BERNARD MALGRANGE

Les premiers travaux de Jean-Pierre Ramis

Astérisque, tome 296 (2004), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__1_0>

Astérisque
296, 2004, p. 1–6

LES PREMIERS TRAVAUX DE JEAN-PIERRE RAMIS

par

Bernard Malgrange

Résumé. — Exposé des travaux de Jean-Pierre Ramis avant 1978-80, travaux portant sur les espaces analytiques banachiques, la dualité en géométrie analytique et les $\mathcal{D}$-modules.

***Abstract* (Early works of Jean-Pierre Ramis).** — Exposition of Jean-Pierre Ramis' works before 1978-80, works devoted to Banach analytic spaces, duality in complex analysis and $\mathcal{D}$-modules.

Avant d'aborder mon sujet proprement dit, j'aimerais rappeler quelques souvenirs personnels. Je ne me souviens plus quand j'ai rencontré Jean-Pierre pour la première fois ; peut-être était-ce aux exposés qu'il avait faits en 1967 sur sa thèse au Séminaire Lelong. Nos relations sont devenues plus suivies lors du séminaire que j'avais organisé l'année suivante à Orsay, à l'usage des jeunes chercheurs. Pour éviter la dérive mondaine qui guette trop souvent les séminaires, il y avait deux règles :

– Premièrement, il ne figurait pas sur la liste officielle (cette liste était diffusée à l'époque par Belgodère, le bibliothécaire de l'Institut Henri Poincaré ; plus tard, cette publication a été remplacée par «l'officiel» qui sévit encore aujourd'hui) ; d'où son nom de «séminaire clandestin» auquel Jean-Pierre fait allusion dans quelques unes de ses publications.

– Deuxièmement, il y avait un droit d'entrée : chaque auditeur devait s'engager, au moins en principe, à faire un exposé.

Les sujets abordés : entre autres, théorème de dualité et de convexité pour les équations aux dérivées partielles et en analyse complexe, sujets que nous allons retrouver un peu plus loin. Jean-Pierre et Gabriel Ruget étaient parmi les participants les plus assidus et les plus actifs. Ce séminaire a bien marché ; j'en vois la meilleure preuve

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 01A70.
Mots clefs. — Travaux, Ramis.

dans le fait qu'il a continué sans problème en mon absence, en janvier-février 68 où j'étais à Princeton (et aussi, je crois en 68–69, où j'étais parti à Tunis ; en tout état de cause, l'inutilité de son organisateur est certainement la meilleure preuve de son succès).

Nos relations ont été interrompues en 68–69, où Jean-Pierre terminait sa thèse à Paris pendant que j'étais à Tunis comme je viens de le dire ; puis les deux années suivantes, où Jean-Pierre et Gabriel Ruget étaient eux à Tunis, comme coopérants militaires, pendant que, de mon côté, j'étais parti à Grenoble.

À son retour de service, en septembre 71, Jean-Pierre était nommé à Strasbourg, où il est resté jusqu'en 91, puis est allé à Toulouse. Depuis 71, et jusqu'à maintenant, nos relations mathématiques ont été constantes, soit par des visites de l'un ou de l'autre, soit par correspondance. Ma correspondance avec Jean-Pierre est, de très loin, la plus abondante et la plus suivie de celles que j'ai eues ; toutefois ces relations ne se sont traduites qu'une fois par un article en collaboration.

J'en viens à mon sujet. Le premier travail de Jean-Pierre, qui a fait l'objet de sa thèse, est relatif aux espaces de Banach. L'idée d'étudier les espaces analytiques banachiques venait de la thèse de Douady ; ils y servent à fabriquer des espaces de modules, et précisément l'analogue analytique des schémas de Hilbert qui paramètrent les sous-schémas propres d'un schéma donné. Mais le point de vue est ici totalement différent : chez Douady, ils servent d'intermédiaire pour fabriquer en fin de compte des espaces de dimension finie. Chez Jean-Pierre, suivant je crois, la suggestion d'Henri Cartan, son directeur de thèse, il s'agit d'étudier les germes de sous-ensembles analytiques d'un espace de Banach ; incidemment, les espaces analytiques banachiques généraux n'ont guère d'intérêt : par exemple, n'importe quel compact K peut être muni d'une structure d'espace analytique banachique, en le considérant comme l'ensemble des caractères de l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(K)$.

Les ingrédients essentiels de Ramis sont : d'une part, l'extension au cas banachique du théorème de préparation de Weierstrass ; d'autre part, le résultat suivant, beaucoup plus surprenant : les anneaux de germes de fonctions holomorphes sur un Banach sont factoriels, contrairement à ce qu'aurait pu laisser penser la démonstration usuelle, par récurrence sur le nombre de variables.

À partir de là, Ramis montre que, pour les germes analytiques de codimension finie, *i.e.*, définissables par un nombre fini d'équations, on a des propriétés presque aussi bonnes qu'en dimension finie : décomposition en un nombre fini de composantes irréductibles, théorème des zéros, propriétés des lieux singuliers, généralisation des théorèmes de Remmert-Stein et de Chow, etc. ; les idéaux correspondants sont les idéaux réduits (= égaux à leur racine) qui ont un système fini de générateurs en tant qu'idéaux réduits (pas en tant qu'idéaux tout court) [Il est amusant de noter l'analogie avec la situation que l'on rencontre en algèbre différentielle.] Cette thèse a fait l'objet d'un livre, paru aux Ergebnisse en 1970.

Ses résultats sont utilisés dans la thèse de Ruget, consacrée aux cycles analytiques de dimension infinie. Je ne sais pas s'ils ont été souvent utilisés depuis ; c'est en tout cas une théorie bien au point, à la disposition des amateurs éventuels.

J'en viens maintenant au second sujet : la dualité en analyse complexe. La situation était la suivante : après le théorème de dualité de Serre, relatif aux fibrés vectoriels sur une variété analytique complexe lisse, on savait traiter le cas d'un faisceau cohérent sur une variété (j'avais donné une première méthode, utilisant la division des distributions ; puis Grothendieck m'en avait indiqué une autre, plus élémentaire en dualisant sur un recouvrement de Stein). D'autre part, Grothendieck avait développé une théorie générale en géométrie algébrique englobant non seulement les variétés singulières, mais aussi les situations relatives (*i.e.*, les morphismes $X \to Y$, le cas absolu étant celui où $Y =$ un point). Le problème se posait donc d'établir des résultats analogues en géométrie analytique, et aussi d'en tirer des conséquences pour les espaces p-convexes ou p-concaves.

C'est ce programme que Ramis va réaliser dans une série de 4 articles, la plupart en collaboration avec G. Ruget, et l'un, en outre, en collaboration avec J.-L. Verdier.

Le premier article, consacré au cas absolu, définit le complexe dualisant $K_X^{\cdot}$ d'un espace analytique X général (complexe qui, dans le cas lisse, se réduit à Ω^n décalé de n, $n = \dim X$). La construction est directement inspirée de celle de Grothendieck en géométrie algébrique : en gros, on considère l'anneau des germes en un point comme un schéma affine, auquel on applique la construction algébrique. Il faut ensuite se recoller d'un point aux points voisins.

On emploie alors la méthode de Grothendieck des recouvrements de Stein mentionnée ci-dessus ; contrairement au cas des schémas où l'on a un énoncé purement algébrique, on obtient alors un énoncé vectoriel topologique d'un type qui avait été dégagé par Martineau, et qui est le suivant : on a deux complexes vectoriels topologiques (définis à quasi-isomorphisme topologique près), en dualité, représentant respectivement $R\Gamma(X, \mathcal{F})$ et $R\operatorname{Hom}_c(X; \mathcal{F}, K_X^{\cdot})$ [ou aussi $R\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ et $R\operatorname{Hom}(X; \mathcal{F}, K_X^{\cdot})$]. Ce théorème ne nécessite pratiquement pas d'hypothèses ; mais ils ne donne de résultats sur les groupes de cohomologie que si l'on sait que ceux-ci sont *séparés* (dans la situation qui nous occupe, un lemme de Schwartz affirme qu'il suffit pour cela qu'ils soient de dimension finie) ; on pourra alors déduire d'informations sur un complexe des informations sur l'autre. Dans un autre article, Ramis utilise ces résultats dans le cas (p, q) convexe-concave pour étendre des résultats d'Andreotti-Grauert.

Un autre article, avec Ruget et Verdier, étend ces résultats aux morphismes propres ; bien sûr, le théorème des images directes de Grauert qui affirme la cohérence des images directes $R^k f_* \mathcal{F}$ d'un faisceau cohérent par une application propre joue ici un rôle essentiel. C'est le moment de signaler que le théorème de Grauert, longtemps obscur, avait reçu entre 71 et 74 trois démonstrations agréables, dues respectivement à Forster-Knorr, Kiehl-Verdier, et Houzel.

Le dernier article de Ramis et Ruget, intitulé «Résidus et dualité» (par analogie avec le livre de Hartshorne), se propose, lui, l'objectif beaucoup plus ambitieux et difficile que les précédents d'avoir un énoncé de dualité tout à fait général, et d'en déduire des résultats sur les espaces relativement p-convexes ou p-concaves. Il fait appel pour cela à toute une série de techniques.

D'une part, l'algèbre homologique évétique reprise de Kiehl-Verdier (et développée) ; ici, il ne suffit pas de mettre des topologies sur des $R\,\mathrm{Hom}$, mais il faut définir des $R\,\mathrm{Homtop}$, des Tortop, etc.

D'autre part, les résolutions semi-simpliciales de Forster-Knorr, qui permettent de donner, en un certain sens, une trivialisation des morphismes, et aussi de donner des résolutions semi-simpliciales libres des faisceaux cohérents.

Bien sûr, pour énoncer les théorèmes généraux de dualité, outre les ingrédients précédents, on a besoin du complexe dualisant $K_X^{\cdot}$; mais, pour représenter l'image directe à support propre $Rf_!K_X^{\cdot}$, on a encore besoin d'un autre ingrédient remarquable et qui m'a beaucoup surpris à l'époque : il s'agit de la possibilité de plonger quasi-isomorphiquement $K_X^{\cdot}$ dans le complexe de Dolbeault-de Rham des courants ${}'\mathcal{D}^{n,\cdot}$ (décalé de n ; ${}'\mathcal{D}^{p,q}$ désigne les courants de bidegré p,q) ; et ceci, d'une manière compatible aux immersions. Ceci se fait à partir de la théorie des valeurs principales et résidus de Herrera.

Je ne sais pas si cette construction, que je trouve un peu mystérieuse, a été reprise et développée ultérieurement ; si ce n'est pas le cas, elle mériterait de l'être, et aussi d'être plus connue, indépendamment de son application à la dualité.

Je ne donnerai pas l'énoncé lui-même des deux théorèmes de dualité «abstraits» obtenus à partir de là (en gros, il s'agit d'énoncés disant que la dualité échange image directe et image directe à support propre). Ramis et Ruget les utilisent dans les cas p-convexe et p-concave, par exemple pour obtenir le résultat suivant : soit $f : X \to Y$, fortement p-concave (avec X dénombrable à l'infini, de dimension bornée) ; si G est $\mathcal{O}_X$-cohérent, $R^k f_* G$ est cohérent pour $k \leq \operatorname{proj} G - p - 2 - \dim Y$. Ils donnent aussi des exemples pour montrer que cette borne est la meilleure possible.

Outre le théorème de dualité, la démonstration utilise un résultat de rétrécissement démontré par Ramis dans le second article cité ci-dessus, et aussi la méthode d'Houzel de démonstration de la cohérence (ce qui fait qu'on utilise finalement les méthodes des trois articles relatifs au théorème de Grauert mentionnés plus haut !).

Finalement, leurs résultats, avec ceux de Siegfried dans le cas p-convexe relatif, sont optimaux dans les cas p-convexe et p-concave relatifs ; par contre en 1994 Ramis notait que, dans le cas convexe-concave, on n'a pas jusqu'à présent réussi à étendre à la situation relative les résultats optimaux connus dans le cas absolu ; je ne sais pas si la situation a changé depuis.

J'en viens maintenant au troisième sujet dont je voulais parler, celui de la contribution de Ramis à la théorie des modules holonomes. Je serai ici assez bref ; d'une part, parce que sa contribution se limite pour l'essentiel à deux articles, et qu'il n'a pas poursuivi dans cette direction ; d'autre part, parce que ce sujet est, dans une grande mesure, un passage intermédiaire entre ses préoccupations antérieures, et celles qui vont suivre à partir de 1977, et qui sont toujours les siennes à l'heure actuelle.

Je dirai juste un mot du second article « Dimension cohomologique des modules fuchsiens », datant de 1980, et qui examine les relations entre une notion de dimension homologique locale des modules holonomes réguliers, et une notion de profondeur du complexe de leurs solutions ; ces travaux sont liés à des résultats de Barth et Ogus, et les généralisent.

J'en dirai un peu plus de l'autre article « Variations sur le thème GAGA », paru au Séminaire Lelong-Skoda 76–77. Plus que du thème GAGA proprement dit, il s'agit plutôt de variations sur le théorème de comparaison des cohomologies de de Rham algébrique et transcendante de Grothendieck. Cet article consiste essentiellement à démontrer et à faire un certain nombre de commentaires sur le théorème suivant :

Soit M un module holonome sur X lisse, et soit Y une hypersurface de X ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) *L'application naturelle* $R\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) \mid Y \to R\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_{\widehat{X}|Y})$ *est un quasi-isomorphisme* ($\mathcal{O}_{\widehat{X}|Y}$ *désigne le complété formel de* X *le long de* Y*).*

ii) *L'application naturelle* $\mathrm{DR}(R\Gamma_{[Y]}M) \to R\Gamma_Y \,\mathrm{DR}\, M$ *est un quasi-isomorphisme* (DR = *complexe de de Rham ;* $R\Gamma_{[Y]}M$ = *cohomologie à support « modéré » dans* Y*).*

iii) *L'application naturelle*

$$\mathrm{DR}\, R\Gamma_{[Y]}M \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_X^\infty \longrightarrow R\Gamma_Y \,\mathrm{DR}\, M$$

est un quasi-isomorphisme.

Ramis propose de définir la régularité des modules holonomes par le fait que ces propriétés sont vraies pour tout Y ; par exemple, avec cette terminologie, le théorème de Grothendieck signifie essentiellement que $\mathcal{O}_X$ est régulier. (En dimension un, il était connu, par des calculs de Deligne et de l'auteur, que ces propriétés sont équivalentes à la régularité à la Fuchs.)

L'intérêt de cette définition est qu'elle permet facilement d'établir des propriétés de conservation par image directe propre, ou par image réciproque ; son inconvénient est d'être implicite, et pas directement vérifiable sur les équations définissant un D-module.

Cette approche de Ramis est voisine de celle de Mebkhout, et elles se recoupent largement. (Incidemment, je signale aussi un autre point de contact ultérieur entre eux, à savoir l'extension à plusieurs variables par Laurent-Mebkhout de la filtration-Gevrey de l'irrégularité, due en dimension un à Ramis ; mais ici, je sors de mon sujet.)

De leur côté, Kashiwara et Kawai ont pris une approche différente : ils partent d'une définifion microlocale de la régularité, qui généralise essentiellement la définition de Fuchs, et ils montrent son équivalence avec la définition ci-dessus.

Kashiwara et Mebkhout ont continué leurs travaux sur ce sujet, leurs résultats culminant dans ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler « correspondance de Riemann-Hilbert ». De son côté, Jean-Pierre n'a pas poursuivi et s'est tourné vers les singularités irrégulières et tous les problèmes qu'elles posent : classes de Gevrey, sommabilité, phénomène de Stokes, relations avec Galois différentiel, etc. Je laisse aux autres orateurs le soin de vous en parler.

B. Malgrange, Université de Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF, UFR de Mathématiques, B.P. 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex (France)
E-mail : Bernard.Malgrange@ujf-grenoble.fr