ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

JACQUES DENY

Un théorème sur les ensembles effilés

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 139-142
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__139_0>

UN THÉORÈME SUR LES ENSEMBLES EFFILÉS

par Jacques DENY (Paris-Strasbourg).

$U^{\mu}(M) = \int h(MP)d\mu(P)$ désigne le potentiel newtonien engendré en M par la distribution (mesure de Radon) positive μ ; $h(r)$, fonction harmonique élémentaire, vaut r^{2-p} si le nombre de dimensions p de l'espace euclidien considéré R^p est supérieur à 2, $\log 1/r$ si $p = 2$.

Un ensemble E (absolument quelconque) est dit *effilé* en un point O s'il existe une distribution positive μ et un voisinage V(O) tels que $U^{\mu}(O) < 1$, $U^{\mu}(M) \geqslant 1$ sur $E \cap V(O)$, $M \neq O$.

Du point de vue métrique, un tel ensemble est rare au voisinage de O ; M. Brelot, qui a introduit cette notion, a donné un critère d'effilement [1] qui généralise le critère bien connu de Wiener : soit C_k la capacité extérieure [2] de l'intersection E_k de E avec l'intersphère $E(s^k \leqslant h(OM) \leqslant s^{k+1})(s > 1)$; pour que E soit effilé en O, il faut et il suffit que la série $\sum_{k=1} s^k C_k$ soit convergente.

Ces définitions étant rappelées, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Si* E *est effilé en* O, *les rayons issus de* O *dont l'intersection avec* E *admet* O *pour point-limite découpent sur la sphère-unité centrée en* O *un ensemble de capacité extérieure nulle.*

Supposons en effet que les rayons exceptionnels découpent sur la sphère-unité un ensemble e_0 de capacité extérieure $A > 0$. Nous allons voir que le critère de Wiener-Brelot entraîne que E n'est pas effilé en O.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $p \geqslant 3$. Considérons à nouveau

(1) M. Brelot, *Sur les ensembles effilés* (Bull. Sc. Math., t. 68, 1944, pp. 12-36).
(2) Borne inférieure des capacités des ouverts contenant l'ensemble considéré.

l'ensemble $E_k = E \cap E(s^k \leqslant h(OM) \leqslant s^{k+1})$; soit C_k sa capacité extérieure, γ_k celle de sa projection sur la sphère-unité $S(O, 1)$, faite avec O pour centre. La projection de E_k sur la sphère $E(h(OM) = s^{k+1})$ a pour capacité extérieure γ_k/s^{k+1}, comme le montrent des considérations immédiates d'homothétie. Or cette capacité extérieure est au plus égale à C_k, d'après un théorème connu de M. Brelot sur les transformations continues minorant les distances (³). On a donc :

$$(1) \qquad C_k \geqslant \frac{\gamma_k}{s^{k+1}}.$$

Soit maintenant n_1 assez grand pour que la projection de $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n_1}$ sur la sphère-unité $S(O ; 1)$ soit de capacité extérieure au moins égale à $A - \varepsilon$ (ε est un nombre arbitraire positif inférieur à A). Un tel nombre existe : en effet si e_n désigne la projection de $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ les e_n sont des ensembles croissants dont la réunion e est de capacité extérieure $\mathcal{C}(e) \geqslant A$, puisque e contient l'ensemble exceptionnel e_0 ; on a donc : $\lim \mathcal{C}(e_n) = \mathcal{C}(e) \geqslant A$ (⁴), d'où : $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \geqslant \mathcal{C}(e_n) \geqslant A - \varepsilon$ pour n assez grand.

La somme des n_1 premiers termes de la série de Wiener est donc, en vertu de (1) :

$$C_1 s + C_2 s^2 + \cdots C_{n_1} s^{n_1} \geqslant \frac{1}{s}[\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{n_1}] \geqslant \frac{A - \varepsilon}{s}.$$

Soit maintenant $n_2 > n_1$ assez grand pour que la projection de $E_{n_1+1} \cup E_{n_1+2} \cup \cdots \cup E_{n_2}$ soit de capacité extérieure $\geqslant A - \varepsilon$. On montre de la même manière l'existence de n_2, car la projection de $E \cap E\big(s' \leqslant h(OM)\big)$ contient, quel que soit s', l'ensemble e_0. Les termes de rang $n_1 + 1, \ldots, n_2$ auront une somme au moins égale à $(A - \varepsilon)/s$.

En recommençant indéfiniment, on forme une suite illimitée d'entiers $n_1, n_2, \ldots$, et l'on voit que la série de Wiener est divergente, d'où le résultat.

Dans le cas du plan, la même démonstration s'applique, à condition de remplacer le cercle unité par un cercle de centre O et de

(³) M. Brelot, *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (Journ. de Math., t. 19, 1940 ; pp. 319-337).

(⁴) Car le potentiel capacitaire extérieur de e_n tend vers celui de e. Cela résulte immédiatement des travaux de H. Cartan ; cf. *Théorie du potentiel newtonien*, etc. (Bull. Soc. Math. de France, t. 73, 1945, pp. 74-106 et *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien* (Ann. Univ. Grenoble, t. 22, 1946, pp. 221-280).

rayon $r_0 < 1/2$. Avec les mêmes notations, la relation (1) est remplacée par la suivante : $C_k \geqslant \frac{\gamma_k}{s^{k+1}} \log \frac{1}{r_0}$.

Applications. — Une fonction F(M) définie au voisinage d'un point O de R^p est dite admettre une *pseudo-limite* (ou *limite fine*) (5) finie en O si $E(|F(M) - l| \geqslant \varepsilon)$ est effilé en O quel que soit $\varepsilon > 0$, et la pseudo-limite (ou limite fine) $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $E(F(M) \leqslant A)$ (resp. $E(F(M) \geqslant A)$) est effilé en O quel que soit le nombre fini A. Le théorème établi peut alors s'énoncer sous la forme suivante :

Si F(M) *admet une pseudo-limite* l (*finie ou non*) *en* O, *elle admet la limite radiale* l *le long de tout rayon vecteur issu de* O *sauf pour un faisceau de directions exceptionnelles découpant sur la sphère-unité un ensemble de capacité extérieure nulle.*

L'équivalence des deux énoncés est évidente ; il suffit de s'appuyer sur le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles de capacité extérieure nulle est également de capacité extérieure nulle.

Une fonction sousharmonique admettant une pseudo-limite en tout point de son domaine de définition, on obtient ainsi des renseignements sur l'étude d'une telle fonction au voisinage d'un de ses points (6).

D'autres résultats de M. Brelot permettent d'étudier le cas du point à l'infini ; soit dans R^p, avec $p \geqslant 3$, une fonction $u(M)$ sousharmonique non positive à l'extérieur d'une sphère S(O, R) ; soit M′ l'inverse de M dans l'inversion de pôle O et de module 1 ; la fonction de M′ : $v(M') = u(M)/OM'^{p-2}$ est, comme il est bien connu, sousharmonique au voisinage de O (transformation de Kelvin) ; comme elle est non positive, elle est sousharmonique même en O ; le produit $v(M')OM'^{p-2}$ admet en O une pseudo-limite finie l (7) ; on a donc $\lim\limits_{M\to\infty} u(M) = l$ $(-\infty < l \leqslant 0)$ le long de toute direction issue d'un même point O, sauf pour des directions exceptionnelles découpant sur la sphère unité un ensemble de capacité extérieure nulle.

(5) M. Brelot, *op. cit.* en (1), H. Cartan, *op. cit* en (4), 2e mémoire.

(6) Ce résultat est à rapprocher du théorème suivant : si $u(M)$ est sousharmonique au voisinage de O, on a : $\overline{\lim\limits_{M\to 0}}\, u(M) = u(O)$, le long de tout rayon issu de O sauf pour un faisceau de droites dont la réunion constitue un ensemble de capacité extérieure nulle (cf. J. Deny et P. Lelong, *Sur les fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône*, Bull. Soc. Math. de France t. 75, 1947, pp. 89-112). Le théorème du texte établit l'existence d'une limite vraie, mais l'ensemble exceptionnel est moins rare.

(7) M. Brelot, *loc. cit.*, en (1).

Dans le cas particulier où $u(M)$ est un potentiel non identique à $-\infty$ engendré par une distribution négative, il est aisé de voir que la pseudo-limite l est nulle [8] d'où le résultat suivant :

Si $U^{\mu}(M)$ *est un potentiel newtonien non identique à* $+\infty$, *engendré par une distribution positive* μ *de l'espace* R^p *à* $p \geqslant 3$ *dimensions, on a :* $\lim\limits_{M \to \infty} U^{\mu}(M) = 0$ *sur toute direction issue de* O *sauf pour un faisceau exceptionnel dont la trace sur la sphère unité est de capacité extérieure nulle* [9].

Ce dernier résultat précise un théorème connu selon lequel la valeur moyenne de U^{μ} sur la sphère S(O, R) tend vers o lorsque R tend vers $+\infty$ [10].

Remarque. — Disons d'un ensemble E qu'il est *intérieurement effilé* en O si tout compact contenu dans E est effilé en O [11] ; on démontre d'une façon toute pareille que les rayons issus de O dont l'intersection avec E admet O pour point limite découpent sur la sphère unité centrée en O un ensemble de capacité *intérieure* [12] nulle.

(Parvenu aux Annales le 18 septembre 1947.)

(8) La transformation de Kelvin transforme U^{μ} en un potentiel $U^{\mu'}$; on vérifie aisément que μ' ne charge pas le point O ; cela entraîne $l = 0$.

(9) Ce théorème peut s'établir directement à l'aide d'un critère du type de Wiener donné par H. Cartan (*loc. cit.*) pour l'existence d'une distribution capacitaire extérieure sur un ensemble donné ; observons d'ailleurs que ce critère peut s'établir sans faire usage de la transformation de Kelvin.

(10) Cf. M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (Acta de Szeged, t. 9, 1938, pp. 1-42), et aussi H. Cartan, *loc. cit.*

(11) Cf. M. Brelot, *Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités* (Journ. de Math., t. 69, 1945, pp. 71-96), et H. Cartan, *loc. cit.*

(12) Borne supérieure des capacités des compacts contenus dans un ensemble donné.