v\in\Delta}$ une famille continue de classes d'homologie supportées dans $X_v\backslash B\cap X_v$. Comme $\int_{E_{q_i}}\nu_0'(P) = 0$, on a donc $\varphi_P(0) = \nu_0'(P)$.

iii) l'isomorphisme $\oplus\,\mathrm{Res}_{q_i}$ est fourni par 3.11.1 ii) $P_{|q_i} \mapsto -\frac{1}{2}\left(P/F_1'(q_i)\times v\int_{T_{q_i(v)}}\frac{dx\wedge dy}{u^3}\right)$. On a alors $\int_{E_{q_i}}\varphi_P(0) = -2\,\mathrm{Res}_{q_i}(P), \int_\gamma v\varphi_P = 0$ pour γ supportée dans $X_0\backslash B\cap X_0$. Ce qui montre 3.11. iii).

3.12. On travaille encore avec les hypothèses et les notations de 3.10. On note $\Delta_w (resp\Delta_v)$ le disque de coordonnées w(resp.v); soit $\rho = \Delta_w \to \Delta_v$ le revêtement double donné par $v = w^2$. Sur Δ_v on a la famille de courbes $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\pi} \Delta_v$ de fibre C_1^v. On a aussi les fibrés $\mathcal{F} = R^0\pi_*(k^*(-2K_{T_1}))$, où $k : \mathcal{C}_1 \to T_1$ est l'application naturelle, et $\mathcal{H}^{1,1^-}$. Notons $\mathcal{F}'$ le fibré vectoriel sur Δ_v, défini comme le noyau de l'application d'évaluation composée de $\mathcal{F} \to H^0\left(-2K_{T_1|C_1^0}\right)$ et de $H^0\left(-2K_{T_1|C_1^0}\right) \to \bigoplus_i (\mathcal{O}_{q_i}(-2K_{T_1}))$. D'après 3.11, l'application $\nu' = (\nu'_v)_{v\in\Delta^*}$ se prolonge en une application que l'on notera encore $\nu' : \mathcal{F}' \to \mathcal{H}^{1,1^-}$. On en déduit donc aussi une application $\nu' : \rho^*\mathcal{F}' \to (\mathcal{H}^{1,1^-})$. Considérons maintenant sur Δ_w la famille $\rho^*\mathcal{C}^1 \xrightarrow{\pi^w} \Delta_w$, et soit $\mathcal{G}$ le fibré vectoriel $R^0\pi_*^w(k^{w*}(-K_T))$, où $k^w = k \circ \rho : \rho^*\mathcal{C}^1 \to T_1$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-fibré de $\mathcal{G}$ défini comme le noyau de l'application d'évaluation, composée de $\mathcal{G} \to H^0\left(-K_{T_1|C_1^0}\right)$ et de $H^0\left(-K_{T_1|C_1^0}\right) \to \bigoplus_i H^0(\mathcal{O}_{q_i}(-K_{T_1}))$. L'application naturelle donnée par le produit: $\mu : S^2\mathcal{G} \to \rho^*\mathcal{F}$ induit alors une application: $\mu' : S^2\mathcal{G}' \to \rho^*\mathcal{F}'$, et l'on a une application composée $\mu'' = \nu' \circ \mu' : S^2\mathcal{G}' \to \rho^*\mathcal{H}^{1,1^-}$. Pour $w \neq 0$, d'après 1.14, on a pour $\eta, \gamma \in \mathcal{G}'_w \simeq H^0\left(\Omega_{p_r \times C_1^w}\right)$ et $\alpha \in \mathcal{H}^{1,1^-}_{(w)} \simeq H^1(\Omega_{X_w})^-$ l'égalité: $\psi_w(\eta,\gamma,\alpha) = \mu''(\eta\otimes\gamma)\cdot_{X_w}\alpha$, où ψ_w est la forme trilinéaire associée à l'accouplement de Yukawa sur $X_{1,w} := E_1 \widetilde{\times X_w}/\left(\widetilde{j_1, i_1}\right)$.

Les accouplements $\mu''_0(\eta_0\otimes\gamma_0)\cdot_{\widetilde{X}_w}\alpha_0$, pour $\eta_0, \gamma_0 \in \mathcal{G}'_0$ et $\alpha_0 \in H^1\left(\Omega_{\widetilde{X}_0}\right) \oplus \Sigma\langle E_{q_i}\rangle \cdot \mathbb{C}$ décrivent donc une limite des accouplements ψ_w.

Cette limite est complètement décrite dans la proposition suivante:

3.13 Proposition. $\mathcal{G}'_0$ est isomorphe à la somme directe $\mathcal{G}''_0 \oplus \sum_i \mathbb{C}_{q_i}$, où $\mathcal{G}''_0 \simeq \operatorname{Ker} H^0\left(-K_{T|C_1^0}\right) \to \bigoplus_i \left(-K_{T|q_i}\right)$ et pour $\eta_0 = \eta''_0 + \sum_i \alpha_{q_i} \in \mathcal{G}'_0$, où $\eta''_0 \in \mathcal{G}''_0$ et $\alpha_{q_i} \in \mathbb{C}$, on a

$$\mu''_0\left(\eta_0^{\otimes 2}\right) = \nu'_0\left(\eta_0^{''\otimes 2}\right) + \sum_i \alpha_{q_i}^2 \cdot E_{q_i}.$$

Démonstration. Choisissons des éléments $f_i \in H^0(-K_{T_1})$ tels que $f_i(q_i) \neq 0, f_i(q_j) = 0$, pour $i \neq j$. Alors $\mathcal{G}'$ admet une base de sections holomorphes donnée par $w \cdot f_i$ pour $i = 1, \cdots, p$ et $1 \times g$ pour $g \in \mathcal{G}_0''$ (on considère $\mathcal{G}'$ comme un sous-fibré du fibré trivial $H^0(-K_{T_1}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_w})$. $\mathcal{G}_0''$ et $(w \cdot f_i)_0$ donnent une base de $\mathcal{G}_0'$. Pour $g \in \mathcal{G}_0'', g^2$ s'annule doublement en q_i, $\forall i$, et donc $\mu_0''(g^2) = \nu_0'(g^2)$ par 3.11. ii). Pour $g \in \mathcal{G}_0'', i = 1 \cdots p, gf_i$ s'annule en $q_j, \forall j$, et donc par 3.11.i, $\lim_{w \to 0} \nu_w'(wg \cdot f_i) = 0$, soit $\mu_0''(g \cdot (wf_i)_0) = 0$.

De même, si $i \neq j$, $f_i f_j$ s'annule en $q_k, \forall k$, et donc $\lim_{w \to 0} \nu_w'(vf_i \cdot f_j) = 0$, soit $\mu_0''((wf_i)_0 (wf_j)_0) = 0$. Enfin on a pour $i = 1, \cdots, p$, $\mu_0''\left((wf_i)_0^{\otimes 2}\right) = \lim_{w \to 0} v\nu'(f_i^2) = \mathrm{Res}_{q_i}(f_i^2) \cdot E_i$ par 3.11.iii, ce qui montre 3.13, à condition de choisir de façon adéquate l'isomorphisme $\bigoplus_i (wf_i)_0 \cdot \mathbb{C} \simeq \bigoplus_i (wf_i)\, \mathbb{C}_{q_i}$.

3.14. On va maintenant considérer un type complètement différent de dégénérations de S_1. On suppose dans ce qui suit que la courbe C_1 de ramification de $\varphi : S_1 \to T_1$ n'a que des composantes elliptiques. C_1 peut avoir une ou deux composantes dans ce cas, d'après 1.1.1, et dans la suite "cas i" et cas ii, signifient que la première, ou la seconde de ces conditions respectivement, est satisfaite.

Dans le cas i), $h^0(-K_{T_1}) = 1$ et le diviseur de l'unique section σ de $-K_{T_1}$ est une courbe elliptique connexe, qu'on supposera lisse. Dans le cas ii), $h^0(-K_{T_1}) = 2$, et le diviseur d'une section générique σ de $-K_{T_1}$ est une courbe elliptique connexe et lisse, puisqu'en particulier chaque composante de C_1 appartient à $|-K_{T_1}|$. Dans les deux cas on choisit σ telle que $V(\sigma) =: E_\sigma$ est lisse elliptique connexe et ne rencontre pas C_1. Soit $F_1 \in H^0(-2K_{T_1})$ une équation pour C_1. Soit Δ un disque de coordonnée t. La surface $\mathcal{C}$ d'équation $\sigma^2 + tF_1$ dans $T_1 \times \Delta$ est lisse. Soit $\varphi : X \to T_1 \times \Delta$ le revêtement double ramifié le long de $\mathcal{C}$. X est lisse, $\pi : X \to \Delta$ est lisse au dessus de Δ^*, pour Δ petit et ses fibres sont des surfaces $S_1^t \to T_1$ comme ci-dessus. Pour $t = 0$, X_0 est la surface à croisements normaux obtenue en récoltant deux copies de T_1 le long de E_σ. Sur X_0 l'involution de X agit en inversant les deux composantes de X_0.

Pour $t \neq 0$, on reprend la notation $\nu_t' : H^0\left(-2K_{T_1|C_1^t}\right) \to H^1\left(\Omega_{S_1^t}\right)$ de 1.14; la proposition suivante décrit le comportement asymptotique de $(\nu_t')_{t\in\Delta^*}$.

3.15 Proposition:

i) Le fibré $\mathcal{H}_*^{1,1}$ sur Δ^*, de fibre $\mathcal{H}_{*t}^{1,1} \simeq H^1\left(\Omega_{S_1^t}\right)$ s'étend en un fibré $\mathcal{H}^{1,1}$ sur Δ, tel que l'involution $(i_1^t)_{t\in\Delta^*}$ sur $\mathcal{H}^{1,1}$ s'étende en une involution i_1 sur $\mathcal{H}^{1,1}$, et que la forme d'intersection $\langle i_1^t\rangle_t$ non dégénérée, donnée par la dualité de Serre sur $\mathcal{H}_t^{1,1} \simeq H^1\left(\Omega_{S_1^t}\right)$, s'étende en une forme d'intersection non dégénérée sur $\mathcal{H}_0^{1,1}$, et $\mathcal{H}_0^{1,1^-}$, qu'on notera $\langle\ \rangle_0$.

ii) Pour $P(t)$ une section holomorphe de $H^0(-2K_{T_1}) \otimes \mathcal{O}_\Delta$, telle que $P(0) \neq 0$ soit un multiple non nul de $\sigma^2, \nu_t'(P(t)) \in \mathcal{H}_t^{1,1^-}$ s'étend en une section holomorphe de $\mathcal{H}^{1,1^-}$, et $\nu_0'(P(0))$ satisfait: $\langle\nu_0'(P(0)), \nu_0'(P(0))\rangle_0 = 0, \nu_0'(P(0)) \neq 0$.

Démonstration: (cf. [28]) On considère sur X le fibré vectoriel de rang 2 $\Omega_{X/\Delta}(\operatorname{Log} X_0) := \Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*(\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))$; En coordonnées locales X est décrit par $u^2 = \sigma^2 + t$, où σ est une coordonnée sur T_1, u une coordonnée sur X: posant $x = u - \sigma, y = u + \sigma$ on a donc $xy = t$. $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)$ est engendré localement par $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}$ et dz, où z est une coordonnée supplémentaire sur T_1, tandis que $\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)$ est engendré par $\frac{dt}{t}$. Donc $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)$ est engendré par $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, dz$, avec la relation $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$. Pour $t \neq 0$, on a $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|X_t} \simeq \Omega_{S_1^t}$, et sur Δ^* on a $\mathcal{H}^{1,1} \simeq R^1\pi_*(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))$. On vérifie facilement que sur $X_0 \simeq T_1^1 U_{E_\sigma} T_1^2$ on a: $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|T_1^1} \simeq \Omega_{T_1^1}(\operatorname{Log} E_\sigma)$ et $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|T_1^2} \simeq \Omega_{T_1^2}(\operatorname{Log} E_\sigma)$. On a donc une suite exacte:

3.15.1
$$\begin{aligned}&0 \to (\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))_{|X_0}\\ &\to \Omega_{T_1^1}(\operatorname{Log} E_\sigma) \oplus \Omega_{T_1^2}(\operatorname{Log} E_\sigma) \to \Omega_{T_1}(\operatorname{Log} E_\sigma)_{|E_\sigma} \to 0.\end{aligned}$$

Comme $H^0\left(\Omega_{T_1^1}(\operatorname{Log} E_\sigma)\right) = 0$, on en déduit

$$H^0(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))_{|X_0} = 0.$$

Comme le faisceau dualisant de X_0 est trivial et que le déterminant de $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)$ est également trivial on a aussi

$$H^2\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|X_0} = 0$$

donc $H^1\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|X_t}$ est constant et

$$\mathcal{H}^{1,1} := R^1\pi_*\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)$$

est localement libre et fournit l'extension cherchée de $\mathcal{H}_*^{1,1}$. Clairement l'involution i agissant sur X au-dessus $T_1 \times \Delta$ agit sur

$$\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)$$

et donc aussi sur $\mathcal{H}^{1,1}$.

Finalement, comme le fibré dualisant relatif de X/Δ est trivial, et que $R^1\pi_*\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)$ est libre de fibre $\mathcal{H}_{t*}^{1,1} = H^1\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|X_t}\right), \forall t \in \Delta$, la dualité de Serre relative fournit $\mathcal{H}^{1,1} \simeq \left(\mathcal{H}^{1,1}\right)^\vee$. Ceci montre i), avec l'information supplémentaire suivante:

3.15.2: $\mathcal{H}_0^{1,1} = H^1\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|X_0}\right)$

Pour montrer ii) on utilise la description suivante de ν_t' (cf. preuve de 1.15). Soit $C_1^t \subset S_1^t$ la courbe de ramification du revêtement double $S_1^t \to T_1$. En utilisant l'application i_1^t qui agit sur $\Omega_{S_1|C_1^t}^t$, on obtient une décomposition canonique:

3.15.3: $\Omega_{S_1|C_1^t}^t \simeq \Omega_{C_1^t} \oplus \left(N_{C_1}^t\right)^\vee \simeq -K_{T_1|C_1^t} \oplus K_{T_1|C_1^t}$. Ceci fournit une inclusion naturelle: $H^0\left(-2K_{T_1|C_1^t}\right) \to H^0\left(\Omega_{S_1^t}(-K_{T_1})_{|C_1^t}\right)$ qui composée avec le cobord
$\partial : H^0\left(\Omega_{S_1^t}(-K_{T_1})_{|C_1^t}\right) \to H^1\left(\Omega_{S_1^t}\right)$ associée à la suite exacte: $0 \to \Omega_{S_1^t} \to \Omega_{S_1^t}(-K_{T_1}) \to \Omega_{S_1^t}(-K_{T_1})_{|C_1^t} \to 0$ fournit ν_t'.

Pour mettre cette construction en famille, on considère dans X la surface d'équation $u = 0$, lieu de ramification de $\varphi : X \to T_1 \times \Delta$. Cette surface est clairement isomorphe à un voisinage de E_σ dans T_1. L'involution i de X agit sur $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|\{u=0\}}$ ce qui fournit une décomposition:

3.15.4 $\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|\{u=0\}} \simeq L_1 \oplus L_2$ où L_1 et L_2 sont des fibrés en droites sur $\{u = 0\}$. Par restriction à la courbe C_1^t d'équations $u = 0$, $\sigma^2 + tF_1 = 0$, 3.15.4 induit 3.15.3. Cependant on vérifie facilement que $L_1 \simeq \mathcal{O}_{T_1}, L_2 \simeq \mathcal{O}_{T_2}$, (et non pas $L_1 \simeq -K_{T_1}, L_2 \simeq K_{T_1}$), de sorte que la restriction de 3.15.4 à C_1^t ne fournit 3.15.3 que modulo l'isomorphisme $\mathcal{O}_{C_1^t} \simeq -K_{T_1|C_1^t}$ fourni par $\sigma \in H^0(-K_{T_1})$.

3.15.5 Considérons la courbe $E_\sigma^{(2)} \subset \{u = 0\}$ définie par $\sigma^2 = 0$. On peut aussi l'identifier à un diviseur de X_0, faisant partie du système linéaire $|-K_{T_1}|$ sur X_0, puisqu'elle est décrite par l'équation $u = 0$ dans X_0. Alors 3.15.4, restreint à $E_\sigma^{(2)}$, fournit:

$$\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|E_\sigma^{(2)}} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}, \text{ d'où une application:}$$

$$j_0 : H^0\left((-K_{T_1})_{|E_\sigma^{(2)}}\right) \to H^0\left((\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1}))_{|E_\sigma^{(2)}}\right)$$

donnée par l'inclusion du premier facteur; finalement la suite exacte:

$$\begin{gathered} 0 \to (\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))_{|X_0} \\ \xrightarrow{u} (\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1}))_{|X_0} \to \\ (\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1}))_{|E_\sigma^{(2)}} \to 0 \end{gathered}$$

fournit :

$$\begin{aligned} \partial_0 : H^0\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1})_{|E_\sigma^{(2)}}\right) \to \\ \to H^1\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1})_{|X_0}\right) \end{aligned}$$

d'où finalement une flèche

$$\nu_0' = \partial_0 \circ j_0 : H^0\left(-K_{T_1|E_\sigma^{(2)}}\right) \to H^1\left((\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0))_{|X_0}\right)$$

qui par ce qui précède est la limite des flèches :

$$\nu_t' \circ \sigma : H^0\left(-K_{T_1|C_1^t}\right) \xrightarrow{\sigma} H^0\left(-2K_{T_1|C_1^t}\right) \xrightarrow{\nu_t'} H^1\left(\Omega_{S_1^t}\right).$$

3.15.6. On termine la preuve de 3.15. ii)

Soit $P(t) = \alpha\sigma^2 + tQ(t)$ une section de $H^0(-2K_{T_1}) \otimes \mathcal{O}_\Delta$. Alors $\frac{1}{\sigma}P(t)_{|C_1^t}$ converge vers $\alpha\sigma \in H^0\left(-K_{T_1|E_\sigma^{(2)}}\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0} \nu_t'\left(P(t)_{|C_1^t}\right) = \nu_0'(\alpha\sigma)$.

Notons que $\alpha\sigma \in \operatorname{Ker}\left(-K_{T_1|E_\sigma^{(2)}}\right) \to H^0\left(-K_{T_1|E_\sigma}\right)$ donc

$$j_0(\alpha\sigma) \in \Big[\operatorname{Ker} H^0\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1})\right)_{|E_\sigma^{(2)}}\right) \to$$
$$H^0\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1})\right)_{|E_\sigma}\right)\Big] \simeq$$
$$H^0\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)(-K_{T_1})\right)_{|E_\sigma}\right).$$

Notons $j_0'(\alpha\sigma) \in H^0\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|E_\sigma}\right)$ l'image de $j_0(\alpha\sigma)$ par cet isomorphisme. Considérons la suite exacte: (cf 3.15.1)

3.15.7
$$0 \to \left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)_{|X_0}\right) \to$$
$$\Omega_{T_1^1}(\operatorname{Log} E_\sigma) \oplus \Omega_{T_1^2}(\operatorname{Log} E_\sigma) \to \left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|E_\sigma} \to 0.$$

Elle donne
$$\partial_0' : H^0\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|E_\sigma}\right) \to$$
$$H^1\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|X_0}\right)$$

et il immédiat de montrer que :

$$\partial_0 \circ j_0(\alpha\sigma) = \partial_0'(j_0'(\alpha\sigma))$$

dans

$$H^1\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|X_0}\right).$$

On a donc: $\lim\limits_{t\to 0} \nu_t'\left(P(t)_{|C_1^t}\right) = \partial_0'(j_0'(\alpha\sigma))$. Comme il résulte de 3.15.7 que ∂_0' est injective, on a $\delta_0'(j_0'(\alpha\sigma)) \neq 0$, pour $\alpha \neq 0$. Enfin il est facile de vérifier que $\delta_0'(j_0'(\alpha\sigma))$ est de self intersection 0 dans $H^1\left(\left(\Omega_X(\operatorname{Log} X_0)/\pi^*\Omega_\Delta(\operatorname{Log} 0)\right)_{|X_0}\right)$ pour $\langle\ \rangle_0$ donnée par la dualité de Serre. Donc 3.15 (ii) est prouvé.

3.16. On utilise maintenant la proposition 1.17 et la proposition 3.15 pour étudier la limite des accouplements de Yukawa sur $X_1^t := E_1 \times S_1^t / (j_1, i_1^t)$, du type $\psi(w, \eta, \gamma)$ pour $w \in H^1\left(\Omega_{S_1}^t\right), \eta, \gamma \in \bigoplus_r H^0\left(\Omega_{p_r \times C_1^t}\right)$, lorsque S_1^t dégénère comme en 3.14. On considère d'abord le cas i). On a d'abord en reprenant les notations précédentes, la conséquence immédiate suivante de 1.17 et 3.15.

3.17. Proposition:

(Cas i) Soit $(w_t)_{t\in\Delta}$ une section holomorphe de $\mathcal{H}^{1,1^-}$ sur Δ. Soit σ le générateur de $H^0(-K_{T_1})$: alors $\sigma_{|C_1^t}$ est un générateur de $H^0\left(\Omega_{C_1^t}\right) \simeq \left(-K_{T_1|C_1^t}\right)$, pour $t \neq 0$, et donc $\alpha = (\alpha_{p_1}\sigma, \cdots, \alpha_{p_4}\sigma)$, pour $\alpha_{p_r} \in \mathbb{C}$ peut être considéré comme un élément de $\bigoplus_r H^0\left(\Omega_{p_r \times C_1^t}\right)$ pour $t \neq 0$. On a alors $\lim\limits_{t\to 0} \psi(w_t, \alpha, \alpha) = \sum_r \alpha_r^2 \left\langle w_0, \nu_0'(\sigma^2)\right\rangle_0$ où $w_0 \in H_0^{1,1}$, $\nu_0'(\sigma^2) \in \mathcal{H}_0^{1,1}$ est défini en 3.15. ii, et est non nul de self intersection 0.

3.18. Le cas ii) est un peu plus compliqué: les courbes C_1^t ont alors deux composantes, et il est naturel si l'on veut obtenir une limite correcte de l'accouplement de Yukawa de x_1^t, de les ordonner en passant à un revêtement double de Δ, c'est-à-dire à un disque Δ_w, muni de $\rho : \Delta_w \to \Delta$ donnée par $t = w^2$. Alors l'équation $\sigma^2 + tF_1$ peut s'écrire sous la forme $(\sigma + w\varphi_1(w))(\sigma + w\varphi_2(w))$ où $\varphi_2(w), \varphi_1(w) \in H^0(-K_{T_1})$ sont holomorphes en w. $C_1^{w^2}$ est la réunion de $C_{1,1}^w$ (décrite par l'équation $\sigma + w\varphi_1(w) \in H^0(-K_{T_1})$ et $C_{1,2}^w$ (décrite par l'équation $\sigma + w\varphi_2(w)$).

Alors $\sigma + w\varphi_2(w)_{|C_{1,1}^w}$ est un générateur de $H^0\left(-K_{T_1|C_{1,1}^w}\right)$, et s'annule sur $C_{1,2}^w$ de sorte qu'il est naturel de l'identifier à un générateur de $H^0\left(\Omega_{C_{1,1}^w}\right) \subset H^0\left(\Omega_{C_{1,1}^w}\right) \oplus H^0\left(\Omega_{C_{1,2}^w}\right) \simeq H^0\left(\Omega_{C_1^w}\right)$. On a donc une trivialisation naturelle de $\bigoplus\limits_{(r,s)} H^0\left(\Omega_{p_r} \times C_{1,s}^w\right)$ (où $r \in \{1, \cdots, 4\}, s \in \{1, 2\}$, donnée par:

$$\alpha = (\alpha_{p_1,1}, \alpha_{p_1,2}, \cdots, \alpha_{p_4,1}, \alpha_{p_4,2}) \to \sum_{(r,s)} \alpha_{p_r,s}\left(\sigma + w\varphi_{s'|C_{1,s}^w \times p_r}\right)$$

où $s' = 2$ pour $s = 1, s' = 1$ pour $s = 2$.

La proposition 3.15 et la proposition 1.17 donnent alors immédiatement (avec les notations de 3.16):

3.19. Proposition: (Cas ii) Soit $(\chi_t)_{t\in\Delta}$ une section holomorphe de $\mathcal{H}^{1,1^-}$. Alors on a $\lim\limits_{w\to 0} \psi(\chi_t,\alpha,\alpha) = \sum\limits_{(r,s)} \alpha^2_{p_i,s}\left\langle\chi_0,\nu_0'(\sigma^2)\right\rangle_0$ où $\nu_0'(\sigma^2) \in \mathcal{H}_0^{1,1^-}$ satisfait: $\nu_0'(\sigma^2)\neq 0$ et $\left\langle\nu_0'(\sigma^2),\nu_0'(\sigma^2)\right\rangle_0 = 0$.

3.20. On va maintenant rassembler les résultats 3.13 et 3.17, 3.19. On fera l'hypothèse suivante sur T_1:

3.20.1

i) C_1 n'a pas de composantes rationnelles.

ii) Si C_1 a une composante de genre >1 (donc C_1 est connexe par (1.1), C_1 admet une dégénération de Lefschetz sur une courbe $C_{1,0}$ dont la normalisée $\widehat{C_{1,0}}$ est elliptique et connexe.

iii) Soit $\widehat{T_1}$ la surface obtenue en éclatant les nœuds q_i de $C_{1,0}$; alors l'unique section de $-K_{\widehat{T_1}}$ définit une courbe lisse E_σ. On a alors sous les hypothèses 3.20.1:

3.21. Théorème: Si $g(C_1)>1$, considérons une dégénération de Lefschetz de C_1 comme en 3.20 ii; puis faisons dégénérer la courbe $\widehat{C_{1,0}}$ sur $2E_\sigma$, comme en 3.14. Si C_1 a deux composantes elliptiques, faisons dégénérer C_1 sur $2E_\sigma$. Alors quitte à passer à un revêtement ramifié de la base de la dégénération, l'accouplement de Yukawa ψ de $X_1 = \widetilde{E_1\times S_1}/(j_1,i_1)$ admet une limite naturelle, qui est isomorphe (comme cubique) à la forme d'intersection corrigée ψ_2' sur $H^1(\Omega_{X_2})$, et l'isomorphisme $M: \lim H^1(\Omega^2_{X_1}) \to H^1(\Omega_{X_2})$ qui transforme $\lim\psi$ en ψ_2' peut-être choisi de la façon suivante:

- M induit: $\bigoplus\limits_s H^0(\Omega_{p_r\times C_s}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus\limits_{s'} \langle D_{r,s'}\rangle\,\mathbb{C}, \forall r\in\{1,\cdots,4\}$

- M induit $H^0(\Omega_{E_1})\simeq H^1(\Omega_{E_1})$ et $H^1(\Omega_{S_1})^-\simeq H^1(\Omega_{S_2})^+$, le dernier isomorphisme étant compatible avec les formes d'intersection.

Démonstration: Dans le premier cas en faisant la synthèse de 3.13 et 3.17, on voit qu'il existe (après passage à un revêtement ramifié de la base), une limite naturelle de $\bigoplus_s H^0\left(\Omega_{p_r} \times C_s\right)$ isomorphe à $\bigoplus_{i=1,C=1}^{N_1'-1} \mathbf{C}_{q_i,r} \oplus \mathbf{C} \cdot \sigma$, où $\langle\sigma\rangle = H^0\left(-K_{\widehat{T}_1}\right)$, une limite $\lim H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-$ munie d'une forme d'intersection limite non dégénérée, et des classes $E_{q_i}, \nu_0'(\sigma^2) \in H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-$ satisfaisant $E_{q_i}^2 = -2, \nu_0'(\sigma^2)^2 = 0, \nu_0'(\sigma^2) \neq 0, E_{q_i} \cdot E_{q_j} = 0$, $E_{q_i} \cdot \nu_0'(\sigma^2) = 0$, telles que: pour $w \in \lim H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-, \eta \in \bigoplus_{r,s} H^0\left(\Omega_{p_r} \times C_s\right), \eta = (\alpha_{q_i,r}, \alpha_r)$, on ait $(\lim\psi)(w,\eta,\eta) = \left\langle w\left(\sum_{i,r} \alpha_{q_i,r}^2 E_{q_i} + \sum_r \alpha^2 \nu_0'(\sigma^2)\right)\right\rangle$. D'autre part $(\lim\psi)(w + \eta + u_E) = 3(\lim\psi)(w,\eta,\eta) + 3(w \cdot w) \times \gamma(u_E)$ où γ est une forme linéaire non nulle sur $H^0\left(\Omega_E\right)$ (cf. 1.17).

Rappelons d'autre part la formule 3.6.1 qui décrit $\psi_2' : \psi_2'(d + \chi + \beta) = 3(d^2\chi)_{X_2} + 3(\chi,\chi)_{S_2} \cdot \int_{E_2} \beta$, pour $\beta \in H^1\left(\Omega_E\right), \chi \in H^1\left(\Omega_{S_2}\right)^+, d = \sum_{r=1,s'=1}^{4,N_2} d_{r,s'} D_{2,r,s'}$, avec la relation (Lemme 1.11) $(d^2\chi)_{X_2} = -2\sum_{r,s'} d_{r,s'}^2 \left(C_{s'} \cdot \chi\right)_{S_2}$.

Il reste simplement à noter que X_1 a par hypothèse les invariants $N_1 = 1, N_1'$, et X_2 a donc les invariants $N_2 = N_1', N_2' = 1$. Donc nécessairement la courbe C_2 a une composante elliptique et $N_2 - 1 = N_1' - 1$ composantes rationnelles.

L'existence d'un isomorphisme M transformant $\lim\psi$ en ψ_2' et jouissant des propriétés énoncées dans le théorème 3.21 est alors claire:

Supposons que la composante elliptique de C_2 est la composante $C_{2,N_1'}$. Il suffit alors de faire:

a) $M\left(1_{q_{i,r}}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}} D_{2,r,i}$ pour $i = 1, N_1' - 1$, $M\left(\sigma_{p_r}\right) = D_{2,r,N_1'}$.

b) $M\left(E_{q_i}\right) = C_{2,i}$ pour $i = 1, \cdots, N_1' - 1$, $M\left(\nu_0'(\sigma^2)\right) = C_{2,N_1'}$, puis d'étendre l'application M construite en b) $\left\langle E_{q_i}, \nu_0'(\sigma^2)\right\rangle \simeq \langle C_{2,i}\rangle$ en un isomorphisme $M : \lim \left(H^1\left(\Omega_{S_1}\right)^-\right) \to H^1\left(\Omega_{S_2}\right)^+$ préservant les formes d'intersection.

Le second cas se montre de façon similaire.

REFERENCES

[1] V.A. Alekseev and V.V. Nikulin: Classification of Del Pezzo surfaces with Log-terminal singularities of index ≤ 2, and involutions on $K3$ surfaces, Soviet Math. Dokl. Vol 39 (1989) n° 3 507-511.

[2] P.S. Aspinwall and C.A. Lütken: Geometry of mirror manifolds. Nuclear Physics B 353 (1991) 427-461.

[3] P.S. Aspinwall, C.A. Lütken, G.G. Ross: Construction and couplings of mirror manifolds. Physics Letters B, Vol 241, n° 3, pp. 373-380.

[4] P.S. Aspinwall and D.R. Morrison: Topological field theory and rational curves, Preprint OUTP-91-32 P et DUK-M-91-12.

[5] J.B. Bost: Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules de courbes complexes. Séminaire Bourbaki 39ème année 1986-87, exposé 676.

[6] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten: Vacuum configurations for superstrings. Nuclear Physics B 258 (1985) 46-74.

[7] J. Carlson, P. Griffiths. Infinitesimal variations of Hodge structures and the global Torelli problem, dans "Géométrie Algébrique", Angers, édité par A. Beauville, 1980.

[8] H. Clemens: Double solids, Advances in Mathematics 47 107-230 (1983).

[9] P. Deligne: Théorie de Hodge II, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971) 107-126.

[22] V.V. Nikulin: Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces, Proceedings of the international congress of Mathematicians, Berkeley 1986. 654-671.

[23] S.S. Roan: The mirror of Calabi-Yau orbifold. International journal of mathematics. Vol 2 1991 439-455.

[24] E. Witten: Mirror manifolds and topological field theory. Preprint IASSNS-HEP-91/83

[25] E. Witten: Physics and Geometry. Proceedings of the international congress of Mathematicians. Berkeley 1986. 267-303.

[26] *Geometrie des surfaces* $K3$: Modules et Périodes. Séminaires Palaiseau, Asterisque n° 126. 1985.

[27] W. Barth. C. Peters, A. van de Ven: *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik and ihrer Grenzgebete 3. Folge Band 4. Springer verlag 1984.

[28] J. Steenbrink: Limits of Hodge structures. Inventiones math. 31 229-257 (1976).

[29] V. Batyrev : Hodge theory of hypersurfaces in toric varieties and recent development in quantum physics. Preprint habilitationsschrift Universität–GHS–Essen.

Claire Voisin

URA D752 du CNRS

Université d'Orsay et IHES