LUC ILLUSIE

Exposé IV (appendice) : Réduction semi-stable ordinaire, cohomologie étale p-adique et cohomologie de de Rham

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 4 - appendice, p. 209-220

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__209_0>

Appendice

RÉDUCTION SEMI-STABLE ORDINAIRE, COHOMOLOGIE ÉTALE p–ADIQUE ET COHOMOLOGIE DE DE RHAM D'APRÉS BLOCH–KATO [BK] ET HYODO [H]

par **Luc Illusie**

1. Réduction semi-stable ordinaire.

1.0. Soient A un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique zéro et de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, σ son automorphisme de Frobenius. Soit $X \longrightarrow S =$ Spec A un morphisme propre, à *réduction semi-stable* (ce qui signifie que, localement pour la topologie étale sur X et sur S, *il* existe des entiers $1 \leq r \leq n$ tels que X soit isomorphe au sous-schéma fermé de $S[t_1, \ldots t_n]$ d'équation $t_1 \ldots t_r = \pi$, où π une uniformisante de A). Le schéma X est régulier, plat sur S, sa fibre générique X_K est lisse, et sa fibre spéciale $Y = X \otimes_A k$ est un diviseur à croisements normaux dans X.
On sait alors définir (cf. [HK, 2.5, 1.1, 4.1]) un *complexe de de Rham*

$$\omega^{\cdot}_{X/S} \tag{1.1}$$

et un *complexe de de Rham-Witt*

$$W\omega^{\cdot}_Y = \lim\mathrm{proj}\, W_n\omega^{\cdot}_Y \tag{1.2}$$

qui, dans le cas où X est lisse, coïncident respectivement avec le complexe de de Rham usuel de X/S et le complexe de de Rham-Witt usuel de Y. Les composantes de (1.1) sont localement libres de type fini, et $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i\omega^1_{X/S}$;

pour X d'équation $t_1 \dots t_r = \pi$ dans $S[t_1, \dots t_n], \omega^1_{X/S}$ est le $\mathcal{O}_X$-module engendré par les dt_i/t_i $(1 \leq i \leq r)$ et $dt_i (i > r)$ soumis à l'unique relation $\Sigma_{1 \leq i \leq r} dt_i/t_i = 0$. On a $\omega^{\cdot}_{X/S} = u_* \Omega^{\cdot}_{U/S}$ où $u : U \longrightarrow X$ est l'ouvert de lissité de X/S. En particulier, $\omega^{\cdot}_{X/S}$ induit sur la fibre générique le complexe de de Rham usuel. D'autre part, la composante de degré zéro de $W_n \omega^{\cdot}_Y$ est $W_n \mathcal{O}_Y$, et

$$W_1 \omega^{\cdot}_Y = \omega^{\cdot}_Y \tag{1.3}$$

où $\omega^{\cdot}_Y := \omega^{\cdot}_{X/S} \otimes_A k$. Toutefois, contrairement à ce que la notation peut suggérer, le complexe (1.2) ne dépend pas uniquement de Y, mais de Y muni de sa "log structure naturelle" [HK]. Comme dans le cas usuel (Y lisse), il est muni d'opérateurs F et V en chaque degré vérifiant $FV = VF = p$ et $FdV = d$.

Le W-module gradué $H^*(Y, W\omega^{\cdot})$ est de type fini sur W ; il s'identifie à la cohomologie cristalline du log schéma Y relativement aux vecteurs de Witt du log point Spec k (loc. cit.). Il est muni d'un endomorphisme σ-linéaire Φ, le *Frobenius*, tel que $\Phi \otimes \mathbf{Q}_p$ soit bijectif; cet endomorphisme est induit par l'endomorphisme de $W\omega^{\cdot}$ défini par $p^i F$ en degré i. Il est également muni d'un endomorphisme W-linéaire N, appelé *monodromie*, qui est relié à Φ par la formule $N\Phi = p\Phi N$ (et est donc tel que $N \otimes \mathbf{Q}_p$ soit nilpotent). La monodromie jouera peu de rôle dans cet appendice.

DÉFINITION 1.4. — *Sous les hypothèses de* (1.0), *on dit que X a réduction ordinaire si*

$$H^j(Y, B\omega^i) = 0$$

pour tout i et tout j.

Quand X/S est lisse, cette condition ne dépend que de Y et signifie que Y est *ordinaire* au sens de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13], i.e. vérifie $H^j(Y, B\Omega^i) = 0$ pour tout i et tout j.

PROPOSITION 1.5. — *Sous les hypothèses de* 1.0 *:*

(a) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X a réduction ordinaire ;*

(ii) *pour tout* i *et tout* j *l'endomorphisme* F *de* $H^j(Y, W\omega^i)$ *est bijectif. Si de plus* $H^n(Y, W\omega^\cdot)$ *est sans torsion pour tout* n*, elles sont aussi équivalentes à chacune des conditions suivantes :*

(iii) *pour tout* n*, le* F*-cristal* $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ *est ordinaire, i. e. a mêmes polygones de Newton et de Hodge ;*

(iv) *pour tout* n*, le polygone de Newton du* F*-cristal* $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ *coïncide avec le polygone de Hodge construit sur les nombres* $\dim H^{n-i}(Y, \omega^i)$, $0 \leq i \leq n$.

(b) *Si* X *a réduction ordinaire, alors, pour tout* n*, le* F*-module* $(H^n(Y, W\omega^\cdot), F)$ *admet une décomposition canonique*

$$H^n(Y, W\omega^\cdot) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(Y, W\omega^i)(-i), \tag{1.5.1}$$

où, pour un F*-module* M*,* $M(-i)$ *désigne le* F*-module* $(M, p^i F)$.

La démonstration est analogue à celle de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13].
Le critère ci-après, dû à Hyodo [H] (cf. [I2] pour quelques détails sur la démonstration), est souvent commode pour reconnaître une réduction ordinaire :

PROPOSITION 1.6. — *Sous les hypothèses de* 1.0*, supposons que le diviseur* Y *dans* X *soit somme de composantes* Y_i *lisses sur* k*,* $1 < i < n$*. Si* I *est une partie de* $[1, n]$*, notons* Y_I *l'intersection des* Y_i *pour* $i \in I$*. C'est un schéma propre et lisse sur* k*. Si, pour tout* I, Y_I *est ordinaire, alors* X *a réduction ordinaire.*

En particulier, si $\dim X/S = 1$, et si les composantes irréductibles de Y sont lisses, X a réduction ordinaire si la normalisée $Y^\sim$ de Y est ordinaire (en fait, l'hypothèse de lissité sur les composantes est inutile, et l'ordinarité de $Y^\sim$ équivaut au fait que X ait réduction ordinaire, [I2, loc. cit.]). Par exemple, si X est une courbe elliptique à mauvaise réduction de type multiplicatif, X a réduction ordinaire.
A partir du critère 1.6, ou plutôt de sa variante en égale caractéristique, on peut montrer [I2] qu'une intersection complète générique de multidegré donné dans une espace projectif fixé sur un corps est ordinaire.

2. Les résultats de Bloch-Kato [BK] et Hyodo [H].

Dans la situation de 1.0, avec X à réduction ordinaire, Hyodo [H], généralisant des résultats de Bloch-Kato [BK], met en relation la cohomologie de de Rham de X/S, $H^*(X, \omega_{X/S})$, la cohomologie de de Rham-Witt $H^*(Y, W\omega_Y)$, et la cohomologie étale p-adique de la fibre générique géométrique de X , au moyen des *cycles évanescents p-adiques* et des *faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques.* Expliquons d'abord ce que sont ces objets.

2.1. Commençons par les cycles évanescents. Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de $K, \bar{A}$ le normalisé de A dans $\bar{K}$, qui est donc un anneau de valuation, dont le corps résiduel $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. Soit X/S un schéma à réduction semi-stable, qu'on ne suppose pas propre pour l'instant. Posons

$$X_{\bar{K}} = X \otimes \bar{K}, \quad \bar{X} = X \otimes \bar{A}, \quad \bar{Y} = \bar{X} \otimes \bar{k} = Y \otimes \bar{k},$$

notons $\bar{i} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}, \bar{j} : X_{\bar{K}} \longrightarrow \bar{X}$ les immersions canoniques. Les *cycles évanescents p-adiques* $(\operatorname{mod} p^n)$ sont les faisceaux étales sur $\bar{Y}$ définis par

$$\Psi_n^s := \bar{i}^* R^s \bar{j}_* (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}). \tag{2.1.2}$$

Ce sont les faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents

$$R\Psi_n := \bar{i}^* R\bar{j}_* (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

Si X/S est propre, on a un isomorphisme naturel

$$H^*(\bar{Y}, R\Psi_n) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}),$$

d'où une suite spectrale, dite *suite spectrale des cycles évanescents,*

$$E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j) => H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}). \tag{2.1.3}$$

Le groupe de Galois

$$G = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$$

opère sur $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Il opère aussi sur les Ψ_n^s de manière compatible à son action sur $\bar{Y}$, et la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante.

Contrairement à ce qui se passe dans le cadre ℓ-adique ($\ell \neq p$), si X/S est lisse, les faisceaux Ψ_n^s, pour $s \geq 1$, ne sont pas nuls en général. Bloch et Kato [BK] ont été les premiers à étudier leur structure. Leurs résultats ont ensuite été généralisés par Hyodo au cas semi-stable [H].
Un point essentiel est la construction de *générateurs* locaux des Ψ_n^s. Si x est une section locale de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, il lui est associé, par la suite exacte de Kummer, une section $\{x\}$ de $\Psi_n^1(1)$ $(= \bar{i}^* R^1\bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(1))$. Si $x_1, \dots, x_s$ sont des sections locales de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, le cup-produit $\{x_1\}\dots\{x_s\}$ est une section locale de $\Psi_n^s(s)$, notée

$$\{x_1, \dots, x_s\}$$

et appelée *symbole*. Hyodo montre que $\Psi_n^s(s)$ est localement engendré par les symboles (il établit même le résultat analogue à chaque cran fini, $\bar{K}$ étant remplacé par une extension finie de K). Il en résulte notamment que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induit des suites exactes

$$(2.1.4) \qquad 0 \longrightarrow \Psi_1^s \longrightarrow \Psi_n^s \longrightarrow \Psi_{n-1}^s \longrightarrow 0.$$

Il découle de ces suites exactes et d'un dévissage délicat de $\Psi_1^s(s)$ [H 1.7] que, si X/S est propre, les $H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j)$ sont de longueur finie, et que, par conséquent, la limite projective des suites spectrales (2.1.3) est une suite spectrale (G–équivariante), notée

$$(2.1.5) \qquad E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi^j) => H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p).$$

2.2. Bien que $\bar{X}/\bar{S}$ (où $\bar{S} = \operatorname{Spec} A$) n'ait plus en général réduction semi-stable, $\bar{X}$, muni de sa log structure naturelle, est log lisse sur $\bar{S}$, et la fibre spéciale $\bar{Y}$ (munie de la log structure induite) est de type de Cartier, cf. [HK]. On sait donc encore définir un complexe de de Rham-Witt [HK, n° 4]

$$(2.2.1) \qquad W\omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \lim\operatorname{proj} W_n\omega_{\bar{Y}}^{\cdot}.$$

On a

$$W_1\omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \omega_Y^{\cdot} \otimes_k \bar{k},$$

et plus généralement,

$$W_n\omega^{\cdot}_{\bar{Y}} = W_n\omega^{\cdot}_{Y} \otimes_{W_n} W(\bar{k}).$$

On dispose d'un homomorphisme canonique [HK, 4.6]

$$\mathrm{dlog} : \bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^* \longrightarrow W_n\omega^1_{\bar{Y}} \tag{2.2.2}$$

(dans le langage des log structures, la source est $M^{gp}_{\bar{Y}}$). On note

$$W_n\omega^i_{\bar{Y},\log} \subset W_n\omega^i_{\bar{Y}} \tag{2.2.3}$$

le sous-faisceau étale de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$–modules de $W_n\omega^i_{\bar{Y}}$ localement engendré par les $d\log x_1 \ldots d\log x_i$. Ces faisceaux sont les *faisceaux de Hodge–Witt logarithmiques* de $\bar{Y}$. On a une définition analogue pour Y, ou pour Y' , fibre spéciale de $X' = X \otimes A', A'$ l'anneau des entiers d'une extension finie K' de K . Dans le cas où X est lisse, on retrouve la notion étudiée dans [I1], [IR], [BK]. Ces faisceaux jouissent de propriétés analogues à celles développées dans (loc. cit.)[1] . Pour n variable, les faisceaux $W_n\omega^i_{\log}$ forment un système projectif, le pro-objet correspondant $W.\omega^i_{\log}$ est sans p–torsion, coïncide avec le noyau de $1 - F$ sur le pro–objet $W.\omega^i$, et $W_n\omega^i_{\log} = W.\omega^i_{\log} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On a le résultat suivant (cf. [IR] ou [BK] dans le cas lisse) :

PROPOSITION 2.3. — *Si X/S est propre et a réduction semi-stable ordinaire, alors, pour tout i, l'homomorphisme*

$$H^*(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y}}) \tag{2.3.1}$$

déduit de (2.2.3) *est un isomorphisme.*

On a même un résultat un peu plus précis. Les inclusions (2.2.3) définissent un homomorphisme de complexes

$$\oplus W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}[-i] \longrightarrow W_n\omega^{\cdot}_{\bar{Y}}. \tag{2.2.4}$$

[1] La théorie n'est toutefois pas écrite, elle mériterait de l'être.

Sous les hypothèses de 2.3, l'homomorphisme correspondant

$$(2.3.2) \qquad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega^{\cdot}_{\bar{Y}})$$

est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit un isomorphisme sur les gradués associés. Par passage à la limite projective, les isomorphismes (2.3.2) fournissent un isomorphisme

$$(2.3.3) \qquad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\bar{Y},\log}) \otimes W(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W\omega^{\cdot}_{\bar{Y}}),$$

où $H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\bar{Y},\log}) := \lim\mathrm{proj}\, H^{*-i}(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log})$, qui n'est autre que celui déduit, par extension des scalaires, de la décomposition (1.5.1) et de (2.3.1).

2.4. *Les deux homomorphismes fondamentaux.* Généralisant [BK], Hyodo [H] montre que, sous les hypothèses de 2.1 :

(a) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.1) \qquad \alpha : \Psi^i_n(i) \longrightarrow W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}$$

tel que $\alpha(\{x_1, \ldots, x_i\}) = d\log x_1 \ldots d\log x_i$ pour toutes sections locales $x_1, \ldots, x_i$ de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, avec les notations de 2.1 et (2.2.2). Comme $\Psi^i_n(i)$ est engendré par des symboles, cet homomorphisme est donc unique, et il est surjectif par définition de $W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}$. Les homomorphismes α forment un homomorphisme de systèmes projectifs.

(b) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.2) \qquad \beta : \Psi^i_n(i) \longrightarrow \omega^i_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

tel que $\beta(\{x_1, \ldots, x_i\}) = d\log x_1 \wedge \ldots \wedge d\log x_i$ pour toutes sections locales $x_1, \ldots, x_i$ de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$. Pour la même raison qu'en (a), cet homomorphisme est unique, et les homomorphismes β forment un morphisme de systèmes projectifs. Noter que l'image de β est contenue dans le noyau de la différentielle d du complexe de de Rham, de sorte que les homomorphismes β définissent un homomorphisme de complexes

$$(2.4.3) \qquad \oplus \Psi^i_n(i)[-i] \otimes \bar{A}_n \longrightarrow \omega^{\cdot}_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

Les homomorphismes α et β , étant uniques, sont compatibles à Galois; il en est de même de (2.4.3).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de Hyodo [H] :

THÉORÈME 2.5. — *Soit X/S propre, à réduction semi-stable ordinaire. Alors :*

(i) *Pour tout n et tout i, l'homomorphisme*

$$H^*(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}) \tag{2.5.1}$$

induit par α est un isomorphisme.

(ii) *Posons $\bar{A}_n = \bar{A}/p^n\bar{A}, \bar{S}_n = \operatorname{Spec}\bar{A}_n, \bar{X}_n = \bar{X} \otimes_{\bar{A}} \bar{A}_n$ (de sorte que $\omega^\cdot_{\bar{X}_n/\bar{S}_n} = \omega^\cdot_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$). Pour tout n et tout i, l'homomorphisme*

$$H^*(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega^i_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}) \tag{2.5.2}$$

déduit de β est un isomorphisme.

Par les suites exactes (2.1.4), on se ramène à $n = 1$. L'assertion (i) résulte d'un dévissage délicat de $\Psi_1^i(i)$. L'assertion (ii) se ramène alors à l'assertion (i) grâce à (2.3) pour $n = 1$.

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses de 2.5 :*

(a) *Pour tout n, la suite spectrale de Hodge vers de Rham de X_n/S_n, où $X_n = X \otimes A_n, A_n = A/p^nA$,*

$$E_1^{ij} = H^j(X_n, \omega^i_{X_n}) => H^*(X_n, \omega^\cdot_{X_n})$$

dégénère en E_1.

(b) *L'homomorphisme*

$$\oplus H^{*-i}(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega^\cdot_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}) \tag{2.6.1}$$

déduit de (2.4.3) est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit sur les gradués associés l'isomorphisme (2.5.2) (compte tenu de (a)).

(c) *Il existe un unique isomorphisme A-linéaire*

$$(2.6.2) \qquad H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W A \xrightarrow{\sim} H^*(X, \omega_{X/S}^{\cdot}),$$

caractérisé par la propriété suivante : pour tout n, l'isomorphisme déduit de (2.6.2) *par extension des scalaires à* $\hat{\bar{A}} = \lim\operatorname{proj} \bar{A}_n$ *rend commutatif le carré*

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W \hat{\bar{A}} & \longrightarrow & H^*(X, \omega_{X/S}^{\cdot}) \otimes \hat{\bar{A}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\bar{Y}, W\omega_{\bar{Y}}^{\cdot}) \otimes_W \bar{A}_n & \longrightarrow & H^*(\bar{X}_n, \omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}^{\cdot}) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme défini par les décompositions (2.3.2) *et* (2.6.1), *au moyen de l'isomorphisme* (2.5.1). *L'isomorphisme* (2.6.2) *induit un isomorphisme sur les suites spectrales (des pentes, et de Hodge) correspondantes, associées aux filtrations naïves. En particulier, il munit* $H^*_{DR}(X_K/K)$ *d'une structure de* Φ*-module filtré ordinaire au sens de* [PR, 1.2], *i. e. la filtration de Hodge* $\mathrm{Fil}^{\cdot}$ *de* $H^*_{DR}(X_K/K)$ *est opposée à la filtration par les pentes croissantes* $U.$ *de* $H^*_0 := H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W K_0$ *(où* $K_0 = \mathrm{Frac} W$*) :*

$$(U_{i-1} \otimes K) \oplus Fil^i = H^*_{DR}(X_K/K)$$

pour tout i, où $Fil^i = H^*(X_K, \Omega^{\geq i}_{X_K})$, *et* U_j *est la partie de pente* $\leq j$ *de* H^*_0, *i.e.* $(\oplus_{r \leq j} H^{*-r}(Y, W\omega^r)) \otimes K_0$.

Les homomorphismes (2.4.3) induisent un homomorphisme de suites spectrales, qui, d'après 2.5 (ii), est un isomorphisme au niveau E_1, d'où (a) et (b). Dans (c), l'unicité est claire. Les isomorphismes inférieurs du carré définissent, par passage à la limite projective, l'isomorphisme supérieur. Ce dernier est G–équivariant, où $G = Gal(\bar{K}/K)$. Comme, d'après Tate [T, 3.3], $\hat{\bar{A}}^G = A$, on en déduit (2.6.2) en prenant les invariants sous G . La dernière assertion est immédiate.

Corollaire 2.7. — *Sous les hypothèses de* (2.5) *:*

(a) *La suite spectrale des cycles évanescents* (2.1.5) *dégénère en* E_2 *modulo torsion. Si* $F^{\cdot}$ *désigne la filtration correspondante de* $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$*, on a des isomorphismes canoniques,* G*-équivariants,*

$$(2.7.1) \qquad gr_F^{*-i} H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \simeq H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\log}) \otimes \mathbf{Q}_p(-i).$$

En particulier, la représentation p*-adique* $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ *est ordinaire au sens de* [PR, 1.2].

(b) *Soit* $C = \hat{\bar{K}}$ *. Il existe un isomorphisme* C*-linéaire,* G*-équivariant*

$$(2.7.2) \qquad \oplus H^{*-i}(X_K, \Omega^i_{X_K}) \otimes_K C(-i) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$$

"décomposition de Hodge-Tate").

Posons $b_m = \dim_K H^m_{DR}(X/K)$, $h^{ij} = \dim_K H^j(X_K, \Omega^i)$. On a $b_m = \sum_{i+j=m} h^{ij}$ (dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, qui, ici, est d'ailleurs conséquence de 2.6 (a)). D'autre part, par le théorème de comparaison d'Artin-Grothendieck entre cohomologie de Betti et cohomologie étale, on a $b_m = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$. D'après 2.5, $h^{ij} = \dim H^j(\bar{Y}, W\omega^i_{\log}) \otimes \mathbf{Q}_p = \dim H^j(\bar{Y}, \Psi^i) \otimes \mathbf{Q}_p$. L'assertion de dégénérescence en résulte. L'isomorphisme (2.7.1) se déduit alors de (2.5.1). Le théorème de Tate [T, 3.3] entraîne l'existence d'un scindage G-équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ déduite par extension des scalaires, d'où (b), grâce à 2.5 (ii).

Remarque 2.8. La décomposition (2.7.2) n'est pas canonique : chaque scindage G–équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ envisagée ci–dessus fournit une telle décomposition, i. e. un isomorphisme entre $\oplus H^{*-i}(X_K, \Omega^i_{X_K}) \otimes_K C(-i)$ et le facteur (canonique) de $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ correspondant au caractère χ^{-i}, où χ est le caractère cyclotomique. Toutefois, Faltings [Fa] a construit une décomposition de Hodge–Tate canonique pour tout schéma propre et lisse Z sur K .

Problème 2.9. Dans [HK], Hyodo et Kato définissent, pour X/S propre, à réduction semi-stable (non nécessairement ordinaire) (et même sous des hypothèses plus générales), un isomorphisme canonique

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^*(Y, W\omega^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X_K/K),$$

dépendant d'une uniformisante π de A . Quand X a, de plus, réduction ordinaire, comment se compare cet isomorphisme à celui déduit de (2.6.2) ?

Problème 2.10. Sous les hypothèses de 2.5, la structure de (ϕ, N)–module filtré (ordinaire) définie sur $H^*_{DR}(X_K/K)$ par (2.6.2) est–elle associée à la représentation p-adique (ordinaire) $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ par la correspondance de Fontaine [F] (cf. aussi [PR]) ? Si ρ (resp. ρ') désigne la représentation $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ (resp. la représentation associée à $H^*_{DR}(X_K/K)$), on dispose sur ρ (resp. ρ') de la filtration de la suite spectrale des cycles évanescents (resp. de la filtration associée à la filtration par les pentes), et tout au moins peut-on affirmer que les gradués associés sont (canoniquement) isomorphes. Par ailleurs, si $\dim X/S < (p-1)/2$, Kato montre dans [K], sans hypothèse d'ordinarité, que la structure de (ϕ, N)–module filtré déduite de ρ_π est associée à la représentation p-adique, donc une réponse positive à 2.10 permettrait de répondre à 2.9 sous les mêmes restrictions de dimension. On espère, bien entendu, que, sans hypothèse d'ordinarité ni restriction de dimension, la structure de (ϕ, N)-module filtré définie par ρ_π est associée à la représentation p–adique (conjecture C_{st}).

Bibliographie

[BK] S. Bloch and K. Kato. — *p–adic etale cohomology*, Pub. Math. IHES **63**, 107-152 (1986).

[F] J.-M. Fontaine. — *Représentations p–adiques semi–stables*, ce séminaire.

[Fa] G. Faltings. — *p-adic Hodge theory*, J. of the AMS 1, 255-299 (1988).

[H] O. Hyodo. — *A note on p–adic etale cohomology in the semi–stable reduction case*, Invent. math. **91**, 543-557, 1988.

[HK] O. Hyodo and K. Kato. — *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, ce séminaire.

[I1] L. Illusie. — *Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. ENS 4ème série, t. 12, 501-661 (1979).

[I2] L. Illusie. — *Ordinarité des intersections complètes générales*, The Grothendieck Festschrift Vol. II, 375–405, Birkhäuser 1991.

[IR] L. Illusie et M. Raynaud. — *Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt*, Pub. Math. IHES **57**, 73-212 (1983).

[K] K. Kato. — *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology*, ce séminaire.

[PR] B. Perrin-Riou. — *Représentations p-adiques ordinaires*, ce séminaire.

[T] J. Tate. — *p-divisible groups*, Proc. Conf. local fields, Driebergen, 158-183, Springer-Verlag 1967.

Luc Illusie
URA D0752 du CNRS
Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE