Formes automorphes (II) - Le cas du groupe $GDp(4)$ - Pages préliminaires

Astérisque, tome 302 (2005), p. I-XIV
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__R1_0>

ASTÉRISQUE 302

FORMES AUTOMORPHES (II)

LE CAS DU GROUPE GSp(4)

édité par

Jacques Tilouine

Henri Carayol

Michael Harris

Marie-France Vignéras

Société Mathématique de France 2005

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Tilouine
LAGA, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : `tilouine@math.univ-paris13.fr`

H. Carayol
IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
E-mail : `carayol@math.u-strasbg.fr`

M. Harris
Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 France.
E-mail : `harris@math.jussieu.fr`

M.-F. Vignéras
Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.
E-mail : `vigneras@math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F32, 11F46, 11F70, 11F72, 11F80, 11F85, 11G18, 11G40, 11R34, 11R39, 11S37, 14C15, 14C17, 14F20, 14G10, 20G25, 22E35, 22E55.

Mots clefs. — Fontions zêtas, formule des traces d'Arthur-Selberg, variétés de Shimura, représentations galoisiennes, représentation galoisiennes p-adiques, représentation cuspidales, formes modulaires de Siegel, motifs, variétés de Siegel, mauvaise réduction, cycles évanescents, niveau parahorique, relations d'Eichler-Shimura, lemme fondamental, intégrales orbitales pondérées, endoscopie tordue.

FORMES AUTOMORPHES (II)

LE CAS DU GROUPE GSp(4)

édité par Jacques Tilouine, Henri Carayol, Michael Harris, Marie-France Vignéras

Résumé. — Ce volume fait suite au volume 298 consacré aux Formes Automorphes. Il traite un sujet plus restreint que le précédent puisqu'il est exclusivement consacré aux représentations automorphes pour le groupe GSp(4), la plupart du temps sur le corps des rationnels. Il traite de questions géométriques (cohomologie des variétés de Siegel), arithmétiques (construction et étude des représentations galoisiennes associées aux formes cuspidales cohomologiques) et d'analyse harmonique (lemme fondamental tordu avec poids). Toutes ces questions avaient été évoquées plus ou moins directement lors du Semestre Automorphe de Paris en 2000, mais il s'agit en général de développements ultérieurs au Semestre lui-même.

Abstract **(Automorphic forms (II), the case of the group** GSp(4)**)**

This volume is the sequel to Volume 298 devoted to Automorphic Forms. It deals however with a narrower topic since it only concerns automorphic representations of the group GSp(4), mostly over the rationals. It deals with geometric questions (cohomology of Siegel varieties), arithmetic ones (Galois representations associated to cohomological cusp forms) and Harmonic Analytical ones (twisted fundamental lemma with weights). These questions had been more or less mentioned during the Paris Automorphic Semester in 2000, but the contributions gathered here are mostly later developments.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Ces notes reprennent pour l'essentiel le contenu de mon article « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », en y remplacant partout le système de coefficients constant par un système de coefficients arbitraire.

Nous construisons et étudions certaines représentations l-adiques mixtes irréductibles de dimension quatre du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$, attachées à des representations automorphes cuspidales irréductibles Π du groupe de similitudes symplectiques $\mathrm{GSp}(4)$, dont la composante archimédienne Π_∞ appartient à la série discrète. Nous présentons également quelques propriétés de ces représentations l-adiques.

Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ qui est non ramifiée en p. Nous démontrons que le polynôme caractéristique de l'automorphisme de Frobenius agissant sur le φ-module filtré de la représentation galoisienne p-adique associée à π s'exprime en termes des paramètres de Langlands de la composante locale de π en p.

Dans cet article, nous mettons en œuvre la méthode des systèmes de Taylor-Wiles dans le cas du groupe GSp_4. Nous démontrons ainsi que certaines représentations galoisiennes symplectiques ρ de rang quatre à valeurs p-adiques, de

poids de Hodge-Tate réguliers et p-petits, proviennent de formes modulaires de Siegel cuspidales propres cohomologiques. On doit supposer pour cela un certain nombre d'hypothèses. Elles concernent la modularité de la représentation résiduelle $\overline{\rho} = \rho \pmod p$, la grande taille de son image, le caractère ordinaire ou cristallin de la représentation ρ en p, et, si l'on inclut un conducteur auxiliaire, des conditions de minimalité aux premiers divisant le conducteur, qui généralisent celles introduites par Wiles pour GL_2. Nos hypothèses sont naturelles mais certaines (principalement la modularité résiduelle) semblent difficiles à vérifier.

Nous démontrons le lemme fondamental tordu pondéré pour le groupe $\mathrm{GL}(4) \times \mathrm{GL}(1)$ relativement à un certain automorphisme extérieur α qui permet de décrire $\mathrm{GSp}(4)$ comme groupe endoscopique tordu. Cette version du lemme fondamental est nécessaire pour stabiliser la formule des traces tordue pour le couple $(\mathrm{GL}(4) \times \mathrm{GL}(1), \alpha)$. Cette formule des traces tordues est requise pour la classification d'Arthur du spectre discret de $\mathrm{GSp}(4)$ en termes des représentations automorphes de $\mathrm{GL}(4)$.

ABSTRACTS

Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois
GÉRARD LAUMON 1

In these notes I extend the results of my paper "Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$" to the case of an arbitrary system of coefficients.

Four dimensional Galois Representations
RAINER WEISSAUER 67

We construct four dimensional irreducible mixed l-adic representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$, which are attached to irreducible cuspidal automorphic representations Π of the symplectic group of similitudes $\mathrm{GSp}(4)$, whose archimedean component Π_∞ belongs to the discrete series, and discuss some of the properties of these l-adic representations.

Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$
ERIC URBAN 151

Let π be a cohomological cuspidal representation of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ which is unramified at p. We prove that the characteristic polynomial of the Frobenius automorphism acting on the filtred φ-module of the p-adic Galois representation associated to π is expressed in terms of the Langlands parameters of the local component of π at p.

Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4
ALAIN GENESTIER & JACQUES TILOUINE 177

In this paper, we apply the method of Taylor-Wiles systems in the case of the group GSp_4. We thus show that certain symplectic rank four Galois representations ρ with p-adic values and p-small regular Hodge-Tate weights,

do come from cohomological cuspidal Siegel eigenforms. For this purpose, one needs to assume certain assumptions. They deal with the residual modularity of $\overline{\rho} = \rho \pmod{p}$, the large size of its image, the ordinarity or crystallineness of ρ at p, and, if one includes an auxiliary conductor, some minimality conditions for ρ at primes dividing the conductor, which generalize those introduced by Wiles for GL_2. Our assumptions are natural, but some (mainly the residual modularity) are difficult to verify.

We prove the twisted weighted fundamental lemma for the group $\mathrm{GL}(4) \times \mathrm{GL}(1)$ relative to a certain outer automorphism α, which yields GSp(4) as a twisted endoscopic group. This version of the fundamental lemma is needed to stabilize the twisted trace formula for the pair $(\mathrm{GL}(4) \times \mathrm{GL}(1), \alpha)$. This stabilized twisted trace formula is required for Arthur's classification of the discrete spectrum of GSp(4) in terms of automorphic representations of GL(4).

PRÉFACE

Le présent volume fait suite au volume « Formes Automorphes I » [**3**] des Actes du semestre consacré à ce sujet qui s'est déroulé de Février à Juillet 2000 au Centre Emile Borel de l'Institut Poincaré à Paris. De nombreuses contributions y ont été présentées, mais aussi des questions y ont été soulevées et des collaborations y ont été amorcées. Si on ne peut dire, contrairement au volume précédent, que toutes les contributions rassemblées ici avaient été présentées au cours du semestre, on peut du moins dire que toutes concernent voire même répondent à des questions évoquées lors des cours ou des conférences du semestre.

Le thème de ce volume est plus restreint que celui du semestre, puisqu'il ne concerne que les formes automorphes et les variétés de Shimura du seul groupe $\mathrm{GSp}(4)$ (et le plus souvent sur le seul corps des rationnels). Ce sujet est cependant d'importance puisqu'après le cas des formes modulaires elliptiques ou hilbertiennes, il est un des plus simples. Les autres cas accessibles sont d'une part le cas de $\mathrm{U}(2,1)$, pour lequel existe déjà un volume [**2**] qui lui est exclusivement consacré, et celui des formes intérieures de $\mathrm{U}(n,1)$ auquel a été consacré le travail de M. Harris et R. Taylor [**1**]. Il est donc naturel que paraisse aussi -même si elle est moins complète, une monographie consacrée à divers aspects de l'arithmétique des formes automorphes pour $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})$. Y sont présentés plusieurs nouveaux outils. D'abord, la construction complète des systèmes strictement compatibles de représentations galoisiennes de dimension 4 associés à une représentation automorphe cuspidale cohomologique de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})$; elle est poursuivie dans la contribution de G. Laumon qui construit par la méthode de Langlands de comparaison des formules des traces pour la cohomologie étale avec coefficients, des systèmes strictement compatibles de dimension $4a_\pi$; elle est achevée dans la contribution de R. Weissauer qui reprend une analyse amorcée par R. Taylor (*Invent. Math.* **112**, 1994) et la mène à son terme : l'existence de représentations galoisiennes associées de degré 4.

Le travail de D. Whitehouse réalise le programme de J. Arthur pour le groupe $\mathrm{GL}(4)$ en établissant le lemme fondamental tordu pondéré pour $\mathrm{GL}(4)$, ce qui permet le transfert des paquets de $\mathrm{GSp}(4)$ à $\mathrm{GL}(4)$ sur un corps local quelconque ; ce qui, à son tour, permettra de transférer des questions sur les représentations automorphes du groupe symplectique aux questions analogues pour les groupes unitaires $\mathrm{U}(2,2)$.

La propriété de p-ordinarité de la représentation p-adique associée à une représentation cuspidale $\pi = \pi^{p\infty} \otimes \pi_p \otimes \pi_\infty$ lorsque π_p est ordinaire est établie par E. Urban sous l'hypothèse de stabilité de π en la place archimédienne. Cette propriété est utilisée par Genestier et T. pour établir un théorème $R = T$ par la méthode des systèmes de Taylor-Wiles, ce qui démontre la modularité de certains motifs symplectiques de rang 4.

Bibliographie

[1] M. Harris & R. Taylor – *The Geometry and Cohomology of some simple Shimura Varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[2] R.P. Langlands & D. Ramakrishnan – *The zeta functions of Picard Modular Surfaces*, Publ. Math., vol. 13, CRM, Montréal, 1992.

[3] J. Tilouine, H. Carayol, M. Harris & M.-F. Vignéras (éds.) – *Formes Automorphes (I), Actes du Semestre du Centre Émile Borel, printemps 2000*, Astérisque, vol. 298, Paris, Société Mathématique de France, 2005.

Les organisateurs