Astérisque

HERVÉ BILLARD

Répartition des points rationnels des surfaces géométriquement réglées rationnelles

Astérisque, tome 251 (1998), p. 79-89
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__79_0>

Astérisque **251**, 1998, p. 79–89

RÉPARTITION DES POINTS RATIONNELS DES SURFACES GÉOMÉTRIQUEMENT RÉGLÉES RATIONNELLES

par

Hervé Billard

Résumé. — Nous étudions la répartition des points rationnels des modèles minimaux des surfaces rationnelles et vérifions que ces surfaces satisfont les conjectures de Batyrev-Manin sur le corps des rationnels. Pour ce faire, nous rappelons d'abord quelques propriétés et descriptions géométriques de telles surfaces. Ensuite, pour chaque plongement considéré, une hauteur naturelle apparaissant, nous établissons directement le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée. Finalement, nous regardons les sous-variétés accumulatrices.

1. Introduction

Lorsque V est une variété algébrique définie sur un corps de nombres k, il est naturel de s'intéresser à la répartition des points k-rationnels de V. Pour étudier $V(k)$, on définit d'abord une hauteur H qui permet de « mesurer la taille » d'un point k-rationnel de V (cf. [La 83] chap. 3 et 4 ou chap. 6 de [Co-Si 86]) ; ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathrm{card}\{P \in U(k) \mid H(P) \leqslant B\}$ pour tout ouvert Zariski dense U de V. Ce comportement asymptotique illustre parfaitement la répartition des points k-rationnels de V (voir [Ba-Ma 90]). Pour essayer de le déterminer, il existe actuellement, à notre connaissance, quatre méthodes. La première est la méthode du cercle pour certaines intersections complètes (voir par exemple [Bir 62]) ; la deuxième consiste à définir « correctement » la hauteur H et de considérer la fonction zêta associée, $\sum_{P\in U(k)} H(P)^{-s}$ (cf. [Fr-Ma-Ts 89], [Ba-Ma 90], [Pe 95], [Ba-Ts 95], entre autres) ; la troisième est de construire des hauteurs canoniques à la Néron-Tate (cf. [Ne 65], [Si 91], [Bi 97]) ; la quatrième consiste « à expliciter » un plongement de la variété V, à considérer une hauteur associée et à déterminer « directement » le comportement asymptotique de $\mathrm{card}\{P \in U(k) \mid H(P) \leqslant B\}$ (cf. [Ba-Ma 90], [Th 93], [Pe 95], par exemple). C'est cette dernière méthode que nous emploierons par la suite.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 11G35, 14G05, 14G25, 14J26.
Mots clefs. — Points rationnels, hauteur, surface de Hirzebruch.

D'autre part, lorsqu'on s'intéresse à la répartition des points rationnels d'une classe de variétés, on est tenté de regarder cette répartition sur les modèles minimaux. Nous proposons dans ce travail d'étudier cette question sur les modèles minimaux des surfaces rationnelles, et donc sur les surfaces géométriquement réglées F_m (voir §2), qui sont également connues comme les surfaces de Hirzebruch. Signalons que les surfaces F_m sont des variétés toriques. Les résultats que nous présentons affinent, par une tout autre méthode, un théorème plus général sur les variétés toriques dû à Batyrev et Tschinkel [Ba-Ts 96] restreint à notre cas.

Dans un premier temps, nous rappellerons la définition de telles surfaces, ainsi que quelques-unes de leurs propriétés géométriques. Au deuxième paragraphe, nous déterminons le comportement asymptotique de

$$\operatorname{card}\{P \in U(\mathbb{Q}) \mid H_D(P) \leqslant B\}$$

pour une famille de diviseurs amples, et verrons, que s'ils sont uniformément répartis pour les plongements considérés, ils ne le sont pas pour d'autres.

Nous tenons à remercier Marc Hindry avec qui nous avons eu de nombreuses et fructueuses discussions lors de l'élaboration de ce travail, ainsi qu'Emmanuel Peyre, Philippe Satgé et le rapporteur de ce travail.

2. Géométrie des surfaces de Hirzebruch

Dans ce paragraphe, nous travaillons sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Rappelons tout d'abord la définition d'une surface réglée et d'une surface géométriquement réglée.

Définition 2.1

(a) Une surface S est réglée si elle est birationnellement isomorphe à $C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe lisse. Si C est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, S est dite rationnelle.

(b) Une surface est géométriquement réglée de base C, où C est une courbe lisse, s'il existe un morphisme lisse $p : S \to C$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Un Théorème de Noether-Enriques nous assure qu'une surface géométriquement réglée est réglée, ce qui n'est pas évident *a priori* ([Be 78], chap. 3). D'autre part les modèles minimaux de $C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe lisse non rationnelle, sont les surfaces géométriquement réglées de base C. Intéressons-nous maintenant aux surfaces géométriquement réglées rationnelles (voir [Be 78] chap. 3 et 4, ou [Ha 77] chap. V, §2).

Proposition 2.2. — *Les seules surfaces géométriquement réglées rationnelles sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont les surfaces F_m définies par :*

$$F_m = \mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1}(m)) \qquad (m \geqslant 0).$$

Les surfaces F_m sont minimales sauf pour $m = 1$ et F_m n'est pas isomorphe à F_ℓ si $m \neq \ell$.

Rappelons que F_0 est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, F_1 est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ éclaté en un point et les surfaces rationnelles minimales sont les surfaces F_m, sauf pour $m = 1$, et $\mathbb{P}^2$.

Notons h (respectivement f) la classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$ du fibré $O_{F_m}(1)$ (respectivement d'une fibre).

Proposition 2.3. — *Soit une surface F_m.*

a) *On a $\mathrm{Pic}(F_m) = \mathbb{Z}h + \mathbb{Z}f$ avec :*

$$f^2 = 0, \qquad h^2 = m, \qquad f \cdot h = 1.$$

b) *Si $m \geqslant 1$ il existe une unique courbe irréductible C_m sur F_m de carré négatif. La courbe C_m est rationnelle et si l'on note c sa classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$, on a :*

$$c = h - mf, \qquad c^2 = -m.$$

c) *Notons ω_m la classe du diviseur canonique dans $\mathrm{Pic}(F_m)$, alors :*

$$\omega_m = -2h + (m-2)f.$$

d) *Soit $D = ah + bf$. Alors :*

$$D \text{ est très ample} \iff D \text{ est ample} \iff a > 0, \quad b > 0.$$

e) *Notons $\overline{NE}(F_m)$ le cône fermé dans $\mathrm{Pic}(F_m) \otimes \mathbb{R}$ engendré par les classes des courbes irréductibles de F_m, alors :*

$$\overline{NE}(F_m) = \{D \in \mathrm{Pic}(F_m) \otimes \mathbb{R} \mid D = ah + bf \text{ avec } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant -ma\}.$$

Soient $m \geqslant 1$, C une courbe irréductible sur F_m et $\alpha h + \beta f$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$. Alors :

$$C \neq C_m \Rightarrow \alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant 0,$$

en particulier $\alpha m + \beta \geqslant 1$.

f) *Soient $D = ah + bf$ une classe de diviseurs amples et*

$$\alpha(D) = \min\{t \in \mathbb{R} \mid tD + \omega_m \in \overline{NE}(F_m)\}.$$

Alors, pour $m \geqslant 2$:

$$\alpha(D) = \frac{2}{a}.$$

La démonstration des assertions a), b), c), d), et e) peut être consultée dans [Ha 77] chap. V, §2, ou [Be 78] chap. 3 et 4. L'assertion f), est une conséquence immédiate de e). Notons que $-\omega_m$, pour $m \geqslant 2$, appartient à l'intérieur de $\overline{NE}(F_m)$, mais qu'il n'est pas ample.

Géométriquement, les surfaces F_m peuvent être interprétées comme des transformations élémentaires de $\mathbb{P}^2$ (c'est-à-dire comme une succession d'éclatements et de contractions, [Be 78] chap. 3 exo 1, ou [Ha 69]), ou encore comme une réunion de courbes rationnelles. Notons que c'est surtout du point de vue de la répartition asymptotique que F_m doit être vue comme la réunion de courbes rationnelles, d'un point de vue géométrique le fait que F_m soit réglée est plus intéressant et donné par hypothèse.

Proposition 2.4. — *Soient $m \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$ deux entiers, et posons $d = m + 2b$. Soient R_b et R_{d-b} les deux courbes rationnelles de $\mathbb{P}^{d+1}$ définies par :*

$$R_b = \{(U_1^b, U_1^{b-1}V_1, \dots, U_1V_1^{b-1}, V_1^b, 0, \dots, 0) \mid (U_1, V_1) \in \mathbb{P}^1\}$$

$$R_{d-b} = \{(0, \dots, 0, U_2^{d-b}, U_2^{d-b-1}V_2, \dots, U_2V_2^{d-b-1}, V_2^{d-b}) \mid (U_2, V_2) \in \mathbb{P}^1\},$$

et ψ un isomorphisme de R_b sur R_{d-b}. Soit alors $F_{m,b}$ définie par :

$$F_{m,b} = \left\{ (SU_1^b, SU_1^{b-1}V_1, \dots, SV_1^b, TU_2^{d-b}, TU_2^{d-b-1}V_2, \dots, TV_2^{d-b}) \middle| \begin{array}{l} (S,T) \in \mathbb{P}^1,\ (U_1,V_1) \in \mathbb{P}^1,\ (U_2,V_2) \in \mathbb{P}^1 \\ \psi(U_1^b, \dots, V_1^b, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, U_2^{d-b}, \dots, V_2^{d-b}) \end{array} \right\}.$$

Alors la surface $F_{m,b}$ est isomorphe à la surface F_m plongée par le système $|h + bf|$ dans $\mathbb{P}^{d+1}$; notons φ_b le plongement associé tel que $\varphi_b(F_m) = F_{m,b}$.

Donner l'image d'une fibre de la surface F_m (resp. de C_m) par φ_b revient à fixer U_1 et V_1 (resp. à fixer $T = 0$) ; notons $F_{(U_1,V_1)}$ son image.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Gr-Ha 78] p. 523-524, ou [Be 78] chap. 4, exo 2, ou [Ha 77] chap. V, Corollaire 2.19. Terminons par une remarque.

Remarque 2.5. — Toute surface lisse de degré d dans $\mathbb{P}^{d+1}$ qui n'est pas contenue dans un hyperplan est une surface F_m, ou la surface de Veronese dans $\mathbb{P}^5$, ou $\mathbb{P}^2$.

3. Répartition des points rationnels des surfaces de Hirzebruch

Rappelons tout d'abord quelques propriétés vérifiées par la fonction de Möbius μ et l'indicatrice d'Euler φ (voir par exemple [Ap 76] chap. 2) qui nous seront très utiles lors du décompte des points $\mathbb{Q}$-rationnels de hauteur bornée des surfaces F_m. Quelque soit le réel x notons $[x]$ sa partie entière.

Lemme 3.1. — *Soit $x \geqslant 2$.*

a)
$$\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^\alpha}=\frac{1}{\zeta(\alpha)}+O\Big(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big)\ \textit{pour}\ \alpha>1,$$
$$\sum_{d\leqslant x}\frac{|\,\mu(d)\,|}{d}=O(\mathrm{Log}\,x),$$
$$\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]^2=\frac{x^2}{\zeta(2)}+O(x\,\mathrm{Log}\,x).$$

b)
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\mathrm{Log}\,x),$$
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}\mathrm{Log}\,x+O(1),$$
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=\frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}+O(x^{2-\alpha})\ \textit{pour}\ \alpha>2.$$

On pourra consulter [Ap 76], chap. 3, pour les démonstrations de ces égalités. Signalons également que les deux égalités
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}=o(1)\qquad\text{et}\qquad\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x)$$
sont équivalentes au Théorème des nombres premiers.

Soient F_m une surface $\mathbb{Q}$-rationnelle, φ_b le plongement associé à $h+bf$ tel que $\varphi_b(F_m)$ est égal à $F_{m,b}$ (cf. §2) et un point $P\in F_m(\mathbb{Q})$. Quite à changer l'isomorphisme ψ de R_b sur R_{d-b}, on peut supposer dans la proposition 2.4 que $U_1=U_2$ et $V_1=V_2$; posons donc :
$$\varphi_b(P)=(SU^b,\dots,SV^b,TU^{d-b},\dots,TV^{d-b}),$$
avec $(S,T)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$, $(U,V)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$, $\mathrm{pgcd}(S,T)=1$ et $\mathrm{pgcd}(U,V)=1$.

Dans ces conditions, on peut définir la hauteur de P associée à $h+bf$ comme étant :
$$H_{h+bf}(P)=\max\left(|S|\max\left(|U|,|V|\right)^b,|T|\ \max\left(|U|,|V|\right)^{d-b}\right).$$

En effet, si un entier q divise S il ne peut diviser U et V, donc également, TU^{d-b} et TV^{d-b}. La hauteur naturelle sur $\mathbb{P}^{d+1}$ induit donc bien la métrique H_{h+bf}.

Posons aussi $H(U,V)=\max(|U|,|V|)$ et notons :
$$N(X,g,B)=\mathrm{card}\{x\in X\ \mid\ g(x)\leqslant B\}.$$

Etudions maintenant la répartition des points $\mathbb{Q}$-rationnels des surfaces F_m pour $m\geqslant 2$. Nous nous restreignons aux cas $m\geqslant 2$ pour deux raisons ; la première est que la répartition des points rationnels de F_0 et F_1 est déjà connue sur tout corps de nombres. La deuxième est par souci de clarté. En effet, l'estimation de $N(F_m(\mathbb{Q}), H_{h+bf}, B)$ admet trois cas particuliers, $b = 1$ et $m = 0$, $b = 2$ et $m = 0$, $b = 1$ et $m = 1$, par la méthode que nous emploierons. Nous laissons en exercice la vérification que la méthode qui suit, appliquée aux surfaces F_0 et F_1 redonne les résultats escomptés.

Théorème 3.2. — *Soient les entiers $b \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, F_m une surface $\mathbb{Q}$-rationnelle, $F_{(t)}$ une fibre de F_m qui par le plongement φ_b a pour image $F_{(U,V)}$ et C_m la courbe irréductible de F_m de carré négatif. Alors :*

(a) $$N(F_m(\mathbb{Q}),\ H_{h+bf}, B) = \frac{8}{\zeta(2)} \cdot \frac{\zeta(2b+m-1)}{\zeta(2b+m)} B^2 + \begin{cases} O(B \operatorname{Log} B) & \textit{pour } b \geqslant 2 \\ O(B \operatorname{Log}^2 B) & \textit{pour } b = 2 \\ O(B^{1+\frac{1}{m+1}} \operatorname{Log} B) & \textit{pour } b = 1 \end{cases}$$

(b) $$N(F_{(t)}(\mathbb{Q}), H_{h+bf}, B) = \frac{2B^2}{\zeta(2)} H(U,V)^{-2b-m} + O(B \operatorname{Log} B)$$

(c) $$N(C_m(\mathbb{Q}), H_{h+bf}, B) = \frac{2B^{\frac{2}{b}}}{\zeta(2)} + O(B^{\frac{1}{b}} \operatorname{Log} B).$$

Remarque 3.3. — Ainsi que l'a remarqué le rapporteur de ce travail, suite à la démonstration de ce théorème, on peut interpréter la constante asymptotique pour F_m de la manière suivante. Pour chaque fibre $F_{(U,V)}$ de F_m donnée par deux entiers U et V premiers entre eux et paramétrée par $(S : T)$ décrivant $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$, la restriction de la hauteur est donnée par

$$H_{F_{(U,V)}}((S:T)) = \max(|S| \max(|U|, |V|)^b, |T| \max(|U|, |V|)^{d-b})$$

si $\operatorname{pgcd}(S,T) = 1$. La constante correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} C_H(F_{(U,V)}) &= \frac{1}{2} \operatorname{Vol}(F_{(U,V)}(\mathbb{R})) \prod_p L_p(1, \operatorname{Pic} \overline{F_{(U,V)}}) \operatorname{Vol}(F_{(U,V)}(\mathbb{Q}_p)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{H(U,V)^b H(U,V)^{d-b}} \cdot \prod_p (1 - \frac{1}{p})(1 + \frac{1}{p}) \\ &= \frac{2}{\zeta(2)} H(U,V)^{-2b-m}. \end{aligned}$$

La constante pour F_m est alors la somme sur toutes les fibres de ce terme.

Avant de présenter un corollaire, rappelons une notation usitée.

Si g' et g sont deux fonctions réelles nous noterons, $g' \gg\ll g$, s'il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 vérifiant pour tout réel x :

$$c_1 g'(x) \leqslant g(x) \leqslant c_2 g'(x).$$

Corollaire 3.4. — *Soient a et b deux réels vérifiant $b \geqslant a > 0$, alors :*

$$N(F_m(\mathbb{Q}), H'_{ah+bf}, B) \gg\ll B^{2/a}$$

où H'_{ah+bf} est une hauteur de Weil associée à $ah + bf$. De même, pour tout ouvert Zariski dense U de F_m

$$N(U(\mathbb{Q}), H'_{ah+bf}, B) \gg\ll B^{2/a}.$$

Remarquons que lorsque b/a est entier, on obtient en fait une formule exacte en considérant la hauteur $(H_{h+\frac{b}{a}f})^a$.

Nous discuterons des sous-variétés accumulatrices de F_m après la démonstration de ce théorème et de son corollaire.

Démonstration. — Commençons par démontrer les assertions a) et b) du Théorème 3.2. Elles sont conséquences des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5. — *Soient $B \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ avec $\beta - \alpha \geqslant 1$, et posons :*

$$\begin{aligned} G(B,n,d,\alpha,\beta) = \operatorname{card}\{(S,T) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \mid |S| \leqslant |T| n^\alpha, \\ |T| n^\beta \leqslant B \textit{ et } \operatorname{pgcd}(|S|,|T|) = d\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(B,\alpha,\beta) = \operatorname{card}\{(S,T),(U,V) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})^2 \mid |S| \leqslant |T| \max(|U|,|V|)^\alpha, \\ |T| \max(|U|,|V|)^\beta \leqslant B, \operatorname{pgcd}(S,T) = 1 \textit{ et } \operatorname{pgcd}(U,V) = 1\}. \end{aligned}$$

Alors :

$$G(B,n,1,\alpha,\beta) = \frac{2B^2}{\zeta(2)} n^{\alpha-2\beta} + O(Bn^{\alpha-\beta} \operatorname{Log} Bn^{-\beta}),$$

et

$$J(B,\alpha,\beta) = \frac{16}{\zeta(2)} \cdot \frac{\zeta(2\beta-\alpha-1)}{\zeta(2\beta-\alpha)} \cdot B^2 + \begin{cases} O(B \operatorname{Log} B) & \textit{si } \beta-\alpha > 2 \\ O(B \operatorname{Log}^2 B) & \textit{si } \beta-\alpha = 2 \\ O(B^{1+\frac{1}{\beta}} \operatorname{Log} B) & \textit{si } \beta-\alpha = 1 \end{cases}$$

Lemme 3.6. — *Soient $B \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 2$, $\delta \geqslant 1$, et posons :*

$$\begin{aligned} G'(B,n,d,\gamma,\delta) = \operatorname{card}\{(S,T) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \mid |T| n^\gamma < |S|, \\ |S| n^\delta \leqslant B \textit{ et } \operatorname{pgcd}(|S|,|T|) = d\} \end{aligned}$$

$$J'(B,\gamma,\delta) = \mathrm{card}\{(S,T),(U,V) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})^2 \mid |T| \max(|U|,|V|)^\gamma < |S|,$$
$$|S| \max(|U|,|V|)^\delta \leqslant B, \mathrm{pgcd}(S,T) = 1 \textit{ et } \mathrm{pgcd}(U,V) = 1\}.$$

Alors :

$$G'(B,n,1,\gamma,\delta) = \frac{2B^2}{\zeta(2)} n^{-\gamma-2\delta} + O(Bn^{-\gamma-\delta} \operatorname{Log} Bn^{-\delta}),$$

et

$$J'(B,\gamma,\delta) = \frac{16}{\zeta(2)} \cdot \frac{\zeta(2\delta+\gamma-1)}{\zeta(2\delta+\gamma)} B^2 + O(B \operatorname{Log} B).$$

Admettons provisoirement ces deux lemmes, et vérifions que les assertions a) et b) du Théorème 3.2 en découlent. En effet on a :

$$N(F_m(\mathbb{Q}), H_{h+bf}, B) = \frac{1}{4}(J(B,m,m+b) + J'(B,m,b)),$$

$$N(F_{(t)}(\mathbb{Q}), H_{h+bf}, B) = \frac{1}{2}(G(B,H(U,V),1,m,m+b)$$
$$+ G'(B,H(U,V),1,m,b)).$$

Pour démontrer les assertions a) et b), il reste donc à démontrer ces deux lemmes. Commençons par le premier, le Lemme 3.5. Posons

$$F(B,n,\alpha,\beta) = \mathrm{card}\{(S,T) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \mid |S| \leqslant |T|n^\alpha,\ |T|n^\beta \leqslant B\}.$$

Ainsi :

$$F(B,n,\alpha,\beta) = 2 \sum_{1 \leqslant T \leqslant Bn^{-\beta}} (2[Tn^\alpha]+1) = 2B^2 n^{\alpha-2\beta} + O(Bn^{\alpha-\beta}).$$

Or :

$$F(B,n,\alpha,\beta) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant Bn^{-\beta}} 1 \cdot G(B,n,d,\alpha,\beta).$$

Comme 1 est Dirichlet inversible, d'inverse μ, on en déduit :

$$\begin{aligned} G(B,n,1,\alpha,\beta) &= \sum_{1 \leqslant d \leqslant Bn^{-\beta}} \mu(d) F\Big(\frac{B}{d}, n, \alpha, \beta\Big) \\ &= \sum_{1 \leqslant d \leqslant Bn^{-\beta}} \mu(d) \left\{ \frac{2B^2}{d^2} n^{\alpha-2\beta} + O\Big(\frac{B}{d} n^{\alpha-\beta}\Big) \right\} \\ &= \frac{2B^2}{\zeta(2)} n^{\alpha-2\beta} + O(Bn^{\alpha-\beta} \operatorname{Log} Bn^{-\beta}) \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 3.1.

Déterminons maintenant $J(B,\alpha,\beta)$. On a :

$$\begin{aligned} J(B,\alpha,\beta) &= \sum_{n\leqslant B^{1/\beta}} 8\varphi(n)G(B,n,1,\alpha,\beta) \\ &= \sum_{n\leqslant B^{1/\beta}} 8\varphi(n)\{\frac{2B^2}{\zeta(2)}n^{\alpha-2\beta} + O(Bn^{\alpha-\beta}\log Bn^{-\beta})\} \\ &= \frac{16}{\zeta(2)}\frac{\zeta(2\beta-\alpha-1)}{\zeta(2\beta-\alpha)}B^2 + \begin{cases} 0(B\log B) & \text{si } \beta-\alpha>2 \\ 0(B\log^2 B) & \text{si } \beta-\alpha=2 \\ 0(B^{1+\frac{1}{\beta}}\log B) & \text{si } \beta-\alpha=1 \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.1.

La démonstration du Lemme 3.5 étant terminée et celle du Lemme 3.6 étant identique à celle ci-dessus (en faisant attention), les assertions a) et b) sont démontrées. Pour l'assertion c), on a :

$$\begin{aligned} N(C_m(\mathbb{Q}),H_{h+bf},B) &= \frac{1}{2}\operatorname{card}\{(S,T),(U,V)\in(\mathbb{Z}^2\setminus\{0\})^2 \mid S=1\,,T=0 \\ &\qquad \text{et } \max\,(|S|H^b(U,V)\ ,\ |T|\ H(U,V)^{b+m})\leqslant B\} \\ &= \operatorname{card}\{(U,V)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \mid H^b(U,V)\leqslant B\} \end{aligned}$$

L'assertion c) est donc conséquence du Théorème de Schanuel [Sc 79].

Le Théorème 3.2 est donc démontré. Démontrons le Corollaire 3.4. Soient a et b deux réels, b_1 et b_2 deux entiers vérifiant $b\geqslant a>0$ et $1\leqslant b_2\leqslant b\leqslant b_1$. En particulier donc, il existe deux constantes strictement positives c_3 et c_4 tel que

$$c_3H_{h+b_2f}\leqslant H'_{h+bf}\leqslant c_4H_{h+b_1f}.$$

Ainsi :

$$N(F_m(\mathbb{Q}),H_{h+b_1f},B)\ll N(F_m(\mathbb{Q}),H'_{h+bf},B)\ll\ N(F_m(\mathbb{Q}),H_{h+b_2f},B)$$

ou encore, d'après le Théorème 3.2 :

$$N(F_m(\mathbb{Q}),H'_{h+bf},B)\gg\ll\ B^2 \qquad (b \text{ réel},\ b\geqslant 1).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} N(F_m(\mathbb{Q}),H'_{ah+bf},B) &\gg\ll\ N\left(F_m(\mathbb{Q}),H'_{h+\frac{b}{a}f},B^{1/a}\right) \\ &\gg\ll\ B^{2/a} \end{aligned}$$

L'estimation de $N(U(\mathbb{Q}),H'_{ah+bf},B)$ est identique, d'où notre corollaire, terminant ainsi notre démonstration. □

Cherchons maintenant les sous-variétés accumulatrices des surfaces F_m pour $m\geqslant 2$. Rappelons qu'une sous-variété W de F_m sera dite accumulatrice, pour $ah+bf$, s'il existe un ouvert Zariski dense U de F_m tel que

$$N(U(\mathbb{Q}),H'_{ah+bf},B)=o(N(W(\mathbb{Q}),H'_{ah+bf},B)).$$

D'autre part, lorsqu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-variétés accumulatrices, voire aucune, une sous-variété W' sera dite faiblement accumulatrice si pour tout ouvert Zariski dense U' de F_m suffisamment petit (*i.e.* ne contenant pas les sous-variétés accumulatrices)

$$N(U'(\mathbb{Q}), H'_{ah+bf}, B) \gg\ll N(W'(\mathbb{Q}), H'_{ah+bf}, B).$$

D'après le Théorème 3.2 les fibres de F_m sont faiblement accumulatrices pour les classes de diviseurs $h + bf$ ($b \geqslant 1$) et la courbe C_m l'est pour la classe de diviseur $h + f$. En fait ce sont les seules.

Proposition 3.7. — *Soient $a > 0$ et $b > 0$.*

(i) *Si $b > a$, alors F_m n'admet pas de courbes accumulatrices, les fibres de F_m sont faiblement accumulatrices et ce sont les seules pour $ah + bf$.*
(ii) *Si $b = a$, alors F_m n'admet pas de courbes accumulatrices, les fibres de F_m et la courbe C_m sont faiblement accumulatrices et ce sont les seules pour $ah+bf$.*
(iii) *Si $b < a$, la courbe C_m est l'unique courbe irréductible accumulatrice, les fibres F_m sont faiblement accumulatrices et ce sont les seules pour $ah + bf$.*

Démonstration. — Soient $a > 0$, $b > 0$, une courbe irréductible C de F_m et $\alpha h+\beta f$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$. On a :

$$(ah + bf) \cdot (\alpha h + \beta f) = a(\alpha m + \beta) + \alpha b.$$

Démontrons les assertions (i) et (ii). D'après le Corollaire 3.4 il n'existe pas de courbes accumulatrices. Pour que C soit une courbe faiblement accumulatrice, pour $ah + bf$, il est nécessaire, d'après le Théorème de Schanuel [Sc 79] et le Corollaire 3.4, que

$$a(\alpha m + \beta) + \alpha b \; = \; a, \tag{1}$$

outre le fait d'être rationnelle.

Or $\alpha \geqslant 0$, $\alpha m + \beta \geqslant 0$, $\alpha m + \beta = 0$ si et seulement si $C = C_m$ (donc $\alpha = 1$, $\beta = -m$), et si $C \neq C_m$ alors $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ (cf. Proposition 2.3). Ainsi les fibres F_m sont faiblement accumulatrices ($\alpha = 0, \beta = 1$), la courbe C_m l'est pour $b = a$ et ne l'est pas si $b > a$. D'autre part, si C n'est pas une fibre et n'est pas C_m, C étant irréductible, nécessairement $\alpha > 0$, et donc (1) n'est pas vérifiée, d'où les assertions (i) et (ii).

Démontrons maintenant l'assertion (iii).

D'après le Théorème de Schanuel [Sc 79], le Théorème de Batyrev-Tschinkel [Ba-Ts 96], pour que C soit accumulatrice, il est nécessaire que

$$a(\alpha m + \beta) + \alpha b \; < \; a,$$

et pour que C soit faiblement accumulatrice l'égalité (1) doit être vérifiée. Ainsi comme pour (i) et (ii), nous en déduisons l'assertion (iii).

Terminons par un début de justificatif du fait que la courbe C_m soit accumulatrice, et pas seulement faiblement accumulatrice, dans le cas (iii) : le système linéaire $|h|$

sur F_m définit un morphisme $F_m \to \mathbb{P}^{m+1}$, qui est un plongement en dehors de C_m et contracte C_m sur un point ([Be 78], chap. 4). $\square$

Les Conjectures de Batyrev et Manin sont donc satisfaites par les surfaces F_m.

Références

[Ap 76] T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag (1976).

[Ba–Ma 90] V. Batyrev, Y. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), p. 27–43.

[Ba–Ts 95] V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Manin's conjecture for toric varieties*, prépublication IHES/M/95/93.

[Ba–Ts 96] V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of toric varieties*, Algebraic geometry 5 (Manin's Festschrift), Journal Math. Sciences **82** n°1 (1996), p. 3220-3239.

[Be 78] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque **54** (1978).

[Bi 97] H. Billard, *Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$*, Compo. Math. **108** (1997), p. 247–275.

[Bir 62] B. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Royal. Soc. London **265** (1962), p. 245–263.

[Co–Si 86] G. Cornell, J. Silverman (Eds), *: Arithmetic geometry*, Springer Verlag (1986).

[Fr–Ma–Ts 89] J. Franke, Y. Manin, Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95**, (1989) p. 421–435.

[Gr–Ha 78] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience (1978).

[Ha 69] R. Hartshorne, *Curves with high self-intersection on algebraic surfaces*, Publ. Math. IHES **36** (1969) p. 111–125.

[Ha 77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer Verlag (1977).

[La 83] S. Lang, *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer Verlag (1983).

[Ne 65] A. Néron, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. **82**, N°2 (1965) p. 249–331.

[Pe 95] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79**, N°1 (1995) p. 101–218.

[Sc 79] S. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), p. 433–449.

[Si 91] J. Silverman, *Rational points on $K3$ surfaces : a new canonical height*, Invent. Math. **105** (1991), p. 347–373.

[Th 93] J. Thunder, *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compo. Math. **88** (1993), p. 155–186.

HERVÉ BILLARD, Université de Brest, Département de Mathématiques, 6 av. Le Gorgeu, B.P.809, 29285 Brest Cedex, France • *E-mail :* `Herve.Billard@univ-brest.fr`