Astérisque

PIERRE COLMEZ

Exposé II (appendice) : Les nombres algébriques sont denses dans B_{dR}^{+}

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. nº 2 - appendice, p. 103-111

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__103_0>

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Appendice

LES NOMBRES ALGÉBRIQUES SONT DENSES DANS $\mathbf{B}_{dR}^{+}$

par **Pierre Colmez**

Dans cet appendice, nous montrons que $\mathbf{B}_{dR}^{+}$ est le complété de $\overline{K}$ pour une topologie que nous décrivons explicitement (théorème 1). La démonstration diffère légèrement de celle employée dans [Co90]. Nous donnons ensuite une formule permettant d'écrire explicitement un élément de $\overline{K}$ comme élément de $\mathbf{B}_{dR}^{+}$.

§A1. Calcul différentiel sur les nombres algébriques.

Les hypothèses et les notations sont celles des paragraphes 1.3, 1.4 et 1.5. Notons que $\overline{K}$ et $A_{inf} = W_{\mathcal{O}_K}(R)$ s'identifient canoniquement à des sous-anneaux de $\mathbf{B}_{dR}^{+}$. Soit I le noyau de l'homomorphisme θ de $\mathbf{B}_{dR}^{+}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et $I_{+} = I \cap A_{inf}$. Si $k \in \mathbf{N}$, posons $A_{inf}^{k} = A_{inf}/I_{+}^{k+1}$. Définissons par récurrence une suite de sous-anneaux $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-modules $\Omega^{(k)}$ en posant $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathcal{O}_{\overline{K}}$ et, si $k \geq 1$, $\Omega^{(k)} = \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^{1}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/\mathcal{O}_K}$ et en prenant pour $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ le noyau de la dérivation canonique $d^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ à valeurs dans $\Omega^{(k)}$.

THÉORÈME 1. — (i) *Si $k \in \mathbf{N}$, alors $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^{k+1})$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'inclusion de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $A_{inf} + I^{k+1}$ induit, par passage aux quotients un isomorphisme $A_{inf}^{k}/p^{n}A_{inf}^{k} \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^{n}\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.*

(ii) *Si $k \geq 1$, $d^{(k)}$ est surjective et si $\mathbf{a}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ défini en 1.4.2, $\Omega^{(k)}$ s'identifie à $\overline{K}/\mathbf{a}^{k}(k)$.*

Remarquons que (i) implique comme corollaire :

(iii) *$\overline{K}$ est dense dans $\mathbf{B}_{dR}^{+}$ et $\mathbf{B}_{dR}^{+}$ est le séparé complété de $\overline{K}$ pour la topologie définie en prenant les $p^{n}\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ avec $n, k \in \mathbf{N}$ pour base de voisinages de 0.*

Remarque : Une autre démonstration des points (i) et (ii) pour $k = 1$ se trouve exposée au paragraphe 1.4 (dans lequel $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(1)}$ est noté $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ et $\Omega^{(1)}$ est noté Ω).

Soient v_p la valuation de $\overline{K}$ normalisée par $v_p(p) = 1$, K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, ϖ une uniformisante de K et $e = 1/v_p(\varpi)$ l'indice de ramification absolu de K. Soient $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, P le polynôme minimal de x sur K^{nr} et $r \in \mathbf{N}$ vérifiant $r \geq v_p(P'(x))$. Soit $r_k \in \mathbf{N}$ défini par récurence par $r_0 = 0$ et $r_{k+1} = 3r_k + r$ (i.e. $r_k = (3^k - 1)r/2$). Si $a \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, posons $r_k(a) = \inf(r_k, v_p(a))$ et $z_{k,a} = p^{r_k - r_k(a)} x^a$.

LEMME 2. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $a \in \mathbf{N}$, on a $z_{k,a} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.*

Démonstration : Le résultat est trivial pour $k = 0$. Supposons le vrai pour k. Utilisant la relation

$$p^{r_k + r_k(a)} z_{k,a} = z_{k,1}(p^{r_k(a-1)} z_{k,a-1}),$$

on démontre par récurrence sur a, la relation

$$p^{r_k + r_k(a)} d^{(k+1)}(z_{k,a}) = p^{r_k} a x^{a-1} d^{(k+1)}(z_{k,1}), \tag{1}$$

d'où pour tout $A \in K^{nr}[X]$ à coefficients entiers :

$$p^{r_k} d^{(k+1)}(p^{r_k} A(x)) = p^{r_k} A'(x) d^{(k+1)}(z_{k,1}).$$

En particulier, si on prend pour A le polynôme minimal P de x, on obtient :

$$p^{r_k} P'(x) d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0 \Longrightarrow p^{r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0,$$

et utilisant le fait que $r_k(a) \leq r_k$, on obtient, en multipliant (1) par p^r :

$$\forall a \in \mathbf{N},\ p^{2r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,a}) = 0. \tag{2}$$

Deux cas se présentent alors. Si $v_p(a) \leq r_k$, on a $z_{k+1,a} = p^{2r_k + r} z_{k,a}$ et donc $z_{k+1,a} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k+1)}$ car (2) implique $d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = 0$. Si $v_p(a) > r_k$, écrivons $a = p^{r_k} b$ et posons $y_k = z_{k,p^{r_k}}$. On obtient alors

$$d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = p^{r_{k+1} - r_{k+1}(a)} d^{(k+1)}(y_k^b) = b p^{r_{k+1} - r_{k+1}(a)} y_k^{b-1} d^{(k+1)}(y_k) = 0$$

car $v_p(b) + r_{k+1} - r_{k+1}(a) \geq 2r_k + r$. Ce qui permet de terminer la démonstration.

Notons (provisoirement) $\mathcal{O}^k = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^{k+1})$. Nous allons maintenant démontrer le (i) du théorème 1 par récurrence sur k. Il n'y a rien à démontrer si $k = 0$. Supposons donc que $k \geq 1$, que $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} = \mathcal{O}^{k-1} = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^k)$ et que $A_{inf}^{k-1}/p^n A_{inf}^{k-1} \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$.

LEMME 3. — *On a* $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathcal{O}^k$.

Démonstration : Si $x \in \mathcal{O}^{(k-1)}$ soit $\tilde{x} \in A_{inf}$ tel que $x - \tilde{x} \in I^k$. Notons $\partial^{(k)}(x)$ l'image de $x - \tilde{x}$ dans le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$. Alors $\partial^{(k)}(x)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{x}$ et $\partial^{(k)}$ est une dérivation de $\mathcal{O}^{(k-1)}$ à valeurs dans un $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module dont le noyau est $\mathcal{O}^k$. On démontre alors le lemme en utilisant la propriété universelle satisfaite par $\Omega^{(k)}$.

Notons que ce lemme nous permet de considérer $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ comme un sous-anneau de A_{inf}^k.

LEMME 4. — *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ *(et donc à fortiori* $\mathcal{O}^k$*) est dense dans* A_{inf}^k.

Démonstration : Si $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, soit $R_\alpha = \{x \in R \mid x^{(0)} = \alpha\}$. Soient $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, $x = (x^{(n)}) \in R_\alpha$, P le polynôme minimal de α sur K^{nr}, $k \in \mathbf{N}$ et $l(k)$ le plus grand entier l tel que $p^l \leq k$. Soient m un entier ≥ 1 et $S_m(X) = X^{p^m} + \varpi X$. Soit $x_{n,m} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{n,m})^{p^m} + \varpi x_{n,m} = x^{(n)}$. Le polynôme minimal de $x_{n,m}$ sur K^{nr} divise le polynôme $P_{n,m} = P\big(S_m(X)^{p^n}\big)$. On a $P'_{n,m} = p^n S'_m S_m^{p^n-1} P'\big((S_m)^{p^n}\big)$ et $v_p(P'_{n,m}(x_{n,m})) = n + 1/e + (1 - p^{-n})v_p(\alpha) + v_p(P'(\alpha))$ est indépendant de m ; nous le noterons u_n. Utilisant le lemme 2, on voit que si $m \geq (3^k - 1)(u_n + 1)/2$, alors $y_{n,m} = (x_{n,m})^{p^m} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. On a de plus $\theta(y_{n,m} - [x^{p^{-n}}]) = -\varpi x_{n,m}$, et donc

$$y_{n,m} \equiv [x^{p^{-n}}] \bmod (\varpi A_{inf} + I_+ + I^{k+1}).$$

Elevant cette congruence à la puissance p^n, on obtient

$\forall m \geq (3^k-1)(u_n+1)/2,\ (y_{n,m})^{p^n}=(x_{n,m})^{p^{n+m}} \equiv [x] \bmod (\varpi^{n-el(k)}A_{inf}+I^{k+1})$,

ce qui implique que si $\phi(n)$ est une suite d'entiers vérifiant $\lim_{n\to\infty}\phi(n)/n = \infty$, alors $y_{n,\phi(n)} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ pour n assez grand et la suite $(y_{n,\phi(n)})^{p^n}$ tend vers $[x]$ dans A_{inf}^k. On en déduit que l'adhérence de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans A_{inf}^k contient la sous-$\mathcal{O}_K$-algèbre de A_{inf}^k engendrée par les $[x]$ pour $x \in R_\alpha$ et $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, et comme celle-ci est de toute évidence dense dans A_{inf}^k, cela démontre le lemme.

LEMME 5. — *$\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k$ sont des $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ épaississements infinitésimaux d'ordre k de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.*

Démonstration : La démonstration étant la même dans les deux cas (remplacer $d^{(k)}$ par $\partial^{(k)}$ dans la démonstration suivante), nous ne la ferons que pour $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. La densité de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans A_{inf}^k implique que l'application naturelle de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ est surjective. Composant avec la surjection de $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$, on en déduit une surjection θ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Il reste à vérifier que $ker\ \theta$ est de puissance $k+1$-ième nulle. On peut écrire θ comme le composé d'un morphisme θ_1 de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ sur $A_{inf}^{k-1}/p^nA_{inf}^{k-1} \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et d'un morphisme θ_2 de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \simeq \mathcal{O}_0/p^n\mathcal{O}_0$. On sait déjà que $ker\ \theta_2$ est de puissance k-ième nulle (et donc que $(ker\ \theta)^k \subset ker\ \theta_1$), il suffit donc de montrer que si $x \in ker\ \theta$ et $y \in ker\ \theta_1$, alors $xy = 0$. Mais on a $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathcal{O}_0$ et $y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$. Donc $p^{-n}y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et $d^{(k)}(xp^{-n}y) = xd^{(k)}(p^{-n}y) = 0$ car $p^nd^{(k)}(p^{-n}y) = 0$ et $x \in p^n\mathcal{O}_0$, ce qui implique $p^{-n}xy \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et donc $xy = 0$.

COROLLAIRE 6. — *$A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration : $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ est l'objet initial dans la catégorie des $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ épaississements infinitésimaux d'ordre k de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et par suite, les applications naturelles $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \to \mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k \to A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ sont des isomorphismes.

Corollaire 7. — $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$

Démonstration : On a $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathcal{O}^k$ et $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \simeq \mathcal{O}^k/p\mathcal{O}^k$. On en déduit que la multiplication par p dans $\mathcal{O}^k/\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est un isomorphisme, et comme ce module est de p-torsion, il est nul; d'où le résultat.

Remarque : Les corollaires 6 et 7 permettent de terminer la démonstration du (i) du théorème 1. Passons maintenant à la démonstration du (ii).

Lemme 8. — *$\partial^{(k)}$ est surjective.*

Démonstration : On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \longrightarrow Im(\partial^{(k)}) \longrightarrow 0,$$

d'où l'on déduit une autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Im(\partial^{(k)})_{p^n} \longrightarrow A_{inf}^k/p^n A_{inf}^k \longrightarrow A_{inf}^{k-1}/p^n A_{inf}^{k-1} \longrightarrow 0,$$

et passant à la limite sur n, on voit que $T_p(Im(\partial^{(k)}))$ s'identifie au noyau de la projection de A_{inf}^k sur A_{inf}^{k-1} ; en particulier, il est non nul. Soit alors une suite d'éléments x_n de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ vérifiant $\partial^{(k)}(x_n) = p\partial^{(k)}(x_{n+1})$ et $\partial^{(k)}(x_1) \neq 0$. Soit $y \in I^k/I_+^k + I^{k+1}$. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tels que $y = a\partial^{(k)}(x_n)$. Soit $r \in \mathbf{N}$ tel que $p^r a \in \mathcal{O}^k$. On obtient $\partial^{(k)}(p^r a x_{n+r}) = p^r a \partial^{(k)}(x_{n+r}) = y$, ce qui permet de conclure. Comme $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$, ceci permet de terminer la démonstration du (ii).

Remarque : L'égalité $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$ permet d'identifier $d^{(k)}$ et $\partial^{(k)}$ ainsi que $\Omega^{(k)}$ et $I^k/I_+^k + I^{k+1} \cong (I/I_+)^k \cong \overline{K}/\mathbf{a}^k(k)$; la dernière égalité venant de l'identification entre $\Omega^{(1)}$ et $\overline{K}/\mathbf{a}(1)$ démontrée au paragraphe 1.4.

§A2. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{dR}^+$.

Soient F un corps commutatif de caractéristique 0, $P \in F[X]$ un polynôme irréductible, $F[X]_P$ le complété du localisé de $F[X]$ en l'idéal engendré par

P, $L = F[X]/P$ le corps résiduel de cet anneau de valuation discrète complet et π l'image de X dans L. Alors $Y = X - \pi$ est une uniformisante de $F[X]_P$ qui s'identifie donc à $L[[Y]]$. Notons que si $D = \frac{d}{dP(X)}$ est l'unique dérivation de $F[X]_P$ de noyau L vérifiant $D(P) = 1$, si $y \in L$ et si $Q \in F[X]$ vérifie $Q(\pi) = y$, alors l'application $y \to Q_y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D^k(Q)P^k$ est la section de la projection de $F[X]_P$ sur L. En effet, $D(Q_y) = 0$, ce qui implique $Q_y \in L$ et de plus, $Q_y(\pi) = y$.

Tout élément de $F[X]_P$ s'écrit de manière unique $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k P^k$ avec $Q_k \in F[X]$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$. Une telle écriture sera dite minimale. Si $y \in L$, on note $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_P^k(y) P^k$ son écriture minimale. On peut d'ailleurs calculer $\delta_P^k(y)$ en utilisant l'algorithme suivant : il existe une unique suite de couples de polynômes (Q_k, R_k) vérifiant

(i) $Q_0 = Q$ et $R_0 = 0$,

(ii) $\deg(R_k) < \deg(P')$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$,

(iii) $Q'_k + R_k + (k+1)P'Q_{k+1} = PR_{k+1}$.

On a alors $\delta_P^k(y) = Q_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, comme on peut le constater en calculant $D(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k P^k)$.

Nous allons appliquer les résultats précédents à $F = K^{nr}$. Soient $y \in \overline{K}$, $L \neq K^{nr}$ une extension finie de K^{nr} contenant y, π une uniformisante de L et P le polynôme minimal de π sur K^{nr}.

LEMME 9. — *Si $\tilde{\pi} \in A_{inf}$ est tel que $\theta(\tilde{\pi}) = \pi$, alors $P(\tilde{\pi})$ est un générateur de I_+.*

Démonstration : Soit $u \in R$ tel que $u^{(0)} = \pi$. On a $\tilde{\pi} = [u] + \alpha$ avec $\alpha \in I_+$ et si $f = [L : K^{nr}]$, alors $P([u]) \equiv [u^f] \bmod \varpi A_{inf}$. Comme $v_R(u^f) = 1$ et $P([u]) \in I_+$, ceci implique ([Fo82a Prop.2.4]) que $P([u])$ est un générateur de I_+. On peut donc écrire $\alpha = \beta P([u])$ avec $\beta \in A_{inf}$ et on a $P(\tilde{\pi}) = P([u])\big(1 + P'([u])\beta\big) \bmod I_+^2$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\theta\big(1+P'([u])\beta\big) = 1 + P'(\pi)\theta(\beta)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ car L est totalement ramifiée et donc $1 + P'([u])\beta \in A_{inf}^*$.

Si $x \in \mathbf{B}_{dR}^+$, soit $s_k(x) = \sup\{m \in \mathbf{Z} \mid x \in \varpi^m A_{inf} + I^{k+1}\}$. On appelle écriture minimale de x toute série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ dont la somme est x et telle que

$x_k \in \varpi^{s_k(x)} I_+^k$ (notons que cette condition implique la convergence de la série).

PROPOSITION 10. — $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$ *est une écriture minimale de* y.

Démonstration : C'est une écriture car $P(\tilde{\pi}) \in I - I^2$ implique que le morphisme $Q \to Q(\tilde{\pi})$ est une injection de $K^{nr}[X]_P$ dans $\mathbf{B}_{dR}^+$ et donc que $Q_y(\tilde{\pi}) = y$. Elle est minimale car $P(\tilde{\pi})$ est un générateur de I_+ et $deg(\delta_P^k(y)) < deg(P)$.

Remarque 1 : On peut définir $s_k(y)$ sans recours à $\mathbf{B}_{dR}^+$: en effet, $s_k(y)$ n'est rien d'autre que le minimum de $v_p(\delta_P^i(y))$ pour $0 \leq i \leq k$. De plus, cette proposition nous donne une description explicite de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ comme étant l'ensemble des $x \in \overline{K}$ vérifiant $s_k(x) \geq 0$.

Remarque 2 : Une fois que l'on a identifié $\Omega^{(k)}$ avec $\overline{K}/\mathbf{a}^k(k)$, et que l'on a choisit un générateur $\epsilon = (\epsilon^{(m)}) \in R$ de $\mathbf{Z}_p(1)$, on peut utiliser la proposition 10 pour donner une formule explicite pour $d^{(k)}$. Supposons $y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ dans la proposition 10, et soit t^k l'image de $([\epsilon]-1)^k)$ modulo I^{k+1}, alors on a

$$d^{(k)}(y) = \delta_P^k(y)(\pi)\theta\left(\frac{P(\tilde{\pi})^k}{([\epsilon]-1)^k}\right)t^k.$$

REFERENCES

[BO78] P. BERTHELOT and A. OGUS. — Notes on Crystalline cohomology, Princeton University Press, 1978.

[BK90] S. BLOCH and K. KATO. — L–functions and Tamagawa numbers of motives **in** *The Grothendieck Festschrift II*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1990, 333–400.

[Co90] P. COLMEZ. — Le corps des périodes p–adiques, C.R.A.S. Paris, 310 (1990), 321–324.

[Fa89] G. FALTINGS. — Crystalline cohomology and p–adic étale Cohomology, **in** *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, The Johns Hopkins Univ. Press, 1989, 25–80.

[Fo82a] J.–M. FONTAINE. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate, **Ann. of Maths**, 115 (1982), 529–577.

[Fo82b] J.–M. FONTAINE. — Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, **Inv. Math.** 65 (1982), 379–409.

[Fo83] J.–M. FONTAINE. — Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p–adiques, **in** *Algebraic Geometry Tokyo–Kyoto*, Lecture Notes in Math. 1016, Springer, Berlin, 1983, 86–108.

[FM87] J.–M. FONTAINE and W. MESSING. — p–adic Periods and p–adic étale Cohomology, **Contemporary Mathematics**, 67 (1987), 179–207.

[Se68] J.–P. SERRE. — *Corps locaux*, 2ème édition, Paris, Hermann, 1968.

[Ta67] J. TATE. — p–divisible Groups, **in** *Proc. of a conf. on local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, 158–183.

[Exp.IX] J.-P. WINTENBERGER. — Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens. I : Construction de l'accouplement de périodes, exposé IX, *dans ce volume*.

Jean-Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Pierre Colmez
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 PARIS
FRANCE