

# *Astérisque*

PIERRE COLMEZ

## **Introduction**

*Astérisque*, tome 330 (2010), p. XIX-XXIII

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2010\\_\\_330\\_\\_R19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__R19_0)

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## INTRODUCTION

Ce volume est consacré aux applications de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules à celle des représentations  $p$ -adiques de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  en vue de l'établissement d'une correspondance de Langlands locale  $p$ -adique entre ces représentations et les représentations de dimension 2 du groupe de Galois absolu  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  de  $\mathbf{Q}_p$ . Il s'est écoulé un temps non négligeable<sup>(1)</sup> entre l'obtention des premiers résultats et la parution de ce volume, et cette petite introduction vise à expliquer ce qui est advenu des articles initiaux et les étapes de la construction de la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique via la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Nous renvoyons aux articles pour des introductions plus détaillées et à [9] pour une présentation des travaux antérieurs à l'introduction des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

**Fonctions  $L$   $p$ -adiques et représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .** — Fontaine ayant prouvé [19] que les représentations  $p$ -adiques de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  sont en équivalence de catégories avec les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales, il était assez naturel de penser qu'on devrait pouvoir lire la représentation  $\Pi(V)$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , attachée à une représentation  $V$  de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  par une hypothétique correspondance de Langlands locale  $p$ -adique, sur le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbf{D}(V)$  lui correspondant par l'équivalence de catégories de Fontaine. Ce fantasme a pris corps à la réception d'un article [10] où Breuil prouvait, par voie globale, que certaines des représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  qu'il avait définies [8] en vue d'une correspondance pour les représentations semi-stables de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ , avaient les propriétés qu'il conjecturait et, en particulier, n'étaient pas réduites à 0. Le résultat de Breuil suppose que la représentation semi-stable  $V$  que l'on considère est la restriction à  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  d'une représentation attachée à une forme modulaire  $f$ , primitive de niveau  $Np$ , avec  $(N, p) = 1$ . Dans ce cas, on sait [24] attacher à  $f$  une fonction  $L$   $p$ -adique (en utilisant les symboles modulaires), ce qui nous fournit une distribution  $\mu_f$  sur  $\mathbf{Q}_p$ , vecteur propre pour l'action de  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  agissant par  $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu_f = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(px) \mu_f$ , et Breuil a démontré que  $\mu_f$  était naturellement un élément du dual topologique  $\Pi(V)^*$

---

<sup>(1)</sup> Ce délai, dont je m'excuse, est largement imputable au gigantisme imprévu de l'article [7] de ce volume.

de  $\Pi(V)$ . Or on dispose d'une autre construction de  $\mu_f$  en partant du système d'Euler de Kato [22] et en utilisant la machine de Perrin-Riou [13, 25, 26] que l'on peut voir comme un facteur local en  $p$  de la fonction  $L$   $p$ -adique. En traduisant [14] cette machine de Perrin-Riou dans le langage des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules grâce à un résultat de Fontaine [12] selon lequel le module  $H_{\text{Iw}}^1(V)$  dans lequel vit le système d'Euler de Kato est naturellement isomorphe au sous-module  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  (où  $\psi$  est un inverse à gauche de  $\varphi$ ) du  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbf{D}(V)$  correspondant à  $V$ , on arrive à la conclusion que  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  fournit des éléments non nuls de  $\Pi(V)^*$  fixes par  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ce qui est un énoncé purement local susceptible d'être démontré localement et généralisé. Les résultats de ce volume sont le fruit de cette observation, et ont été obtenus en deux temps : l'étude de la série principale (2004 et début 2005) et la correspondance générale (2005-2008).

**La série principale.** — L'étude du  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé à une représentation semi-stable non cristalline  $V$  a permis [17] de démontrer (janvier-mars 2004) les propriétés conjecturales de la représentation  $\Pi(V)$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  que Breuil [8] lui avait attachée. Ce faisant, on obtient un isomorphisme  $\Pi(V)^* \cong (\check{\mathbf{D}}(V)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$  de représentations du sous-groupe mirabolique  $P(\mathbf{Q}_p)$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , où  $(\check{\mathbf{D}}(V)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$  est un module construit à partir du  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbf{D}(V)$  attaché à  $V$  en utilisant l'opérateur  $\psi$  mentionné ci-dessus.

Ces résultats ont été généralisés sur le champ par Berger et Breuil [3, 5] au cas où  $V$  est cristalline qui a pour particularité de voir apparaître des isomorphismes entre représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , ce qui joue un grand rôle dans les démonstrations.

Une traduction des résultats de Berger et Breuil en termes de caractères de  $\mathbf{Q}_p^*$  au lieu de valeurs propres de Frobenius a conduit (juillet 2004-mars 2005) à une extension de ces résultats [16] au cas où  $\Pi(V)$  est de la série principale ; la principale innovation par rapport aux cas précédents a résidé en la définition du concept de représentation trianguline de  $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}$  pour décrire les représentations galoisiennes associées aux représentations de la série principale via la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique.

Berger et Breuil [4] (dans un cas partiel) et Berger (dans le cas général, cf. [6] du présent volume) ont démontré que la correspondance ainsi définie pour la série principale était compatible avec la correspondance modulo  $p$  définie par Breuil [6, 7].

**Les foncteurs  $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$  et  $V \mapsto \Pi(V)$ .** — L'isomorphisme entre  $\Pi(V)^*$  et  $(\check{\mathbf{D}}(V)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$  dans les cas ci-dessus, amène naturellement à se demander s'il est possible de reconstruire le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbf{D}(V)$  à partir du  $P(\mathbf{Q}_p)$ -module topologique  $(\check{\mathbf{D}}(V)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ . La réponse est « oui » et fournit un foncteur  $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$  associant un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale (et donc aussi une représentation  $p$ -adique de  $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}$ ) à n'importe quelle représentation  $p$ -adique de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  (pas seulement celle de la série principale).

Kisin a remarqué, peu de temps après la conférence de Montréal de septembre 2005 où l'existence de ce foncteur avait été annoncée, qu'il suffirait de vérifier une injectivité au niveau des  $\text{Ext}^1$  pour en déduire, par prolongement analytique, en utilisant les résultats pour la série principale, une correspondance  $V \mapsto \Pi(V)$  associant une représentation de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  à n'importe quelle représentation de dimension 2 de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ . Ce résultat d'injectivité a été rapidement démontré, ce qui a conduit à l'article [15].

L'utilisation du prolongement analytique pour la définition de la correspondance rend l'étude de ses propriétés fines quasi impossible, ce qui a forcé une construction directe (reposant sur des formules pas très élégantes) de la correspondance  $V \mapsto \Pi(V)$ . En utilisant une grande partie [1, 2, 11, 13, 19, 23] du programme de Fontaine de classification des représentations  $p$ -adiques de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ , et les travaux de fondement de Schneider et Teitelbaum [27, 28], on peut alors étudier les vecteurs localement algébriques de  $\Pi(V)$ . Cela permet de prouver que la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique encode la correspondance classique [20, 21], confirmant l'un des espoirs à l'origine des travaux de Breuil sur le programme de Langlands  $p$ -adique.

**Contenu du volume.** — Donnons maintenant une brève description des articles du volume.

- [1] M.-F. VIGNÉRAS,  *$\ell$ -adic Banach representations of reductive  $p$ -adic groups when  $\ell \neq p$ .*  
Version développée d'une lettre à Breuil banachisant la correspondance  $\ell$ -adique classique.
- [2] P. COLMEZ, *Fonctions d'une variable  $p$ -adique.*  
Résumé compact, avec démonstrations, de l'analyse fonctionnelle  $p$ -adique utilisée dans la correspondance locale  $p$ -adique pour la série principale [4] et [5].
- [3] P. COLMEZ,  *$(\varphi, \Gamma)$ -modules et représentations du mirabolique de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .*  
Consacré à l'étude du  $P(\mathbf{Q}_p)$ -module  $(D^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$  qui joue un rôle fondamental dans les articles [4], [5] (où il est noté  $(\varprojlim_{\psi} D)_b$ ), [6] et [7].
- [4] L. BERGER et C. BREUIL, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .*  
Établit la correspondance pour les représentations devenant cristallines sur une extension abélienne de  $\mathbf{Q}_p$ .
- [5] P. COLMEZ, *La série principale unitaire de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .*  
Consacré au reste de la série principale.
- [6] L. BERGER, *Représentations modulaires de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et représentations galoisiennes de dimension 2.*  
Établit une compatibilité avec une correspondance modulo  $p$  pour la série principale.

- [7] P. COLMEZ, *Représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.*

Construit la représentation  $\mathbf{\Pi}(V)$  attachée à une représentation  $V$  de dimension 2 de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  et le foncteur  $\mathbf{\Pi} \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{\Pi})$  allant dans l'autre sens, et étudie vecteurs localement analytiques et localement algébriques de  $\mathbf{\Pi}(V)$ .

- [8] M. KISIN, *Deformations of  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$  and  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  representations.*

Explique comment construire la correspondance  $V \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{\Pi})$  à partir du foncteur  $\mathbf{\Pi} \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{\Pi})$ .

- [9] G. BÖCKLE, *Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of  $\mathbf{Q}_3$ .*

Calcule certains espaces de déformations galoisiens, ce qui permet de supprimer quelques hypothèses de [7] et [8].

Les articles initiaux [3, 5, 15, 16, 17] ont été découpés en morceaux et ont vu leurs résultats renforcés par ceux du présent volume. Ceux de [3, 5] sont inclus dans l'article [4] du volume et ceux de [15] dans l'article [7]. L'article [5] du volume regroupe des bouts de [17] et [16]; le reste de ces articles a donné naissance aux articles [2] et [3] de ce volume, ainsi qu'à [18].

### Références

- [1] L. BERGER – Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.
- [2] ———, Équations différentielles  $p$ -adiques et  $(\phi, N)$ -modules filtrés, *Astérisque* **319** (2008), p. 13–38.
- [3] L. BERGER & C. BREUIL – Représentations cristallines irréductibles de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , prépublication arXiv:math.NT/0410053.
- [4] ———, Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2 en poids moyen, prépublication arXiv:math.NT/0504388.
- [5] ———, Towards a  $p$ -adic Langlands programme, prépublication arXiv:math.NT/0408404.
- [6] C. BREUIL – Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . I, *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.
- [7] ———, Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.
- [8] ———, Invariant  $\mathcal{L}$  et série spéciale  $p$ -adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.
- [9] ———, Introduction générale, *Astérisque* **319** (2008), p. 1–12.
- [10] ———, Série spéciale  $p$ -adique et cohomologie étale complétée, *Astérisque* **331** (2010), p. 65–115.
- [11] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations  $p$ -adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.
- [12] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

- [13] P. COLMEZ – Théorie d’Iwasawa des représentations de de Rham d’un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 485–571.
- [14] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique, Séminaire Bourbaki, vol. 2002/03, exposé n° 919, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.
- [15] ———, Représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, prépublication (version provisoire et partielle) <http://people.math.jussieu.fr/~colmez/unicite.pdf>.
- [16] ———, Série principale unitaire pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et représentations triangulines de dimension 2, prépublication <http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf>.
- [17] ———, Une correspondance de Langlands locale  $p$ -adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication <http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf>.
- [18] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.
- [19] J.-M. FONTAINE – Représentations  $p$ -adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.
- [20] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001.
- [21] G. HENNIART – Une preuve simple des conjectures de Langlands pour  $\mathrm{GL}(n)$  sur un corps  $p$ -adique, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 439–455.
- [22] K. KATO –  $p$ -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004), p. 117–290.
- [23] K. S. KEDLAYA – A  $p$ -adic local monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 93–184.
- [24] B. MAZUR, J. TATE & J. TEITELBAUM – On  $p$ -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.
- [25] B. PERRIN-RIOU – Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.
- [26] ———, Fonctions  $L$   $p$ -adiques des représentations  $p$ -adiques, *Astérisque* **229** (1995).
- [27] P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM –  $U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations, *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.
- [28] ———, Algebras of  $p$ -adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

---

P. COLMEZ, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France  
*E-mail* : colmez@math.jussieu.fr