ROLCI DE ALMEIDA CIPOLATTI

# Considérations sur un problème non linéaire : l'équilibre d'un plasma confiné

*Thèses d'Orsay*, 1982

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1982__0115__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

# THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3e CYCLE

SPECIALITE : ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

PAR

ROLCI DE ALMEIDA CIPOLATTI



**SUJET :** CONSIDERATIONS SUR UN PROBLEME NON LINEAIRE : L'EQUILIBRE D'UN PLASMA CONFINE.

soutenue le 28 JUIN 1982 devant la Commission d'examen

M. R. TEMAM Président

Mme J. MOSSINO

MM. A. DAMLAMIAN

H. BERESTYCKI

*Pour moi, l'objectif dans la vie,*
*c'est la recherche...*

*... de cet objectif.*

*R.C.*

*Je voudrais exprimer ma gratitude à :*

*R. TEMAM, pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. C'est un honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury.*

*J. MOSSINO, à qui est due toute l'orientation de ce travail. Ses soins et ses conseils m'ont guidé pour le mener à bien.*

*A. DAMLAMIAN, pour m'avoir aidé si généreusement et pour avoir accepté de participer au Jury.*

*H. BERESTYCKI, dont les travaux sur le sujet m'ont été très utiles, pour avoir accepté de faire partie du Jury.*

*Et tant d'autres amis qui, par leurs encouragements, leur solidarité, m'ont permis de garder le moral toujours assez élevé, condition nécessaire (surtout !) pour la réalisation d'une Thèse.*

*Je remercie également Madame Le Meur qui a assuré la dactylographie du manuscrit et a réussi à le rendre présentable, ainsi que les membres de l'Imprimerie du Département de Mathématiques qui ont assuré le tirage.*

*J'exprime finalement ma reconnaissance au Conseilho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnologico - Brasil, dont le soutien financier a permis la réalisation de la présente Thèse.*

# S O M M A I R E



-=-=-=-=-=-=-=-

# INTRODUCTION

Dans ce travail nous nous pencherons sur quelques questions concernant le problème suivant, posé dans un ouvert borné et régulier $\Omega$ de frontière $\partial\Omega$ de $\mathbb{R}^N$ :

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K u \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi \quad \text{sur } \partial\Omega \;, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ inconnu} \\ \lambda \displaystyle\int P_K(u)\psi = I, \quad I > 0 \text{ donné,} \end{cases}$$

où K est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$, $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ donné et $\psi$ sa relevée harmonique (c.a.d., $-\Delta\psi = 0$ dans $\Omega$ et $\psi = \phi$ sur $\partial\Omega$).

Lorsque $K = \{v \in L^2(\Omega) \; ; \; v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ et $\phi \equiv 1$ sur $\partial\Omega$, nous retrouvons le problème introduit par R. Temam [34] et étudié également par de nombreux auteurs (cf. Berestycki-Brézis [3], J.P. Puel [26] , A. Damlamian [7], M. Sermange [28]) :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta \quad \text{constante inconnue sur } \partial\Omega \\ -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dr = I \;. \end{cases}$$

Ce dernier a son origine dans les recherches de l'énergie par la fusion magnétique. Plus précisément, c'est un problème mathématique correspondant à une modélisation simplifiée pour l'équilibre d'un plasma confiné à l'intérieur d'une machine Tokamak.

Notre travail s'organise en trois chapitres :

Dans le premier, nous présentons une formulation équivalente de (*) (correspondant à un découplage), pour laquelle on étudie les questions d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Nous donnons aussi quelques exemples qui illustrent les résultats théoriques. Ces résultats ont été présentés dans [6] et feront l'objet d'une publication ultérieure.

Dans le deuxième, nous étudions l'approximation numérique du problème (sous la deuxième formulation). Nous proposons un algorithme pour le calcul des solutions, le problème étant discrétisé par une méthode d'éléments finis. Une estimation d'erreur pour certaines valeurs de $\lambda$ est aussi établie.

Le troisième chapitre donne des résultats qualitatifs pour les solutions de deux exemples correspondant à des problèmes à frontières libres. Ce sont des inégalités de type isopérimétrique qui s'inspirent des travaux de J. Mossino [21] et I. Stackgold [32].

# CHAPITRE I

# EXISTENCE, UNICITE ET REGULARITE

## § I-1. EXISTENCE DE SOLUTIONS.

Etant donné $\Omega$ ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, on considère le problème :

Déterminer u défini dans $\Omega$ à valeurs réelles tel que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K(u) \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi \text{ sur } \partial\Omega,\ \theta \in \mathbb{R} \text{ inconnu} \\ \lambda\int P_K(u)\psi = I, \quad I > 0 \text{ donné,} \end{cases}$$

où $P_K$ est l'opérateur de projection sur un ensemble convexe fermé K de $L^2(\Omega)$, $\lambda \neq 0$ est un paramètre, $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ($\phi$ non identiquement nulle) et $\psi \in H^1(\Omega)$ sont données et liées par

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \psi/\Gamma = \phi \end{cases}$$

Définissons

$$(1.2)\qquad K_\lambda = K \cap \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ \int v\psi = I/\lambda\}$$

$K_\lambda$ est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ (éventuellement vide).

Une condition nécessaire pour que (1.1) ait une solution est :

$$(1.3)\qquad K_\lambda \neq \emptyset.$$

Une forme affaiblie de (1.3) est

$$(1.3a)\qquad \inf_{v \in K} \int v\psi \leq I/\lambda \leq \sup_{v \in K} \int v\psi$$

Nous allons voir que la condition (1.3a) est aussi "presque" suffisante (cf. Théorème I.1).

I-1.1 : Une formulation équivalente.

Pour tout $\lambda$ satisfaisant (1.3), on considère le problème : déterminer $(\omega,\theta) \in H_o^1(\Omega)\times\mathbb{R}$ tel que

$$(1.4) \qquad \begin{cases} -\Delta\omega = \lambda P_{K_\lambda}\omega \text{ dans } \Omega \\ \omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \lambda\int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I. \end{cases}$$

Alors nous avons :

LEMME I.1 : (1.1) *a une solution* $u \in H^1(\Omega)$ *si et seulement si*

i) (1.3) *est satisfaite*

ii) (1.4) *a une solution* $(\omega,\theta) \in H_o^1(\Omega)\times\mathbb{R}$

*De plus les solutions de* (1.1) *et* (1.4) *sont liées par*

$$\begin{cases} u = \omega + \theta\psi \\ P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega). \end{cases}$$

Démonstration : Supposons que (1.1) a une solution $(u,\theta)$. Comme

$$\int P_K(u)\psi = I/\lambda$$

nous avons

$$(1.5) \qquad P_K(u) \in K_\lambda$$

Soit $\omega = u - \theta\psi$. Alors $\omega \in H_o^1(\Omega)$ et

$$\lambda\int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I .$$

Pour montrer que $\omega$ est solution de (1.4) il suffit de montrer que

$$P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega).$$

Or, d'après la définition de projection,

$$(1.6) \qquad (u-P_K(u)\ ;\ v-P_K(u)) \leq 0 \qquad \forall\, v \in K$$

$$(1.7) \qquad (\omega-P_{K_\lambda}(\omega)\ ;\ v-P_{K_\lambda}(\omega)) \leq 0 \quad \forall\, v \in K$$

Vu (1.5), en substituant $v = P_{K_\lambda}(\omega)$ et $v = P_K(u)$ dans (1.6) et (1.7) respectivement, on obtient :

$$|P_K(u) - P_{K_\lambda}(\omega)|^2_{L^2} + \theta\left(\int P_{K_\lambda}(\omega)\psi - \int P_K(u)\psi\right) \leq 0$$

et on conclut

$$P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega).$$

Les mêmes arguments s'appliquent pour la réciproque.

Nous allons traiter maintenant l'existence de solutions pour le problème (1.4).

I-1.2 : Un résultat d'existence.

On fait l'hypothèse :

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi < \sup_{v \in K} \int v\psi = \ell_2$$

En outre, on suppose que K satisfait la condition suivante :

(HE) $\qquad \forall\, \ell \in\, ]\ell_1, \ell_2[,\quad \{v \in K\ ;\ \int v\psi = \ell\}$ est borné dans $L^1(\Omega)$.

Posons :

$$\Lambda = \{\lambda \neq 0\ ;\ \ell_1 < I/\lambda < \ell_2\}.$$ Alors :

THEOREME I-1 : *Le problème* (1.4) *admet au moins une solution* $(\omega,\theta) \in H^1_0(\Omega)\times\mathbb{R}$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$. *Si* $I/\lambda > \ell_2$ *ou* $I/\lambda < \ell_1$, (1.4) *n'admet pas de solution.*

Démonstration : Elle utilise de façon essentielle le

<u>LEMME I-2</u> : *Pour tout* $u \in L^2(\Omega)$ , *la fonction*

$$\tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi$$

*est lipschitzienne et croissante dans* $\mathbb{R}$. *De plus*

$$\lim_{\theta\to-\infty} \tau_u(\theta) = \ell_1$$

$$\lim_{\theta\to+\infty} \tau_u(\theta) = \ell_2 .$$

Démonstration du Lemme I-2 :

i) $\tau_u$ est lipschiztienne :

$$\begin{aligned} |\tau_u(\theta_1) - \tau_u(\theta_2)| &\leq |P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)|_{L^2}|\psi|_{L^2} \\ &\leq |\psi|^2_{L^2}|\theta_1-\theta_2| \end{aligned}$$

ii) $\tau_u$ est croissante :

$$(\theta_1-\theta_2)(\tau_u(\theta_1)-\tau_u(\theta_2)) = \int [P_K(u+\theta_1\psi)-P_K(u+\theta_2\psi)](\theta_1-\theta_2)\psi$$

$$= \int [P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)] [(u+\theta_1\psi) - (u+\theta_2\psi)] \geq 0$$

iii) D'après i) et ii), il existe

$$\ell'_1 = \lim_{\theta\to-\infty} \tau_u(\theta) \quad \text{et} \quad \ell'_2 = \lim_{\theta\to+\infty} \tau_u(\theta)$$

Soit $v \in K$ et $\theta_n \uparrow +\infty$. Alors

$$\int (u+\theta_n\psi - P_K(u+\theta_n\psi)(v - P_K(u+\theta_n\psi)) \leq 0 \qquad \forall n .$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta_n\int (v - P_K(u+\theta_n\psi))\psi &\leq -\int [u - P_K(u+\theta_n\psi)] [v - P_K(u+\theta_n\psi) \\ &\leq \frac{1}{4} |u+v|^2_{L^2} - \int uv < +\infty \end{aligned}$$

Comme

$$\int (v - P_K(u+\theta_n\psi))\psi \to \int v\psi - \ell_2'$$

et $\theta_n \uparrow +\infty$ on déduit que

$$\int v\psi \leqq \ell_2' \qquad \forall\, v \in K$$

Donc

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi \leqq \ell_2'$$

Comme $v_n = P_K(u+\theta_n\psi)$ satisfait

$$\int v_n\psi \to \ell_2'$$

on obtient

$$\ell_2' = \sup_{v \in K} \int v\psi = \ell_2.$$

D'une façon analogue,

$$\ell_1' = \inf_{v \in K} \int v\psi = \ell_1.$$

L'existence découle alors des Lemmes suivants :

<u>LEMME I-3</u>. *On considère le problème d'optimisation suivant*

$$\mathcal{P} \; : \; \inf \{e(\omega) \; ; \; \omega \in H_o^1(\Omega)\}$$

*avec* $e(\omega) = \frac{1}{2}\int |\nabla\omega|^2 - \lambda\int (\omega - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}\omega)P_{K_\lambda}\omega$ , $K_\lambda$ *étant donné par* (1.2).

*Alors, pour tout* $\lambda \in \Lambda$ , *le problème* $\mathcal{P}$ *admet au moins une solution.*

Démonstration : On la fera en trois étapes.

<u>1ère étape</u> : $K_\lambda \neq \emptyset$

C'est une conséquence du Lemme I-2 ; pour u = 0, il existe $\theta_o$ tel que

$$\tau_o(\theta_o) = \int P_K(\theta_o \psi)\psi = I/\lambda$$

Donc $P_K(\theta_o \psi) \in K_\lambda$

<u>2ème étape</u> : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} \int |\nabla\omega|^2 - c \quad \forall\, \omega \in H^1_o(\Omega).$$

On considère deux cas :

i) $\lambda > 0$ :

$$e(\omega) = \frac{1}{2} \int |\nabla\omega|^2 - \lambda \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

$$= \frac{1}{2} |\nabla\omega|^2_{L^2} - \lambda \int \omega\, P_{K_\lambda} \omega + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^2}$$

$$\geq \frac{1}{2} |\nabla\omega|^2_{L^2} - \lambda |\omega|_{L^p} |P_K\, \omega|_{L^{p*}} + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^2}$$

pour tout p, p*, $1 < p, p^* < +\infty$ tels que $1/p + 1/p^* = 1$.

Soit $p = \frac{2N}{N-2}$ ; si $N \geq 3$ ou $p > 2$ si $N = 2$. Alors, pour tout $\omega \in H^1_o(\Omega)$

$$|\omega|_{L^p} \leq c_1 |\nabla\omega|_{L^2}$$

Donc

$$e(\omega) \geq \frac{1}{2} |\nabla\omega|^2_{L^2} - c_2 |\nabla\omega|_{L^2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^{p*}} + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^2}$$

$$\geq \frac{1}{2} |\nabla\omega|^2_{L^2} - \frac{c_2 \alpha}{2} |\nabla\omega|^2_{L^2} - \frac{c_2}{2\alpha} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^{p*}} + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^2}$$

Si on choisit $\alpha = 1/2c_2$, alors

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} |\nabla\omega|^2 - c_2^2 |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^{p*}} + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|^2_{L^2} \quad .$$

Soit $s = 2/p$. Alors $0 < s < 1$ et $1-s + s/2 = 1/p^*$, et donc

$$|P_{K_\lambda} \omega|_{L^{p*}} \leq |P_{K_\lambda} \omega|^{1-s}_{L^1} |P_{K_\lambda} \omega|^s_{L^2}$$

ce qui entraîne

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4}|\nabla\omega|^2_{L^2} - c_2^2|P_{K_\lambda}\omega|^{2(1-s)}_{L^1} |P_{K_\lambda}\omega|^{2s}_{L^2} + \frac{\lambda}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2}$$

Comme K satisfait (HE), il existe $c_3$ tel que

$$|P_{K_\lambda}\omega|_{L^1} \leqq c_3 .$$

Donc

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4}|\nabla\omega|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} - c_4|P_{K_\lambda}\omega|^{2s}_{L^2}$$

Comme $0 < s < 1$, il existe c tel que

$$\frac{\lambda}{2}\xi^2 - c_4\xi^{2s} \geqq c \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}$$

et

$$e(\omega) \geqq \frac{1}{4}|\nabla\omega|^2_{L^2} - c \tag{1.8}$$

ii) $\lambda < 0$ :

Soit $g \in K_\lambda$ fixé. Alors, comme

$$\int (\omega - P_{K_\lambda}\omega)(g - P_{K_\lambda}\omega) \leq 0 \qquad \forall\, \omega$$

on déduit

$$\int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda}\omega) P_{K_\lambda}\omega \geqq \frac{1}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} + \int (\omega - P_{K_\lambda}\omega) g$$

Or,

$$e(\omega) = \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} + c_1 \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda}\omega) P_{K_\lambda}\omega$$

avec $c_1 = -\lambda > 0$. Donc,

$$\begin{aligned} e(\omega) &\geq \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} + c_1 \int (\omega - P_{K_\lambda}\omega) g + \frac{c_1}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} - c_1|\omega|_{L^p}|g|_{L^{p*}} - c_1|g|_{L^2}|P_{K_\lambda}\omega|_{L^2} + \frac{c_1}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} \\ &\geqq \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} - c_2|\nabla\omega|_{L^2}|g|_{L^{p*}} - c_1|g|_{L^2}|P_{K_\lambda}\omega|_{L^2} + \frac{c_1}{2}|P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$e(\omega) \geq \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} - \frac{c_2\alpha}{2}|\nabla\omega|^2_{L^2} - \frac{c_2}{2\alpha}|g|^2_{L^{p*}} - \frac{c_1}{2}|g|^2_{L^2}$$

En choisissant $\alpha = 1/2\, c_2$ on obtient

$$(1.8a) \qquad e(\omega) \geq \frac{1}{4}|\nabla\omega|^2_{L^2} - c$$

avec

$$c = c_2^2|g|^2_{L^{p*}} - \frac{c_1}{2}|g|^2_{L^2}$$

<u>3ème étape</u> : il existe $\omega_o$ solution de $\mathcal{P}$ :

Soit $\{\omega_m\}$ une suite minimisante

$\omega_m \in H^1_o(\Omega)$ et $e(\omega_m) \to \inf e$.

D'après (1.8), $\{\omega_m\}$ est borné dans $H^1_o(\Omega)$. Donc il existe une sous-suite (encore notée $\{\omega_m\}$) et $\omega_o \in H^1_o(\Omega)$ tels que

$$\omega_m \rightharpoonup \omega_o \quad \text{dans } H^1_o(\Omega) \text{ faible}$$
$$\omega_m \to \omega_o \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ forte.}$$

Comme

$$\int|\nabla\omega_o|^2 \leq \liminf_m \int|\nabla\omega_m|^2$$

et

$$\int(\omega_o - \tfrac{1}{2}P_{K_\lambda}\omega_o)P_{K_\lambda}\omega_o = \lim \int(\omega_m - \tfrac{1}{2}P_{K_\lambda}\omega_m)P_{K_\lambda}\omega_m$$

on conclut

$$e(\omega_o) \leq \liminf_m e(\omega_m) = \inf e.$$

Donc $\omega_o$ est une solution de $\mathcal{P}$.

<u>LEMME I-4</u>. *La fonctionnelle* $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$J(v) = \int(v - \tfrac{1}{2}P_{K_\lambda}v)P_{K_\lambda}v$$

*est convexe et Fréchét-différentiable dans* $L^2(\Omega)$ *avec différentielle*

$$J'(v) = P_{K_\lambda}v \qquad \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

Démonstration : On trouve dans Zarantonnello [38] une démonstration de ce lemme (cf. aussi [15]). Nous donnons ici une autre démonstration, inspirée de B. Mercier [18], qui utilise la théorie des sous-gradients.

Considérons la fonctionnelle convexe et s.c.i.

$$j : L^2(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$$

$$j(v) = \frac{1}{2}\int v^2 + \chi_{K_\lambda}(v)$$

avec $\chi K_\lambda$ la fonction indicatrice de $K_\lambda$. La fonctionnelle $j^*$, polaire de $j$, est définie par

$$j^*(v^*) = \sup_{v \in L^2} \{\int v^* v - j(v)\} \quad .$$

Donc

$$j^*(v^*) = \sup_{v \in K_\lambda} \{\int v^* v - \frac{1}{2}\int v^2\}.$$

Or le sup est atteint au point $\bar{v}$ si et seulement si

$$v^* \in \bar{v} + \partial \chi_{K_\lambda}(\bar{v}),$$

ce qui équivaut à

$$\bar{v} = P_{K_\lambda}(v^*)$$

Donc

$$j^*(v^*) = \int v^* P_{k_\lambda} v^* - \frac{1}{2}|P_{K_\lambda} v^*|^2 = J(v^*).$$

$J$ étant la polaire d'une fonctionnelle convexe et s.c.i., elle est aussi convexe et s.c.i.. En outre, d'après Ekeland-Temam [9],

$$v^* \in \partial j(\bar{v}) \text{ si et seulement si } \bar{v} \in \partial j^*(v^*),$$

ce qui équivaut à dire, dans notre cas

$$\partial J(v^*) = \{P_{K_\lambda} v^*\} \quad .$$

Mais dire que la sous-différentielle d'une fonctionnelle convexe et s.c.i. $J$, à un point $v^*$, est composée d'un seul élément équivaut à dire que J est, à ce point Gateaux-différentiable. Donc J est G-différentiable dans $L^2(\Omega)$ avec $J' = P_{K_\lambda}$.

De plus, comme $P_{K_\lambda}$ est un opérateur continu dans $L^2(\Omega)$ on conclut que J est F-différentiable.

Revenons maintenant au théorème I-1.

Si K satisfait (HE) et $\lambda \in \Lambda$ , alors, d'après le Lemme I-3, il existe $\omega_o$ solution de

$$\mathcal{P} : \inf_{\omega \in H_o^1(\Omega)} \{e(\omega) = \frac{1}{2}\int |\nabla\omega|^2 - \lambda\int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda}\omega)P_{K_\lambda}\omega\}$$

D'après le Lemme I-4, $e(\omega)$ est F-différentiable dans $H_o^1(\Omega)$ avec

$$e'(\omega) = -\Delta\omega - \lambda P_{K_\lambda}\omega$$

Donc

$$\begin{cases} -\Delta\omega_o = \lambda P_{K_\lambda}\omega_o \\ \omega_{o|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

D'après le Lemme I-2, il existe $\theta_o$ tel que

$$\tau_{\omega_o}(\theta_o) = \int P_K(\omega_o + \theta_o\psi)\psi = I/\lambda$$

Donc $(\omega_o,\theta_o)$ satisfait (1.4).

Les résultats de non existence sont immédiats d'après la condition (1.3).

<u>REMARQUE I-1</u> : Dans le cas limite, c'est-à-dire, $I/\lambda = \ell_1$ ou $I/\lambda = \ell_2$, il peut ou non y avoir une solution. Voir les exemples au paragraphe I.4.

<u>REMARQUE I-2</u> : Lorsque K est un cône de sommet en 0 (voir exemple 1, § I-4), $\theta$ peut être calculé explicitement en fonction de $\omega$ de la manière suivante :

Pour tout $u \in L^2(\Omega)$ nous avons la décomposition

$u = P_K u + P_{K^\perp} u$ (cf. Zarantonello [38]),

où $K^\perp$ désigne le cône orthogonal de K, défini par

$$K^\perp = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \int vg \leq 0 \quad \forall \ g \in K\}$$

Soit $u = \omega + \theta\psi$ solution de (1.1). Alors

$$0 = \int P_K u \ P_{K^\perp} u = \int (u - P_K u) P_K u = \int (\omega + \theta\psi - P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

$$= \theta \ I/\lambda + \int (\omega - P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega \quad ,$$

d'où nous obtenons

$$\theta = \frac{\lambda}{I} \int (P_{K_\lambda} \omega - \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

De plus, comme $- \Delta\omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega$ on obtient

$$\theta = \frac{\lambda}{I} \int (P_{K_\lambda} \omega - \omega) P_{K_\lambda} \omega = \frac{2}{I} \ e(\omega) .$$

Il convient de remarquer aussi que, dans ce cas, l'unicité de $\omega$ entraîne l'unicité de $\theta$ et donc l'unicité de u, solution de (1.4).

## § I-2. UNICITE DE SOLUTION.

### I-2.1 : Un lemme préliminaire.

Avant d'établir le résultat d'unicité nous montrons le

**LEMME I-5.** *Les valeurs propres* $\lambda_i^*$ *de*

$$(1.9) \qquad \begin{cases} - \Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi \ \text{sur } \partial\Omega, \ \theta \text{ inconnue} \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \ \phi \ d\Gamma = 0 \end{cases}$$

*sont positives. Plus précisément*

$$0 \leq \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* < \ldots$$

*avec*

$$(1.10) \qquad \lambda_1^* = \inf_{\substack{u \in W \\ u \neq 0}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} \;, \;\dots\;, \; \lambda_i^* = \inf_{\substack{u \in W \\ \int u u_j = 0 \\ j=1,2,..i-1}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} \;, \;\dots$$

*où* $W = \{v \in H^1(\Omega) \; ; \; v_{|\partial\Omega} = \theta\phi\}$ *et* $u_j$ *est une fonction propre correspondant à* $\lambda_j^*$ , $j = 1,2,\dots,i-1$.

*De plus nous avons* $0 \leqq \lambda_1^* \leqq \lambda_1$ *avec* $\lambda_1^* = 0$ *si et seulement si* $\phi$ *est constante. Dans ce cas (*$\phi \equiv$ *cte non nulle)*

$$\lambda_1 < \lambda_2^* \leqq \lambda_2$$

*où* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *désignent les deux premières valeurs propres du problème de Dirichlet homogène pour le laplacian.*

Démonstration : Soit $L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'opérateur défini par

$$Lf = u$$

avec u l'unique solution de

$$\int \nabla u . \nabla v + \int uv = \int fv \qquad \forall\, v \in W$$

Il est immédiat que u est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi & \text{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, \phi = 0 & \end{cases}$$

et que L est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact.

Soit donc $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \dots$ les valeurs caractéristiques de L. Alors

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \lambda_i^* \text{ est valeur propre de (1.10) si et seulement si} \\ \lambda_i^* = \mu_i - 1. \end{cases}$$

Si $\mu_i$ est valeur caractéristique de L, alors il existe $v \neq 0$ tel que $v = \mu_i L v$. Donc v satisfait

$$(1.12)\quad \begin{cases} -\Delta v = (\mu_i - 1)v \quad \text{dans } \Omega \\ v = \theta\phi \text{ sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}\,\phi = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int |\nabla v|^2 = (\mu_i - 1)\int v^2$$

ce qui entraîne $\mu_i \geqq 1$, et, d'après (1.11)

$$\lambda_i^* \geqq 0.$$

Or, L étant compact, auto-adjoint et strictement positif (ie, $(Lf;f) > 0 \quad \forall\, f \neq 0$) toutes ses valeurs propres $1/\mu_i$ sont simples (cf. Dieudonné [8]). Donc $1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \ldots$, et

$$0 \leqq \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* < \ldots$$

Pour montrer (1.10), nous remarquons que $1/\mu_i$ étant la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de L nous avons (cf. [8])

$$(1.13)\quad \begin{cases} 1/\mu_i = ||L|| = \sup\limits_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ f \neq 0}} \dfrac{(Lf,f)}{|f|^2_{L^2}} = \sup\limits_{\substack{f \in L^2 \\ |f|_{L^2}=1}} (Lf;f) \\[2ex] 1/\mu_i = \sup\limits_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ (f;v_k)=0}} \dfrac{(Lf;f)}{|f|^2_{L^2}} \qquad j = 1,2,\ldots,i-1 \end{cases}$$

où $v_j$ est la fonction propre correspondant à $1/\mu_j$.

Montrons que (1.13) nous donne (1.10).

Soit $\sigma = \inf\,\{\int |\nabla u|^2\ ;\ u \in W\ ,\ |u|^2_{L^2} = 1\}$. Nous allons montrer que $\sigma = \lambda_1^*$. Soit

$$u_m \in W$$

une suite minimisante. Il existe donc $u_m \in H^1_o(\Omega)$ et $\theta_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_m = \omega_m + \theta_m \psi$$

Comme

$$\int |\nabla u_m|^2 \leqq \text{cte}$$

il s'ensuit que

$$\begin{cases} \int |\nabla \omega_m|^2 \leqq \text{cte} \\ |\theta_m|^2 \leqq \text{cte}. \end{cases}$$

Donc, on peut choisir une sous-suite notée encore $u_m$ telle que

$$\omega_m \longrightarrow \omega \text{ dans } H_o^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$\theta_m \longrightarrow \theta \text{ dans } \mathbb{R}$$

Comme

$$H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte}$$

$$\omega_m \longrightarrow \omega \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ forte,}$$

et donc

$$u_m \longrightarrow u = \omega + \theta\psi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De plus,

$$\int |\nabla u| \leqq \liminf_m \; \{\int |\nabla \omega_m|^2 + \theta_m^2 \int |\nabla \psi|^2\}$$

et comme $|u|_{L^2} = 1$ on déduit

$$\int |\nabla u|^2 = \sigma \; .$$

En outre, puisque $u \to \int |\nabla u|^2$ est F-différentialbe, on a

$$\int \nabla u \cdot \nabla v = \sigma \int uv \qquad \forall\, v \in W,\; u \in W$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -\Delta u = \sigma u \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$Lu = \frac{1}{1+\sigma}\, u.$$

Donc, d'après (1.13) (puisque $\int u^2 = 1$)

$$\frac{1}{1+\sigma} = (Lu;u) \leqq \sup_{|f|=1} (Lf;f) = ||L|| = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\lambda_1^*+1}$$

et $\quad \sigma \geqq \lambda_1^*$

Pour montrer que $\sigma \leqq \lambda_1^*$, il suffit de remarquer que si $u_1$ est une fonction propre de (1.9) associée à $\lambda_1^*$ et satisfaisant $\int |u_1|^2 = 1$, on a

$$\frac{1}{\mu_1} = (Lu_1;u_1)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 = \mu_1 u_1 \\ u_1 = \theta\phi \text{ sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n}\phi = 0 \end{cases}$$

Donc $\sigma \leqq \int |\nabla u_1|^2 = \mu_1 - 1 = \lambda_1^*$.

D'une façon tout à fait analogue, nous montrons que

$$\lambda_i^* = \inf_{\substack{\int v_j u=0 \\ u\neq 0 \\ u \in W}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} = \inf_{\substack{u \in W \\ |u|_{L^2}=1 \\ \int u v_j = 0}} \int |\nabla u|^2$$

L'estimation $\lambda_1^* \leqq \lambda_1$ est une conséquence directe du fait que

$$H_o^1(\Omega) \subset W$$

D'autre part, si $\phi \equiv$ cte, alors $\lambda_1^* = 0$ est valeur propre de (1.9). Réciproquement, si $\lambda_1^* = 0$, $\mu_1 = 1$ et il existe $v \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \\ v_{|\partial\Omega} = \theta\phi \\ \displaystyle\int \frac{\partial v}{\partial n}\phi = 0 \end{cases}$$

et donc

$$0 = \int (-\Delta v)v = \int |\nabla v|^2 - \theta \int \frac{\partial v}{\partial n}\phi = \int |\nabla v|^2$$

ce qui entraîne $v \equiv$ cte sur $\Omega$ et de même

$\phi \equiv$ cte.

Montrons maintenant que si $\psi$ est une constante non nulle, $\lambda_1 < \lambda_2^*$ (ce qui équivaut à montrer que $\mu_2 > \lambda_1+1$).

Supposons $1 < \mu_2 \leqq \lambda_1+1$. D'après (1.12) on obtient :

$$\int (-\Delta v)(v - \theta\psi) = (\mu_2 - 1)\int (v - \theta\psi)v$$

Si on appelle $v_o = v - \theta\psi$, alors $v_o \in H_o^1(\Omega)$ et

$$\int |\nabla v_o|^2 = \int (-\Delta v_o)v_o = (\mu_2 - 1)\int v_o(v_o + \theta\psi)$$

$$= (\mu_2 - 1)\int v_o^2 + (\mu_2 - 1)\theta\psi\int v_o$$

Mais

$$\begin{aligned}(\mu_2 - 1)\int v_o &= (\mu_2 - 1)\int v - (\mu_2 - 1)\theta\psi|\Omega| \\ &= \int - \Delta v - (\mu_2 - 1)\theta\psi|\Omega| \\ &= - (\mu_2 - 1)\theta\psi|\Omega|\end{aligned}$$

(car $\int \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ si $\phi$ est une constante).

Donc

$$\lambda_1\int v_o^2 \leq \int |\nabla v_o|^2 = (\mu_2 - 1)\ v_o^2 - \theta^2\psi^2|\Omega|(\mu_2 - 1)$$

$$\leqq \lambda_1\int v_o^2 - \theta^2\psi^2(\mu_2 - 1)|\Omega|$$

ce qui entraîne $\theta = 0$.

Or, dans ce cas $\mu_2 - 1 = \lambda_1$ et $v = v_o$ est la première fonction propre du problème de Dirichlet, ce qui est impossible car

$$0 = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} = \int - \Delta v = (\mu_2 - 1)\int v$$

Donc $\lambda_1 < \lambda_2^*$.

Montrons maintenant que $\lambda_2^* \leqq \lambda_2$ : d'après (1.10),

$$\lambda_2^* = \inf_{\substack{u \in W \\ \int u=0 \\ u\neq 0}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}$$

Donc

$$\int |\nabla u|^2 \geqq \lambda_2^* \int u^2 \qquad \forall\, u \in W, \int u = 0.$$

Soient $v_1$ et $v_2$ deux fonctions propres correspondant à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ respectivement, et soit

$$\omega = v_2 + t\, v_1$$

avec $t = - \int v_2 / \int v_1$. Alors

$$\int \omega = 0$$

et nous avons

$$\lambda_2^* \int \omega^2 \leqq \int |\nabla \omega|^2$$

Mais

$$\int \omega^2 = t^2 \int v_1^2 + \int v_2^2 \text{ car } \int v_1 v_2 = 0,$$

et

$$\int |\nabla \omega|^2 = t^2 \lambda_1 \int v_1^2 + \lambda_2 \int v_2^2$$

Donc

$$\lambda_2^* t^2 \int v_1^2 + \lambda_2^* \int v_2^2 \leqq \lambda_1 t^2 \int v_1^2 + \lambda_2 \int v_2^2$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2^*$ nous concluons

$$\lambda_2^* \leqq \lambda_2 .$$

On remarque finalement que si $\int v_2 \neq 0$, nous avons $t \neq 0$ et donc

$$\lambda_2^* < \lambda_2 .$$

### I-2.2. Un théorème d'unicité.

Soit K un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ satisfaisant (HE). On dira que K satisfait la condition (HU) relativement à $\psi$ si

$$(HU)\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, u \in L^2(\Omega),\ \text{la fonction } \tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi \text{ est strictement} \\ \text{croissante dans } ]L_1(u);L_2(u)[\ = \tau_u^{-1}(]\ell_1,\ell_2[) = \\ \{\theta \in L^2(\Omega)\ ;\ \ell_1 < \tau_u(\theta) < \ell_2\}\ . \end{array} \right.$$

Nous avons

THEOREME I-2 : *Si K satisfait les conditions* (HE) *et* (HU) , *le problème* (1.1) *admet une solution unique pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *tel que* $\lambda < \lambda_1$.

*En outre, si* $\phi \equiv$ cte $\neq 0$, (1.1) *admet une solution unique pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *tel que* $\lambda < \lambda_2^*$

Démonstration : D'après le Lemme I-1, il suffit de démontrer l'unicité de solution pour le problème (1.4).

Le cas $\lambda < 0$ est immédiat d'après la stricte convexité de

$$e(\omega) = \frac{1}{2}\int |\nabla\omega|^2 - \lambda\int(\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda}\omega) P_{K_\lambda}\omega$$

Soient $(\omega_1;\theta_1)$ et $(\omega_2,\theta_2)$ deux solutions de (1.4) avec $\lambda \in \Lambda$ , $0 < \lambda < \lambda_1$. Alors

$$\lambda_1\int(\omega_1-\omega_2)^2 \leq \int|\nabla\omega_1-\nabla\omega_2|^2 = \int(-\Delta\omega_1+\Delta\omega_2)(\omega_1-\omega_2) =$$

$$= \lambda\int(P_{K_\lambda}\omega_1 - P_{K_\lambda}\omega_2)(\omega_1-\omega_2) \leq \lambda|P_{K_\lambda}\omega_1 - P_{K_\lambda}\omega_2|_{L^2}|\omega_1-\omega_2|_{L^2}$$

Donc

$$\lambda_1|\omega_1-\omega_2|^2 \leq \lambda|\omega_1-\omega_2|^2$$

ce qui entraîne

$$\omega_1 = \omega_2.$$

D'après la condition (HU), $\theta_1 = \theta_2$ et donc (1.4) a une solution unique.

Supposons maintenant $\phi \equiv$ cte $\neq 0$ et $\lambda \in \Lambda$ tel que $0<\lambda<\lambda_2^*$. Soient $u_1$ et $u_2$ deux solutions de (1.1). Si on décompose $u_i = v_i+t_i$ dans $W = W_o \oplus \mathbb{R}$, avec

$$W_o = \{u \in W \ ; \ \int u = 0\}$$

alors, d'après le Lemme I-5

$$(1.14)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_2^*|v_1-v_2|^2_{L^2} \leq |\nabla v_1-\nabla v_2|^2_{L^2} = |\nabla u_1-\nabla u_2|^2_{L^2} \\ &= \int(-\Delta u_1+\Delta u_2)(v_1+t_1-v_2-t_2) = \int(-\Delta u_1+\Delta u_2)(v_1-v_2) + \\ &\quad (t_1-t_2)\int(-\Delta u_1+\Delta u_2). \end{aligned}\right.$$

Comme $\int -\Delta u_i = I/\psi$ et $-\Delta u_i = \lambda P_K u_i$, on obtient d'après (1.14)

$$\lambda_2^*|v_1-v_2|^2_{L^2} \leq \lambda\int(P_K u_1-P_K u_2)(v_1-v_2)$$

ou encore

$$(1.15)\qquad |v_1-v_2|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{\lambda_2^*}|P_K u_1-P_K u_2|_{L^2}$$

D'après (1.14) et (1.15)

$$|\nabla u_1-\nabla u_2|^2_{L^2} = \int(-\Delta u_1+\Delta u_2)(v_1-v_2) = \lambda\int(P_K u_1-P_K u_2)(v_1-v_2)$$

$$\leq \lambda|P_K u_1-P_K u_2|\,|v_1-v_2| \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*}|P_K u_1-P_K u_2|^2$$

Or, comme

$$\int(P_K u_1-P_K u_2)(u_1-u_2) \geq |P_K u_1-P_K u_2|^2 \qquad \forall\, u_1,u_2 \in L^2(\Omega)$$

et comme

$$|\nabla u_1-\nabla u_2|^2 = \lambda\int(P_K u_1-P_K u_2)(u_1-u_2),$$

on obtient

$$\lambda|P_K u_1-P_K u_2|^2 \leq |\nabla u_1-\nabla u_2|^2 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*}|P_K u_1-P_K u_2|^2$$

ou encore

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^*})\,|P_K u_1 - P_K u_2|^2 \leqq 0.$$

Comme par hypothèse $\lambda < \lambda_2^*$, il nous reste

$$P_K u_1 = P_K u_2$$

ce qui entraîne

$$-\Delta u_1 = -\Delta u_2$$

ou

$$-\Delta\omega_1 = -\Delta\omega_2$$

avec $u_i = \omega_i + \theta_i \psi$ et $\omega_i \in H_o^1(\Omega)$.

Donc $\omega_1 = \omega_2$ et de nouveau, d'après HU,

$$u_1 = u_2.$$

REMARQUE I-3. Le problème de l'unicité pour $\lambda < \lambda_2^*$ dans le cas où $\phi \equiv$ cte est ouvert.

REMARQUE I-4. D'après la remarque I-2, si K est un cône de sommet zéro, l'unicité de $\omega$ entraîne l'unicité de $\theta$, même si K ne satisfait pas la condition HU (relativement à $\psi$).

En fait, on remarque facilement que la condition HU peut être affaiblie puisque $I/\lambda$ n'atteint jamais la valeur zéro. De ce fait, on pourrait poser

$$(HU)_{bis}\left\{\begin{array}{l}\forall\ u \in L^2(\Omega)\text{, la fonction } \tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi \quad \text{est} \\ \text{strictement croissante dans } ]L_1(u);L_2(u)[\setminus\{\theta;\tau_u(\theta)=0\} \\ = \{\theta \in \mathbb{R}\ ;\ \ell_1<\tau_u(\theta)<\ell_2 \text{ et } \tau_u(\theta)\neq 0\}\end{array}\right.$$

Et nous avons :

LEMME I-6 : *Soit* K *un cône de sommet zéro. Alors* K *satisfait* $(HU)_{bis}$.

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $\theta_1 = \theta_2$.

Supposons donc $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = \ell \neq 0$. Alors

$$\int (P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi))\psi = 0$$

Comme

$(u+\theta_i\psi - P_K(u+\theta_i\psi) \ ; \ g - P_K(u+\theta_i\psi)) \leq 0 \quad i = 1,2$ pour tout $g \in K$ on obtient

$$P_K(u+\theta_1\psi) = P_K(u+\theta_2\psi)$$

Or, K étant un cône de sommet zéro on a

$$\int v P_K v = |P_K v|^2_{L^2} \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

Donc

$$\int (u+\theta_i\psi) P_K(u+\theta_i\psi) = |P_K(u+\theta_i\psi)|^2_{L^2} \qquad i=1,2,$$

ce qui entraîne

$$(\theta_1 - \theta_2)\ell = 0.$$

Comme $\ell$ est supposé $\neq 0$, il nous reste

$$\theta_1 = \theta_2.$$

## § I-3. REMARQUES SUR LA REGULARITE DES SOLUTIONS.

Il est immédiat d'après (1.4) que

$$\omega \in H^1_o(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Donc, si u est solution de (1.1) nous avons

$$u \in H^1_o(\Omega) \cap H^2(\Omega) \oplus \mathbb{R}\psi.$$

Si $\phi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, alors $\psi \in H^2(\Omega)$ et

$$u \in H^2(\Omega).$$

Ce résultat ne peut pas être amélioré sans faire des hypothèses de "régularité" sur K. C'est ce que nous allons faire dans la suite. On suppose K satisfaisant l'hypothèse de régularité HR suivante :

$$\text{(HR)} \quad \begin{cases} \text{pour tout } p, \quad 1 \leqq p < +\infty \quad, \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ alors} \\ P_K u \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons :

<u>THEOREME I-3</u> : *Soit* $\Omega$ *ouvert borné et régulier de* $\mathbb{R}^N$ *(N = 2 ou 3) (*$\Omega$ *satisfaisant la condition forte de Lipschitz local,cf.Adams* [1] *) et* $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$. *Si* K *satisfait* HR *et* $(\omega,\theta)$ *est une solution de* (1.4), *alors*

$$\omega \in W^{3,q}(\Omega)$$

*pour tout* $q$, $1 \leqq q \leqq 6$ *si* $N = 3$, $1 \leqq q < +\infty$ si $N = 2$, *Donc*

$$\omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

*pour tout* $\alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq 1/2$ *si* $N = 3$, $0 \leqq \alpha < 1$ *si* $N = 2$.

Démonstration : Soit $(\omega,\theta)$ une solution de (1.4). Alors $\omega \in H^1_o(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Mais $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$ nous donne $\psi \in H^3(\Omega) \subset H^2(\Omega)$. Donc,

$$u = \omega + \theta\psi \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega),$$

et d'après l'hypothèse (HR)

$$P_K u \in H^1(\Omega).$$

D'après le Lemme I-1, $P_{K_\lambda}\omega = P_K u \in H^1(\Omega)$, ce qui entraîne

$$\omega \in H^1_o(\Omega) \cap H^3(\Omega),$$

et de même

$$u \in H^3(\Omega).$$

Comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q$, tel que $1 \leqq q \leqq 6$ si $N = 3$, $1 \leqq q < +\infty$ si $N = 2$, on déduit

$$H^3(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega).$$

De nouveau, d'après l'hypothèse (HR)

$$P_{K_\lambda}(\omega) = P_K u \in W^{1,q}(\Omega)$$

et donc

$$\omega \in W^{3,q}(\Omega).$$

Or, d'après les théorèmes d'immersion de Sobolev (cf. Adams [1])

$$W^{3,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{2,\alpha}(\Omega)$$

avec $0 \leqq \alpha \leqq 1/2$ si $N = 3$, ou $0 \leqq \alpha < 1$ si $N = 2$.

## § I-4. EXEMPLES.

On considère dans ce paragraphe quelques exemples simples qui illustrent les résultats précédents. Pour chacun des exemples, on analyse l'existence de solution dans les cas limites.

Fixons une fois pour toutes $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\phi \not\equiv 0$ et $\psi \in H^1(\Omega)$ la solution de $-\Delta\psi = 0$ dans $\Omega$, $\psi = \phi$ sur $\partial\Omega$.

### I-4.1 EXEMPLE 1 : Un modèle simple de la physique des plasmas (avec $P_K$ local).

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ v \geqq 0 \text{ p.p.}\}$. Alors

THEOREME I-4 : *Si* $\inf \operatorname{ess} \phi > 0$, *le problème*

$$(1.16)\quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ \ \textit{dans}\ \Omega \\ u = \theta\phi \ \textit{sur}\ \partial\Omega,\ \theta\ \textit{constante} \\ \lambda\displaystyle\int u^+\psi = I > 0 \end{cases}$$

*admet une solution dans* $H^1(\Omega)$ *si et seulement si* $0 < \lambda < +\infty$ . *En outre, la solution est unique si* $0 < \lambda < \lambda_1$ ($0 < \lambda < \lambda_2^*$ si $\phi \equiv$ cte).

Démonstration.

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \; ; \; v \geqq 0 \text{ p.p.}\}$$

alors

$$P_K(v) = v^+.$$

Comme $\phi \geqq m = \inf\limits_{\partial\Omega} \text{ess}\, \phi > 0$, nous avons, d'après le principe du maximum

$$\psi \geqq m > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

Donc

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = 0$$

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi = +\infty$$

L'existence de solutions pour $0 < \lambda < +\infty$ et la non-existence pour $\lambda \leqq 0$ résultent du Théorème I-1 pourvu que l'hypothèse (HE) soit vérifiée : $\forall\, \ell > 0$

$$A_\ell = \{v \in K \; ; \; \int v\psi = \ell\}$$

est borné dans $L^1(\Omega)$. Or, si $v \in A_\ell$ , alors

$$\ell = \int v\psi \geqq m \int v$$

Donc $\displaystyle\int |v| = \int v \leqq \ell/m$

L'hypothèse (HE) étant vérifiée, le Théorème I-1 s'applique. Ce résultat d'existence est identique à ceux obtenus par R. Temam [35] et Berestycki-Brézis [3] dans le cas $\phi \equiv 1$. L'unicité résulte du Théorème I-2. Il suffit de vérifier l'hypothèse (HU). Vérifions la.

Soit $u \in L^2(\Omega)$ et $\tau_u(\theta) = \int (u+\theta\psi)_+ \psi$ , alors

$$L_1(u) = \inf\,\{\theta \; ; \; \tau_u(\theta) > 0\} = \inf_{\Omega} \text{ess}\, \left(- \frac{u(x)}{\psi(x)}\right)$$

et

$$L_2(u) = +\infty.$$

L'hypothèse (HU) découle immédiatement du fait que $\tau_u$ est convexe et que $\tau_u(\theta) = 0 \quad \forall\, \theta \leqq L_1(u)$.

<u>REMARQUE I-5</u>. On peut montrer (voir R. Temam [35] et J. Puel [26]) avec des arguments différents que le problème (1.16) a une solution unique pour tout $\lambda \in (0,\lambda_2]$ si $\phi \equiv 1$, où $\lambda_2$ est la deuxième valeur propre du problème de Dirichlet homogène pour le laplacian. Il convient de remarquer que, d'après le Lemme I-5, $\lambda_2^* \leqq \lambda_2$. En outre, G. Schaeffer [27] a montré que, en général, la solution de (1.16) n'est pas unique pour $\lambda > \lambda_2$.

I-4.2 <u>EXEMPLE 2</u> : <u>Un cas où $P_K$ est opérateur non local</u>.

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) \;;\; |v|_{L^2} \leqq 1\}$

Alors on a

<u>THEOREME I-5</u> : *Le problème*

$$(1.17)\quad \begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{1 + (|u|_{L^2} - 1)_+}\, u & \textit{dans } \Omega \\[2ex] u = \theta\psi \textit{ sur } \partial\Omega, \ \theta \in \mathbb{R} \textit{ inconnu} \\[2ex] \dfrac{\lambda}{1 + (|u|_{L^2} - 1)_+} \displaystyle\int u\psi = I > 0 \end{cases}$$

*admet une solution dans* $H^1(\Omega)$ *si et seulement si*

$$-|\psi|_{L^2} < I/\lambda < |\psi|_{L^2}$$

*La solution est unique si* $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \lambda_2^*$ si $\phi \equiv$ cte) *et* $|I/\lambda| < |\psi|_{L^2}$.

Démonstration :

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \;;\; |v|_{L^2} \leqq 1\}$$

Alors

$$P_K(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v|_{L^2} \leq 1 \\ \dfrac{v}{|v|_{L^2}} & \text{si } |v|_{L^2} \geq 1 \end{cases} = \frac{1}{1 + (|v|_{L^2} - 1)_+} v$$

D'après le Lemme I-2 :

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = \lim_{\theta \to -\infty} \int P_K(\theta\psi)\psi = -|\psi|_{L^2}$$

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi = \lim_{\theta \to +\infty} \int P_K(\theta\psi)\psi = |\psi|_{L^2}$$

L'existence de solutions dans $H^1(\Omega)$ pour

$$-|\psi|_{L^2} < I/\lambda < |\psi|_{L^2}$$

est la non existence pour $I/\lambda > |\psi|_{L^2}$ ou $I/\lambda < -|\psi|_{L^2}$ résultent du Théorème I-1 car K étant borné dans $L^2(\Omega)$ satisfait évidemment l'hypothèse (HE).

Nous examinons maintenant le cas limite :

$$\frac{I}{\lambda} = |\psi|_{L^2} \quad . \tag{1.18}$$

(le cas $I/\lambda = -|\psi|_{L^2}$ étant tout à fait analogue). Dans ce cas, nous avons

$$K_\lambda = \{ \psi / |\psi|_{L^2} \}$$

D'après le Lemme I-1, (1.17) équivaut à déterminer $(\omega,\theta)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega \\ \omega_{|\partial\Omega} = 0 \\ \lambda \int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I. \end{cases}$$

Donc, dans le cas limite (1.18) ce problème équivaut à déterminer $\theta$ tel que

$$(1.19) \qquad \int P_K\left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}}B\psi + \theta\psi\right)\psi = |\psi|_{L^2}$$

où B est l'inverse du laplacian ($B = (-\Delta)^{-1}$) avec condition homogène au bord de $\Omega$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\int P_K\left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}}B\psi+\theta\psi\right)\psi \leq \left|P_K\left(\frac{I}{|\psi|}B\psi+\theta\psi\right)\right|_{L^2}|\psi|_{L^2} \qquad \forall\ \theta\in\mathbb{R}\ .$$

l'égalité n'étant atteinte que si

$$P_K\left(\frac{I}{|\psi|}B\psi+\theta\psi\right) = c\psi \qquad \text{avec } c = 1/|\psi|_{L^2}.$$

Or, $P_K v$ est proportionnel à v ($P_K v = c(v)v$ avec $c(v)\in\mathbb{R}$). Donc si (1.19) a lieu, on a

$$\frac{I}{|\psi|_{L^2}}B\psi+\theta\psi = c\psi$$

où c est une constante.

De plus $c \neq \theta$ car $B\psi \neq 0$ ($\psi \neq 0$). Donc

$$\psi = B\left(\frac{I}{(c-\theta)|\psi|_{L^2}}\psi\right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \dfrac{I}{(c-\theta)|\psi|_{L^2}}\psi & \text{dans } \Omega \\ \psi_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

qui est une absurdité, par définition de $\psi$.

Ainsi il n'existe pas de solution dans les cas limites.

L'unicité est conséquence du Théorème I-2 ; il suffit de vérifier la condition (HU). On a, pour tout $u\in L^2(\Omega)$ :

$$\tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi = \begin{cases} \theta|\psi|^2_{L^2} + \int u\psi & \text{si } |u+\theta\psi|_{L^2} \leq 1 \\ \dfrac{\theta|\psi|^2_{L^2} + \int u\psi}{|u+\theta\psi|_{L^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Or, il est évident que $|u+\theta\psi|_{L^2} \leq 1$ si et seulement si

$$(1.20) \quad \theta^2|\psi|^2_{L^2} + 2\theta\int u\psi + |u|^2_{L^2} - 1 \leq 0$$

Deux possibilités se présentent :

i) $\quad (\int u\psi)^2 - |\psi|^2_{L^2}(|u|^2_{L^2} - 1) \leq 0$

ii) $\quad (\int u\psi)^2 - |\psi|^2_{L^2}(|u|^2_{L^2} - 1) > 0$

Dans le premier cas nous avons

$$(\int u\psi)^2 < (\int u\psi)^2 + |\psi|^2_{L^2} \leq |u|^2|\psi|^2$$

et

$$|u+\theta\psi| \geq 1 \qquad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\tau_u(\theta) = \frac{\theta|\psi|^2_{L^2} + \int u\psi}{|u+\theta\psi|} \qquad \forall\ \theta$$

et

$$\frac{d\tau_u}{d\theta} = \frac{|\psi|^2|u|^2 - (\int u\psi)^2}{|u+\theta\psi|^3} \geq \frac{|\psi|^2}{|u+\theta\psi|^3} > 0$$

Dans ce cas $\tau_u$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et nous avons

$$L_1(u) = -\infty \quad , \quad L_2(u) = +\infty \; .$$

Dans le cas ii), il existe $\theta_1 < \theta_2$ tels que

$$\tau_u(\theta) = \begin{cases} \theta|\psi|^2 + \int u\psi & \text{si } \theta \in [\theta_1,\theta_2] \\ \dfrac{\theta|\psi|^2 + \int u\psi}{|u+\theta\psi|_{L^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\frac{d\tau_u}{d\theta} = \begin{cases} |\psi|^2 & \text{si } \theta \in ]\theta_1,\theta_2[ \\ \dfrac{|u|^2|\psi|^2 - (\int u\psi)^2}{|u+\theta\psi|^3} & \text{si } \theta < \theta_1 \text{ ou } \theta > \theta_2 \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(\int u\psi)^2 \leq |u|^2|\psi|^2$$

Si $|\psi|^2|u|^2 > (\int u\psi)^2$, alors $\tau_u$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et, de nouveau

$$L_1(u) = -\infty \ , \ L_2(u) = +\infty \ .$$

Par contre, si $|\psi|^2|u|^2 = (\int u\psi)^2$, alors

$$\tau_u(\theta) = \begin{cases} -|\psi|^2_{L^2} & \text{si } \theta \leq \theta_1 \\ \theta|\psi|_{L^2} + \int u\psi & \text{si } \theta \in [\theta_1,\theta_2] \\ |\psi|^2_{L^2} & \text{si } \theta \geq \theta_2 \end{cases}$$

avec, d'après (1.20)

$$L_1(u) = \theta_1 = \frac{-|\psi|-\int u\psi}{|\psi|^2} \quad \text{et} \quad L_2(u) = \theta_2 = \frac{|\psi|-\int u\psi}{|\psi|^2}$$

Donc, dans tous les cas $\tau_u$ est strictement croissante dans $]L_1(u),L_2(u)[$ , ce qui montre que K satisfait (HU).

### I-4.3 EXEMPLE 3 : Un problème à frontière libre avec $P_K$ non local.

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ v \geq 0 \text{ p.p. et } |v|_{L^2} \leq 1\}$.

**THEOREME 1.6** : *Le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{1+(|u^+|_{L^2}-1)^+}\, u^+ & \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi & \text{sur } \partial\Omega \\ \dfrac{\lambda}{1+(|u^+|_{L^2}-1)^+} \displaystyle\int u^+\psi = I > 0 & \end{cases}$$

*a une solution dans* $H^1(\Omega)$ *pour tout* $\lambda \neq 0$ *tel que*

$$-|\psi^-|_{L^2} < \frac{I}{\lambda} < |\psi^+|_{L^2}$$

*Il n'en admet pas si* $\frac{I}{\lambda} > |\psi^+|_{L^2}$ $\quad \frac{I}{\lambda} < -|\psi^-|_{L^2}$.

**Démonstration** : Montrons d'abord que

$$P_K u = \frac{1}{1+(|u^+|_{L^2}-1)^+}\, u^+$$

Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors $\int (v-v^+)(g-v^+) \leq 0$ pour tout $g \geq 0$. Si $|v^+| \leq 1$, alors $v^+ \in K$ et $v^+ = P_K v$.

Supposons donc $|v^+| \geq 1$ et soit $g \in K$. Alors

$$\int (v - \frac{v^+}{|v^+|})\,(g - \frac{v^+}{|v^+|}) = \int \left[(1 - \frac{1}{|v^+|})v^+ - v^-\right]\,(g - \frac{v^+}{|v^+|})$$

$$\leq (1 - \frac{1}{|v^+|})\int v^+ g - (1 - \frac{1}{|v^+|})\,|v^+|$$

$$\leq (|v^+|-1)(|g|-1) \leq 0 \quad (\text{car } |g| \leq 1).$$

Donc

$$P_K v = \begin{cases} v^+ \text{ si } |v^+| \leqq 1 \\ \dfrac{v^+}{|v^+|} \text{ si } |v^+| \geqq 1 \end{cases}$$

De plus, d'après le Lemme I-2,

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = \lim_{\theta \to -\infty} \int P_K(\theta\psi)\psi = -|\psi^-|_{L^2}$$

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi = \lim_{\theta \to +\infty} \int P_K(\theta\psi)\psi = |\psi^+|_{L^2}$$

Donc, d'après le Théorème I-1 (puisque K étant borné dans $L^2(\Omega)$ satisfait la condition (HE)), il existe une solution pour tout $\lambda \neq 0$ tel que

$$-|\psi^-| < \frac{I}{\lambda} < |\psi^+| \ .$$

REMARQUE I-6 : Les questions de l'existence de solutions dans les cas limites et l'unicité pour l'exemple 3 sont ouvertes.

### I-4.4 EXEMPLE 4 : Un problème à deux frontières libres.

On considère $f, g \in L^2(\Omega)$ avec $f \leqq g$ p.p. On fait les hypothèses

$H_1$ : mes $\{x \in \Omega \ ; \ f(x) < g(x)\} > 0$.

$H_2$ : $\inf\limits_{\partial\Omega} \text{ess } \phi > 0$

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ f \leqq v \leqq g \text{ p.p.}\}$ . Alors nous avons

THEOREME I-7 : *Le problème*

$$(1.21) \begin{cases} -\Delta u = \lambda\left[f+(u-f)^+ - (u-g)^+\right] \textit{ dans } \Omega \\ u = \theta\phi \textit{ sur } \partial\Omega \\ \lambda\int (f+(u-f)^+ - (u-g)^+)\psi = I > 0 \end{cases}$$

*admet au moins une solution dans* $H^1(\Omega)$ *pour tout* $\lambda \neq 0$ *tel que*

$$\int f\psi < I/\lambda < \int g\psi$$

*et il n'en admet pas si* $I/\lambda > \int g\psi$ ou $I/\lambda < \int f\psi$ .

*Dans les cas limites, si* $I/\lambda = \int g\psi$ (resp. $I/\lambda = \int f\psi$) *alors il existe une infinité de solutions.*

$$u = \lambda Bg + \theta\psi, \qquad \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. : } u = \lambda Bf + \theta\psi)$$

*si* $\quad \xi_g = \sup \text{ess}\,(g(x) - \lambda Bg(x)) \,/\, \psi(x) < +\infty$

$\quad$ (resp. : $\xi_f = \inf \text{ess}(f(x) - \lambda Bf(x)) \,/\, \psi(x) > -\infty$)

*et il n'y a pas de solution si* $\xi_g = +\infty$ (resp. $\xi_f = -\infty$).

*La solution est unique si* $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \lambda_2^*$ *si* $\phi \equiv \dot{c}te$) *et* $\int f\psi < I/\lambda < \int g\psi$.

Démonstration : D'après les hypothèses $H_1$ et $H_2$,

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = \int f\psi < \int g\psi = \sup_{v \in K} \int v\psi = \ell_2$$

Comme $P_K v = f+(v-f)^+-(v-g)^+$, l'existence de solution pour (1.21) pour $\ell_1 < I/\lambda < \ell_2$ et la non existence pour $I/\lambda < \ell_1$ et $I/\lambda > \ell_2$ découlent du Théorème I-1 car K satisfait l'hypothèse (HE).

Voyons maintenant le cas limite.

Supposons $\int g\psi \neq 0$ et $\lambda = I/\int g\psi$. Alors nous avons

(1.22) $\quad K_\lambda = \{g\}$

D'après le Lemme I-1, (1.21) équivaut à déterminer $(\omega,\theta)$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \lambda P_{K_\lambda}\omega \quad \text{dans } \Omega \\ \omega = 0 \\ \lambda\int P_{K_\lambda}(\omega+\theta\psi)\psi = I \end{cases}$$

Donc le problème (1.21) dans le cas limite (1.22), équivaut à trouver $\theta$ tel que

(1.23) $$\int P_K\left(\frac{I}{\int g\psi}\, Bg + \theta\psi\right)\psi = \int g\psi$$

Or il est évident que pour $\theta$ tel que

(1.24) $$\theta \geqq \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\ (g(x) - (I/\int g\psi) Bg(x)) \;/\; \psi(x)$$

(1.23) est satisfait. Donc

$$u = \frac{I}{\int g\psi} Bg + \theta\psi$$

est solution pour tout $\theta$ satisfaisant (1.24), d'où une infinité de solutions.

Les mêmes arguments s'appliquant pour le cas $\lambda = I/\int f\psi$.

Montrons maintenant l'unicité.

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \sup \{\theta \ ;\ \tau_u(\theta) = \ell_1\} \\ &= \sup \{\theta \ ;\ (u+\theta\psi-f)^+ - (u+\theta\psi-g)^+ = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} \\ &= \inf_{x\in\Omega} \text{ess}\ (f(x) - u(x)) \;/\; \psi(x) \end{aligned}$$

D'une façon analogue nous obtenons

$$L_2(u) = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\ (g(x) - u(x)) \;/\; \psi(x)$$

Soient $\theta_1$ et $\theta_2 \in \left]L_1(u), L_2(u)\right[$ tels que

$$\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2).$$

Alors

$$\int f\psi < \int P_K(u+\theta\psi)\psi = \int P_K(u+\theta_2\psi)\psi < \int g\psi$$

ou encore

(1.25) $$0 < \int F(\theta_1)\psi = \int F(\theta_2)\psi < \int (g-f)\psi$$

où

$$F(\theta_i) = (u+\theta_i\psi-f)^+ - (u+\theta_2\psi-g)^+ \geqq 0 \text{ p.p.}$$

De plus, $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ satisfait la propriété suivante : pour presque tout $x \in \Omega$ on a

i) $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ est croissante

ii) $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ est strictement croissante dans

$$\left[ \frac{f(x) - u(x)}{\psi(x)} \; ; \; \frac{g(x) - u(x)}{\psi_{(x)}} \right]$$

On peut supposer sans perdre la généralité que $\theta_1 \leqq \theta_2$. Si $\theta_1 < \theta_2$ alors, d'après i)

$$F(\theta_1)(x) \leqq F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Deux possibilités se présentent

1ère possibilité : $F(\theta_1)(x) = F(\theta_2)(x)$ p.p. $x \in \Omega$

Dans ce cas, d'après ii) $\theta_1 \geqq L_2(u)$ ou $\theta_2 \leqq L_1(u)$, ce qui est impossible d'après le choix de $\theta_1$ et $\theta_2$.

2e possibilité : $\exists\ \Omega' \subset \Omega$ , $|\Omega'| \neq 0$ tel que

$$F(\theta_1)(x) < F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega'$$

$$F(\theta_1)(x) = F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \setminus \Omega$$

Dans ce cas

$$\int F(\theta_1)\psi = \int_{\Omega'} F(\theta_1)\psi + \int_{\Omega-\Omega'} F(\theta_1)\psi < \int_{\Omega'} F(\theta_2)\psi + \int_{\Omega-\Omega'} F(\theta_2)\psi$$

$$= \int F(\theta_2)\psi,$$

ce qui est contradictoire avec (1.25). Donc $\theta_1 = \theta_2$ .

<u>REMARQUE I-7</u>. Dans tous les exemples 1,2,3 le convexe K satisfait l'hypothèse de régularité (HR). De plus, si f et $g \in W^{1,p}$ pour tout p, $1 \leqq p < +\infty$, alors le convexe K dans l'exemple 4 satisfait aussi la condition (HR). Donc, si $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$ les solutions u dans tous les exemples appartiennent à $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ (cf. Théorème I-3).

<u>REMARQUE I-8</u>. Le problème (1.21) est un problème à deux frontières libres. Par exemple, si

$$f \equiv a < b \equiv g$$

on résoud

$$-\Delta u = \lambda \begin{cases} a \text{ si } u \leqq a \\ u \text{ si } a \leqq u \leqq b \\ b \text{ si } u \geqq b \end{cases} \quad \text{dans } \Omega,$$

les régions $\{u \leqq a\}$, $\{a \leqq u \leqq b\}$ et $\{u \geqq b\}$ étant inconnues "a priori". Dans ce cas, les deux "frontières libres" sont

$$\{u = a\} \text{ et } \{u = b\}$$

On remarque que l'on a alors

$$\xi_f = \xi_a = \inf_{\Omega} \text{ess} \frac{a - (I/a\int\psi)Ba}{\psi} > -\infty \quad (\text{car } Ba \in L^\infty(\Omega))$$

$$(\text{resp. } \xi_g = \xi_b = \sup_{\Omega} \text{ess} \frac{b - (I/b\int\psi)Bb}{\psi} < +\infty \quad )$$

Pour $I/\lambda = a\int\psi$ ou $I/\psi = b\int\psi$ il y a une infinité de solutions.

# CHAPITRE II

# APPROXIMATION DES SOLUTIONS

Comme on a vu dans le chapitre précédent, le problème (1.1) peut être résolu en deux étapes, à savoir :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{1ère étape : on cherche } \omega \in H_o^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \qquad \int \nabla\omega.\nabla v = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega)v \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega) \\ \text{2e étape : } \omega \text{ étant calculé, on cherche } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \qquad \int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I/\lambda \end{cases}$$

Dans ce chapitre nous développons une méthode d'approximation des solutions pour la première étape de (2.1), basée sur l'algorithme standard des approximations successives.

## § II.1 UNE METHODE D'APPROXIMATION

Pour $\lambda \in \Lambda$ , on considère l'opérateur

$$\begin{aligned} S_\lambda : H_o^1(\Omega) &\longrightarrow H_o^1(\Omega) \\ \omega &\longmapsto S_\lambda\omega \end{aligned}$$

défini par

$S_\lambda(\omega) = S$ solution de

$$(2.2)\quad \begin{cases} -\Delta S = \lambda P_{K_\lambda}\omega & \text{dans } \Omega \\ S_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On définit par récurrence une famille $\{\omega^k\}$ d'éléments de $H_o^1(\Omega)$ ; on part de $\omega^o \in H_o^1(\Omega)$, $\omega^k$ étant calculé, on définit $\omega^{k+1}$ par

$$(2.3)\quad \omega^{k+1} = S_\lambda(\omega^k)$$

Alors nous avons :

<u>THEOREME II-1</u> : *On suppose que* K *satisfait l'hypothèse* (HE) . *Alors, pour tout* $\lambda \in \Lambda, \lambda > 0$ , *la suite* $\{\omega^k\}$ *définie par* (2.3) *contient une sous-suite* $\{\omega^{k_j}\}_j$ *qui converge dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers une solution* $\omega$ *du problème.*

Démonstration : Elle résulte du lemme suivant :

<u>LEMME II-1</u> : *Pour tout* $\lambda > 0$ *tel que* $K_\lambda \neq 0$

i) $e(S_\lambda(\omega)) \leq e(\omega)$

ii) $e(S_\lambda(\omega)) = e(\omega)$ *si et seulement si* $S_\lambda(\omega) = \omega$

$$e(v) = 1/2\int|\nabla v|^2 - \lambda\int(v - 1/2\, P_{K_\lambda}v)P_{K_\lambda}v$$

Démonstration : Pour $\omega \in H_0^1(\Omega)$, dénotons $S = S_\lambda(\omega)$. En multipliant (2.2) par $S-\omega$ on déduit (en posant $a(u,v) = \int\nabla u.\nabla v$)

$$a(S;S) - a(\omega,S) = \lambda\int P_{K_\lambda}(\omega)(S-\omega)$$

Donc

$$(2.4) \qquad 1/2\, a(S,S) - \frac{1}{2}\, a(\omega,\omega) \leq \lambda\int P_{K_\lambda}\omega(S-\omega)$$

D'après le Lemme 1-4, la fonctionnelle

$$\omega \longmapsto \int(\omega - \frac{1}{2}\, P_{K_\lambda}\omega)P_{K_\lambda}\omega$$

étant convexe et F-différentiable, nous avons

$$(2.5) \qquad \int P_{K_\lambda}\omega(S-\omega) \leq \int(S - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}S)P_{K_\lambda}S - \int(\omega - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}\omega)P_{K_\lambda}\omega$$

Donc, d'après (2.4) (en utilisant $\lambda > 0$)

$$e(S) \leq e(\omega).$$

Pour montrer ii), supposons que

$$e(S) = e(\omega).$$

Alors, d'après (2.4) et (2.5) (puisque $\lambda > 0$)

$$\lambda\int P_{K_\lambda}\omega(S-\omega) \leq \lambda\int(S - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}S)P_{K_\lambda}S - \lambda\int(\omega - \frac{1}{2}P_{K_\lambda}\omega)P_{K_\lambda}\omega$$
$$= \frac{1}{2}\, a(S;S) - \frac{1}{2}\, a(\omega,\omega) \leq \lambda\int P_{K_\lambda}\omega(S-\omega)$$

et nous obtenons

$$\frac{1}{2}\, a(S,S) - \frac{1}{2}\, a(\omega,\omega) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega)(S-\omega)$$

Comme $a(S,v) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega)v \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega)$, on conclut

$$\frac{1}{2}\, a(S-\omega;\, S-\omega) = 0,$$

et donc

$$S = \omega\ .$$

Reprenons maintenant la démonstration du Théorème II-1. D'après (2.2) et (2.3)

$$a(\omega^{k+1};v) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega^k)v \qquad \forall\, v \in H_o^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Alors, pour $v = \omega^{k+1}$ on a

$$||\omega^{k+1}||^2 = a(\omega^{k+1};\omega^{k+1}) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega^k)\omega^{k+1}$$

$$\leqq \lambda |\omega^{k+1}|_{L^p}\ |P_{K_\lambda}(\omega^k)|_{L^{p^*}}$$

avec $p = 2N/N-2$ si $N \geqq 3$ et $p > 2$ si $N = 2$ et $p^*$ le conjugué de p. D'après le théorème d'immersion de Sobolev

$$|\omega^{k+1}|_{L^p} \leqq c_1 ||\omega^{k+1}||$$

Donc

$$||\omega^{k+1}||^2 \leqq \lambda c_1 ||\omega^{k+1}||\ |P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^{p^*}}$$

ou encore

$$||\omega^{k+1}|| \leqq \lambda c_1 |P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^{p^*}}$$

Soit $S = 2(1-\frac{1}{p^*}) < 1$. Alors

$$|P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^{p^*}} \leqq |P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^1}^{1-s}\ |P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^2}^{s}$$

et d'après (HE) :

$$|P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^{p^*}} \leqq c_2 |P_{K_\lambda}\omega^k|_{L^2}^{s}$$

Donc

$$||\omega^{k+1}|| \leqq c_3 |P_{K_\lambda} \omega^k|^s$$

Or, $P_{K_\lambda}$ étant un opérateur contractant nous avons

$$\left| |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^2} - |P_{K_\lambda} o|_{L^2} \right| \leqq |P_{K_\lambda} \omega^k - P_{K_\lambda} o|_{L^2} \leqq |\omega^k|_{L^2}$$

d'où on obtient

$$||\omega^{k+1}|| \leqq c_3 (|\omega^k|_{L^2} + |P_{K_\lambda} o|)^s$$

Comme $|\omega^k|_{L^2} \leqq 1/\lambda_1 ||\omega^k||$, on peut choisir $c_4 > 0$ tel que

$$(2.7) \qquad ||\omega^{k+1}|| \leqq c_4 (1 + ||\omega^k||)^s$$

Si on dénote $a = \varepsilon^s (||\omega^k||+1)^s$ et $b = 1/\varepsilon^s$ avec $\varepsilon > 0$ fixé, alors, d'après l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

c'est-à-dire

$$(||\omega^k||+1)^s \leqq \frac{1}{p} \varepsilon^{sp} (||\omega^k||+1)^{sp} + \frac{1}{p^* \varepsilon^{sp^*}}$$

En choisissant $p = 1/s > 1$ et $p^* = 1/1-s$, on a

$$(||\omega^k||+1)^s \leqq s\varepsilon (||\omega^k||+1) + (1-s)\varepsilon^{-s/1-s}$$

Donc d'après (2.7)

$$||\omega^{k+1}|| \leqq c_4 s\varepsilon ||\omega^k|| + c_4 s\varepsilon + c_4 (1-s)\varepsilon^{-s/1-s}$$
$$= c\varepsilon ||\omega^k|| + c'.$$

En choisissant $\varepsilon$ tel que $c\varepsilon < 1$, on obtient

$$||\omega^{k+1}|| \leqq (\varepsilon c)^{k+1} ||\omega^o|| + \frac{c'}{1-c\varepsilon}$$

Donc, $\{\omega^k\}$ étant bornée dans $H_o^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $\{\omega^{k_j}\}$ telle que

$$\omega^{k_j} \rightharpoonup \omega \quad \text{dans } H_o^1(\Omega) \text{ faible}$$
$$\omega^{k_j} \longrightarrow \omega \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'après la continuité de l'opérateur $P_{K_\lambda}$

(2.8) $\quad P_{K_\lambda}\omega^{k_j} \to P_{K_\lambda}\omega$ dans $L^2(\Omega)$.

Comme $\{\omega^k\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, la suite décroissante $e(\omega^k)$ est minorée, donc convergente :

$$e(\omega^k) \underset{k\to+\infty}{\to} \ell$$

Alors

$$e(\omega) \le \lim_j \inf e(\omega^{k_j}) = \lim_k e(\omega^k) = \ell$$

et d'après (2.8)

$$\omega^{k_{j+1}} = S_\lambda(\omega^{k_j}) \to S_\lambda(\omega) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

Donc

$$e(\omega^{k_{j+1}}) \to e(S_\lambda(\omega)) = \ell \ge e(\omega)$$

Comme $e(S_\lambda(\omega)) \le e(\omega)$, on déduit

$$\ell = e(\omega) = e(S_\lambda(\omega)).$$

D'après le Lemme II-1, $S_\lambda(\omega) = \omega$ et $\omega$ est solution de (2.1)-1ère étape.

## § II-2 : REDUCTION A LA DIMENSION FINIE ; LE PROBLEME DISCRET

### II-2.1 : Discrétisation des espaces.

On considère deux familles $\{Y_h\}_h$ et $\{V_h\}_h$ d'espaces vectoriels de dimension finie indexées par $h$ positif et décroissant vers zéro, telles que

(2.9) $\quad V_h \subset H_0^1(\Omega) \quad , \quad Y_h \subset L^2(\Omega) \qquad \forall\, h$

(2.10) $\quad V_h \subset Y_h \quad \forall\, h$

(2.11) $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $y \in L^2(\Omega)$), on peut construire $v_h \in V_h$ (resp. $y_h \in Y_h$) tel que $v_h \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ (resp. $y_h \to y$ dans $L^2(\Omega)$) lorsque $h \to 0$.

En particulier, nous désignons par $\psi_h$ une suite donnée d'éléments de $Y_h$ telle que

$$\psi_h \to \psi \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

II-2.2 : Discrétisation du convexe.

On considère pour chaque h un ensemble $K_h$ tel que (cf. R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémolière [14])

(2.12) $K_h$ est un ensemble convexe fermé de $Y_h$ (où la topologie de $Y_h$ est, par exemple, celle induite par $L^2(\Omega)$).

(2.13) $K_h$ "approche" K au sens suivant :

i) pour tout $g \in K$, on peut contruire $g_h \in K_h$ tel que $g_h \to g$ dans $L^2(\Omega)$,

ii) si $g_h \in K_h$ et $g_h \to g$ dans $L^2(\Omega)$ faible, alors $g \in K$.

Soit

$$\ell_{1,h} = \inf_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h \quad , \quad \ell_{2,h} = \sup_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h \tag{2.14}$$

Alors nous avons :

LEMME II-2 : *Sous les hypothèses* (2.9) *à* (2.13) :

$$\text{i) } \liminf_h \ell_{2,h} \geq \ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi$$

$$\text{ii) } \limsup_h \ell_{1,h} \leq \ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi$$

Démonstration : Pour $\varepsilon > 0$, il existe $v^\varepsilon \in K$ tel que

$$\ell_1 \leq \int v^\varepsilon \psi < \ell_1 + \varepsilon$$

Fixons $v^\varepsilon$ et soit, d'après (2.13) $v_h^\varepsilon \in K_h$ tel que

$$v_h^\varepsilon \underset{h\to 0}{\rightarrow} v^\varepsilon \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme

$$\ell_{1,h} = \inf_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h \leq \int v_h^\varepsilon \psi_h$$

nous déduisons

$$\limsup_h \ell_{1,h} \leq \lim \int v_h^\varepsilon \psi_h = \int v^\varepsilon \psi < \ell_1 + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire nous obtenons

$$\limsup_h \ell_{1,h} \leq \ell_1$$

D'une façon tout à fait analogue nous déduisons

$$\liminf_h \ell_{2,h} \geq \ell_2$$

<u>REMARQUE II-1</u> : Dans le cas particulier où $K_h \subset K$ et $\psi_h \equiv \psi$ , pour tout h nous avons

$$\ell_{1,h} \geq \ell_1 \ , \ \ell_{2,h} \leq \ell_2$$

Donc $\ell_1 \leq \liminf \ell_{1,h}$ et $\ell_2 \geq \limsup_h \ell_{2,h}$ et d'après le Lemme précédent

$$\lim_h \ell_{1,h} = \ell_1 \quad , \quad \lim_h \ell_{2,h} = \ell_2$$

<u>COROLLAIRE II-1</u> : *Sous les hypothèses* (2.9) *à* (2.13), *si* $\ell_1 < \ell_2$, *alors* $\ell_{1,h} < \ell_{2,h}$ *pour tout* h *suffisamment petit.*

## II-2.3 : <u>Formulation du problème discret</u>.

Etant donné $Y_h$, $V_h$, $K_h$ et $\psi_h$ comme précédemment, on définit

(2.15) $$K_{h,\lambda} = K_h \cap \{v_h \in Y_h \ ; \int v_h \psi_h = I/\lambda\}$$

qui est un ensemble convexe fermé de $Y_h$. On dénote $P_h$ l'opérateur de projection sur $K_{h,\lambda}$ (pour le produit scalaire induit par $L^2(\Omega)$).

Alors on pose la problème :

Déterminer $(\omega_h, \theta_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ tel que

$$(2.16)\quad \begin{cases} \text{1ère étape : } \displaystyle\int \nabla\omega_h . \nabla v_h = \lambda \int P_h(\omega_h) v_h \quad \forall\, v_h \in V_h \\ \text{2e \quad étape : } \displaystyle\int P_{K_h}(\omega_h + \theta_h \psi_h)\psi_h = I/\lambda \end{cases}$$

Nous allons traiter maintenant l'existence et l'unicité de solution du problème (2.16).

II-2.4 : Un résultat d'existence.

On suppose $K_h$ satisfaisant la propriété suivante :

$(HE)_h$ : pour tout h tel que $\ell_{1,h} < \ell_{2,h}$ , et pour tout $\ell \in ]\ell_{1,h}; \ell_{2,h}[$ , l'ensemble

$\{v_h \in K_h \ ; \int v_h \psi_h = \ell\}$ est borné dans $Y_h$

Soit

$$\Lambda_h = \{\lambda \neq 0 \ ; \ \ell_{1,h} < I/\lambda < \ell_{2,h}\}$$

Alors nous avons

THEOREME II-2 : *Sous la condition* $(HE)_h$, *le problème* (2.16) *admet au moins une solution pour tout* $\lambda \in \Lambda_h$. *Si* $I/\lambda > \ell_{2,h}$ *ou* $I/\lambda < \ell_{1,h}$ (2.16) *n'admet pas de solutions.*

Démonstration : Comme dans le Théorème I-1, elle suit des lemmes suivants :

LEMME II-3 : *Pour tout* $\omega_h \in Y_h$ , *la fonction*

$$\tau_h(\theta) = \int P_{K_h}(\omega_h + \theta\psi_h)\psi_h$$

*est lipschitzienne et croissante dans* $\mathbb{R}$. *De plus*

$$\lim_{\theta\to-\infty} \tau_h(\theta) = \ell_{1,h}\ , \quad \lim_{\theta\to+\infty} \tau_u(\theta) = \ell_{2,h}$$

Démonstration : elle est identique à celle du Lemme I-2.

LEMME II-4 : *La fonctionnelle* $J_h : Y_h \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$J_h(v_h) = \int (v_h - \frac{1}{2} P_h(v_h))P_h(v_h)$$

*est convexe et F-différentialbe dans* $Y_h$ *avec différentielle*

$$J' = P_h$$

Démonstration : $K_h$ est un convexe fermé de $Y_h$. Donc il est fermé dans $L^2(\Omega)$. Considérons la fonctionnelle

$$J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$J(v) = \int (v - \frac{1}{2} P_h(v))P_h(v)$$

Alors d'après le Lemme I-4, J est F-différentiable et convexe dans $L^2(\Omega)$ avec $P_h = J'$.

Comme $J_h = J_{|Y_h}$, il en est de même pour $J_h$, i.e. $J_h$ est convexe et F-différentiable dans $Y_h$ avec $J'_h = P_h$.

LEMME II-5 : *On considère le problème d'optimisation*

$$\mathcal{P}_h : \inf \{e_h(\omega_h) \ ; \ \omega_h \in V_h\}$$

*avec*
$$e_h(\omega_h) = \frac{1}{2} \int |\nabla\omega_h|^2 - \lambda\int (\omega_h - \frac{1}{2} P_h\omega_h)P_h\omega_h$$

*Alors, pour tout* $\lambda \in \Lambda_h$ , $\mathcal{P}_h$ *admet au moins une solution.*

Démonstration : Comme au Lemme I-3, on la fera en trois étapes.

. 1ère étape : $K_{h,\lambda} \neq \emptyset$

C'est une conséquence du Lemme II-3.

. 2e étape : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4} \int |\omega_h|^2 - c \quad \forall\, \omega \in V_h$$

où $\lambda_1$ est la première valeur propre du problème de Dirichlet homogène.

$$e_h(\omega_h) = \frac{1}{2}\int |\nabla\omega_h|^2 - \lambda\int \omega_h P_h \omega_h + \frac{\lambda}{2}\int |P_h\omega_h|^2_{L^2}$$

$$\geq \frac{1}{2}\int |\nabla\omega_h|^2 - \int |\omega_h|\;|\lambda P_h\omega_h| + \frac{\lambda}{2}\int |P_h\omega_h|^2$$

$$\geq \frac{\lambda_1}{2}\int |\omega_h|^2 - \frac{\alpha}{2}\int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})\int |P_h\omega_h|^2$$

En choisissant $\alpha = \frac{\lambda_1}{2}$ on a

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda 1}{4}\int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2}\,(1 - \frac{2}{\lambda_1})\int |P_h\omega_h|^2$$

Si $\frac{\lambda}{2}\,(1 - \frac{2}{\lambda_1}) \geq 0$, alors $e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4}\int |\omega_h|^2$

Si $\frac{\lambda}{2}\,(1 - \frac{2}{\lambda_1}) < 0$, on utilise $(HE)_h$ :

Il existe $c_1$ tel que

$$\int |P_h\omega_h|^2 \leq c_1 \qquad \forall\; \omega_h \in Y_h$$

Donc

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4}\int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2}\,(1 - \frac{2}{\lambda_1})\; c_1 \qquad \forall\; \omega_h \in V_h.$$

3e étape. Il existe $\omega_h$ solution de $\mathcal{P}_h$

Soit $\{\omega_h^m\}_m$ une suite minimisante :

$$\omega_h^m \in V_h \quad , \; e_h(\omega_h^m) \underset{m\to\infty}{\to} \inf e_h$$

D'après la deuxième étape, $\{\omega_h^m\}$ est bornée dans $Y_h$. Donc il existe une sous-suite (encore notée $\omega_h^m$ ) et $\omega_h \in Y_h$ tels que

$$\omega_h^m \rightharpoonup \omega_h \text{ dans } Y_h$$

Comme $\omega_h^m \in V_h \;\; \forall\; m$, on obtient

$$\omega_h \in V_h.$$

Donc, comme $e_h(\omega_h) = \inf e_h$, $\omega_h$ est une solution de $P_h$.

Revenons maintenant au Théorème II-2 :

$K_h$ satisfait $(HE)_h$ et $\ell_{1,h} < I/\lambda < \ell_{2,h}$ ; on obtient d'après le Lemme II-5, l'existence d'une solution $\omega_h$ de $\mathcal{P}_h$.

D'après le Lemme II-4, $\omega_h$ est caractérisée par

$$\int \nabla\omega_h \nabla v_h - \lambda \int P_h(\omega_h) v_h = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h$$

(ce qui est équivalent à dire que

$$-\Delta\omega_h - \lambda P_h \omega_h \in V_h^{\perp}$$

avec $V_h^{\perp}$ l'orthogonal de $V_h$ dans $L^2(\Omega)$).

D'après le Lemme II-3, il existe $\theta_h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int P_{K_h}(\omega_h + \theta_h \psi_h)\psi_h = I/\lambda .$$

Quant au résultat de non existence, il est trivial d'après le Lemme II-3.

II-2.5 : <u>Un résultat d'unicité</u>.

On suppose que $K_h$ satisfait la condition $(HU)_h$ : pour tout $u_h \in Y_h$, la fonction

$$\tau_h(\theta) = \int P_{K_h}(u_h + \theta\psi_h)\psi_h$$

est strictement croissante dans $]L_1(u_h); L_2(u_h)[$

$$= \{\theta \in \mathbb{R} \; ; \; \ell_{1,h} < \tau_h(\theta) < \ell_{2,h}\}$$

Alors nous avons :

<u>THEOREME II-3</u> : *Si* $K_h$ *satisfait les conditions* $(HE)_h$ *et* $(HU)_h$ , *le problème* (2.16) *admet une solution unique pour tout* $\lambda \in \Lambda_h, \lambda < \lambda_1$.

*En outre, si* $\phi_h \equiv$ cte $\neq 0$ , (2.16) *admet une solution unique pour tout* $\lambda \in \Lambda_h$, $\lambda < \lambda_2^*$.

Démonstration : Le cas $\lambda < 0$ est immédiat d'après la stricte convexité de $e_h$.

Supposons donc $\lambda > 0$ et soient

$$(\omega_h^1, \omega_h^1),\ (\omega_h^2, \omega_h^2) \in V_h \times \mathbb{R}$$

deux solutions de (2.16). Alors nous avons

$$\lambda_1 \int |\omega_h^1 - \omega_h^2|^2 \leq \int |\nabla\omega_h^1 - \nabla\omega_h^2|^2 = \lambda \int (P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2)(\omega_h^1 - \omega_h^2)$$

$$\leq \lambda |P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2|_{L^2} |\omega_h^1 - \omega_h^2|_{L^2}$$

Donc, si $\lambda < \lambda_1$ nous avons $\omega_h^1 = \omega_h^2$.

Supposons maintenant $0 < \lambda < \lambda_2^*$ et $\phi_h \equiv$ cte $\neq 0$. Si

$$v_h^i = \omega_h^i + t_i \quad , \ t_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } \int v_h^i = 0,$$

nous avons, d'après le Lemme I-5 (puisque $P_h(\omega_h^i) \equiv P_K(\omega_h^i + \theta\psi_h)$ dont l'intégrale sur $\Omega$ est indépendante de i) :

$$\lambda_2^* |v_h^1 - v_h^2|_{L^2}^2 \leq |\nabla\omega_h^1 - \nabla\omega_h^2|_{L^2}^2 = \lambda \int (P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2)(\omega_h^1 - \omega_h^2)$$

$$= \int (P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2)(v_h^1 - v_h^2) \leq \lambda |P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2| |v_h^1 - v_n^2|$$

et donc

$$\lambda_2^* |v_h^1 - v_h^2| \leq \lambda |P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2|$$

ce qui donne

$$|\nabla\omega_h^1 - \nabla\omega_h^2| \leq \lambda \int (P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2)(v_h^1 - v_h^2)$$

$$\leq \lambda |P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2| |v_h^1 - v_h^2| \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} |P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2|^2$$

$$\leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} \int (P_h\omega_h^1 - P_h\omega_h^2)(\omega_h^1 - \omega_h^2) = \frac{\lambda}{\lambda_2^*} |\nabla\omega_h^1 - \nabla\omega_h^2|^2,$$

et

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^*}) |\nabla\omega_h^1 - \nabla\omega_h^2|^2 \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$\omega_h^1 = \omega_h^2.$$

D'après la condition $(HU)_h$, $\theta_h^1 = \theta_h^2$ .

REMARQUE II-2 : le Théorème est encore valable sous les hypothèses

$$\lambda < \lambda_{1,h} \quad (\text{resp. } \lambda < \lambda^*_{2,h} \quad \text{si } \phi_h \equiv \text{cte})$$

où

$$\lambda_{1,h} = \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\int |\nabla v_h|^2}{\int v_h^2} \geq \lambda_1$$

$$(\text{resp.} \quad \lambda^*_{2,h} = \inf_{\substack{v_h \in V_h \oplus \mathbb{R} \\ \int v_h = 0 \\ v_n \neq 0}} \frac{\int |\nabla v_h|^2}{\int v_h^2})$$

II-2.6 : Un résultat de convergence.

Nous nous intéressons maintenant à la convergence des solutions $(\omega_h;\theta_h)$ de (2.16) vers une solution $(\omega,\theta)$ de (1.4). Pour cela, on suppose que les convexes $K_h$ satisfont la condition suivante :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c > 0 \text{ tel que pour tout } h \text{ suffisamment petit,} \\ \text{pour tout } \ell \in ]\ell_1,\ell_2[ \cap ]\ell_{1,h};\ell_{2,h}[ \text{ et pour tout} \\ v_h \in K_h \cap \{v_h \in Y_h \ ; \ \int v_h \psi_h = \ell\} \quad \text{on a} \\ |v_h|_{L^1(\Omega)} \leq c. \end{array} \right.$$

THEOREME II-4 : *On suppose* K *et* $K_h$ *donnés satisfaisant respectivement* (HE) *et* $(HE)_h$ . *Alors, sous les hypothèses* (2.9) *à* (2.13) *et* (2.18), *pour tout* $\lambda \in \Lambda \underset{h}{\cap} \Lambda_h$, *les problèmes* (2.16) *admettent des solutions respectives* $(\omega_h;\theta_h)$ *dont on peut extraire une sous-suite (encore notée* $(\omega_h;\theta_h)$*) telle que*

$$\omega_h \longrightarrow \omega \qquad \text{dans } H^1_o(\Omega)$$

$$\theta_h \longrightarrow \theta \qquad \text{dans } \mathbb{R}.$$

*avec* $(\omega,\theta)$ *satisfaisant* (1.4). *En outre, si* (1.4) *admet une solution unique, c'est toute la suite qui converge.*

Démonstration : elle résulte essentiellement du lemme suivant :

LEMME II-6. *Sous les hypothèses* (2.12) *et* (2.13) , *si* $\{\omega_h\}$ *est une suite d'éléments de* $L^2(\Omega)$ *telle que* $\omega_h \to \omega$ *dans* $L^2(\Omega)$ , *alors*

$$P_{K_h}(\omega_h) \to P_K(\omega) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

*En outre, si* $\lambda \in \Lambda_{\widehat{h}} \Lambda_h$, *alors*

$$P_h(\omega_h) \to P_{K_\lambda}(\omega) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Démonstration : Comme

$$(2.19) \quad |P_{K_h}\omega_h - P_K\omega| \leq |\omega_h-\omega| + |P_{K_h}\omega - P_K\omega|$$

il suffit de démontrer que $P_{K_h}\omega \to P_K\omega$. Or, d'après (2.13), il existe $v_h \in K_h$ tel que

$$v_h \to P_K\omega \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme

$$|P_{K_h}\omega-\omega| \leq |v_h-\omega| \quad \text{pour tout } h,$$

on obtient

$$|P_{K_h}\omega| \leq |\omega| + |v_h-\omega| \leq \text{cte}.$$

Donc on peut extraire une sous-suite h' telle que

$$P_{K_{h'}}\omega \rightharpoonup y \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après (2.13), $y \in K$. Mais, par définition de la projection

$$|P_{K_h}\omega-\omega| \leq |g_h-\omega| \qquad \forall\, g_h \in K_h$$

Soit $g \in K$ et $g_h \in K_h$ tel que $g_h \to g$ dans $L^2(\Omega)$. Alors

$$|y-\omega| \leq \liminf |P_{K_{h'}}\omega-\omega| \leq |g-\omega|$$

et nous avons

$$y = P_K\omega$$

Donc

$$P_{K_{h'}}\omega \rightharpoonup P_K\omega \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après l'unicité de $P_K\omega$, c'est toute la suite qui converge. Pour montrer la convergence forte, on considère $g_h \in K_h$ telle que $g_h \to g \in K$ dans $L^2(\Omega)$. Alors, comme

$$P_{K_h}\omega-\omega \rightharpoonup P_K\omega-\omega$$

$$|P_{K_h}\omega-\omega| \leqq |g_h-\omega|$$

nous obtenons

$$(2.20) \qquad |P_K\omega-\omega| \leqq \lim_h \inf |P_{K_h}\omega-\omega| \leqq \lim_h \sup |P_{K_h}\omega-\omega| \leqq \lim |g_h-\omega| = |g-\omega|$$

En particulier, pour $g = P_K\omega$, l'inégalité (2.20) entraîne

$$|P_K\omega-\omega| = \lim |P_{K_h}\omega-\omega|$$

et nous avons

$$P_{K_h}\omega \to P_K\omega \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Donc

$$(2.21) \qquad P_{K_h}\omega_h \to P_K\omega \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Soit maintenant $\lambda \in \Lambda \bigcap_h \Lambda_h$. D'après le Lemme II-3, il existe $\theta_h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int P_{K_h}(\omega_h+\theta_h\psi_h)\psi_h = I/\lambda$$

Donc, comme dans le Lemme I-1,

$$P_h\omega_h = P_{K_h}(\omega_h+\theta_h\psi_h)$$

Il suffit de montrer donc que

$$(2.22) \qquad |\theta_h| \leqq M$$

où M est une constante indépendante de h. En effet, si (2.22) a lieu, on peut extraire une sous-suite h' telle que $\theta_{h'} \to \theta$ dans $\mathbb{R}$ et donc, d'après (2.21) :

$$P_{h'}(\omega_{h'}) = P_{K_{h'}}(\omega_{h'}+\theta_{h'}\psi_{h'}) \to P_K(\omega+\theta\psi) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et comme

$$\int P_{h'}(\omega_{h'})\psi_{h'} = I/\lambda$$

on a

$$\int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I/\lambda$$

Donc

$$P_K(\omega+\theta\psi) = P_{K_\lambda}(\omega)$$

et de façon classique, c'est toute la suite qui converge vers $P_{K_\lambda}\omega$.

Montrons donc (2.22). Supposons par contradiction que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $h_n$ tel que

$$|\theta h_n| \geqq n$$

avec

$$\tau_n(\theta h_n) = \int P_{K_{h_n}}(\omega_{h_n}+\theta_{h_n}\psi_{h_n})\psi_{h_n} = I/\lambda$$

On peut supposer, sans perdre la généralité, que

$$\theta_{h_n} \geqq n.$$

Comme $\lambda \in \Lambda$ , il existe $\theta^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau_n(\theta^*) = \int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I/\lambda$$

En outre, comme

$$\tau_n(\theta^*) = \int P_{K_{h_n}}(\omega_{h_n}+\theta^*\psi_{h_n})\psi_{h_n} \quad \to \quad \tau_\omega(\theta^*) = I/\lambda$$

et comme $\tau_n$ est croissante dans $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout n suffisamment grand on a

$$0 < I/\lambda - \tau_n(\theta) < \varepsilon$$

pour tout $\theta \in ]\theta^*;\theta_{h_n}[ \supset ]\theta^*;n[$. En faisant tendre n vers l'infini on obtient

$\tau_\omega(\theta) = I/\lambda$ pour tout $\theta \in ]\theta^*;\infty[$ ce qui est une absurdité car $I/\lambda < \ell_2$.

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème II.4. D'après ce théorème, $K_h$ satisfaisant la condition $(HE)_h$ et $\lambda \in \Lambda_h$ entraînent l'existence de $(\omega_h;\theta_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ solution de (2.16). Il s'agit donc de montrer que

$$\omega_h \to \omega \text{ dans } H_o^1(\Omega)$$

$$\theta_h \to \theta \text{ dans } \mathbb{R}$$

avec $(\omega,\theta)$ solution de (1.4). Or

$$\int \nabla\omega_h . \nabla v_h = \lambda \int P_h(\omega_h) v_h \qquad \forall\, v_h \in V_h$$

Donc

$$||\omega_h||^2_{H_o^1} \leq \lambda |P_h\omega_h|_{L^{p^*}} |\omega_h|_{L^p}$$

avec $p = \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ ou $p > 2$ si $N = 2$.

Comme

$$|\omega_h|_{L^p} \leq c_1 ||\omega_h||_{H_o^1(\Omega)}$$

on obtient

$$||\omega_h||_{H_o^1(\Omega)} \leq c_2 |P_h\omega_h|_{L^{p^*}}$$

Soit $s = 2(1 - 1/p^*) < 1$. Alors

$$|P_h\omega_h|_{L^{p^*}} \leq |P_h\omega_h|^{1-s}_{L^1} |P_h\omega_h|^s_{L^2}$$

et d'après la condition (2.18) (car $\lambda \in \Lambda$)

$$||\omega_h||_{H_o^1} \leq c_3 |P_h\omega_h|^s_{L^2} \leq c_3(|\omega_h|_{L^2} + |P_h o|_{L^2})^s$$

ou encore

$$||\omega_h||^{1/s}_{H_o^1} \leq c_4 ||\omega_h|| + c_3^{1/s} |P_h o|_{L^2}$$

D'après l'inégalité de Young

$$c_4 ||\omega_h|| \leq \frac{||\omega_h||^t}{t} + \frac{c_4^{t^*}}{t^*} \quad \text{pour tout } 1 < t^*, t < +\infty$$

tels que $1/t + 1/t^* = 1$.

En choisissant $t = 1/s > 1$, on a

$$(1-s)\,||\omega_h||^{1/s} \leq c_5(1 + |P_h o|_{L^2})$$

Donc d'après le Lemme II-6 il existe $c > 0$ tel que

$$||\omega_h|| \leq c$$

et on peut extraire une sous-suite (toujours notée $\omega_h$) telle que

$$(2.23) \qquad \begin{array}{ll} \omega_h \to \omega & \text{dans } H_o^1(\Omega) \text{ faible} \\ \omega_h \to \omega & \text{dans } L^2(\Omega). \end{array}$$

D'après le Lemme II-6

$$(2.24) \qquad P_h\omega_h \to P_{K_\lambda}\omega$$

Montrons que $\omega$ satisfait (1.4). Soit $v \in H_o^1(\Omega)$ et $v_h \in V_h$ tel que $v_h \to v$ dans $H_o^1(\Omega)$. Alors

$$\int \nabla\omega.\nabla v = \lim \int \nabla\omega_h.\nabla v_h = \lim \int \lambda P_h(\omega_h)v_h = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega)v$$

Comme dans la démonstration du Lemme II-6, on peut extraire une sous-suite h' telle que

$$\theta_{h'} \to \Theta \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

avec $\theta$ satisfaisant

$$\int P_K(\omega+\theta\psi)\psi = I/\lambda$$

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que $\omega_h \to \omega$ dans $H_o^1(\Omega)$ fort. Or,

$$||\omega_h-\omega||^2 = ||\omega||^2 - 2\int \nabla\omega_h\nabla\omega + ||\omega_h||^2 =$$

$$= \lambda\int P_{K_\lambda}(\omega).\omega - 2\lambda\int P_{K_\lambda}(\omega)\omega_h + \lambda\int P_h(\omega_h)\omega_h$$

D'après (2.23) et (2.24)

$$||\omega_h-\omega||^2 \to 0.$$

REMARQUE II-3 : Un problème largement ouvert est celui de l'estimation d'erreur entre les solutions approchées $(\omega_h;\theta_h)$ de (2.16) et les solutions $(\omega,\theta)$ de (1.4). Nous présentons maintenant un résultat partiel dans cette direction.

## § II-3. UNE ESTIMATION D'ERREUR.

Dans le § II-3 nous faisons les hypothèses (HE), (HU), $(HE)_h$ et $(HU)_h$, et $\lambda \in \Lambda \underset{h}{\cap} \Lambda_h$

THEOREME II-5. *Pour* $\lambda < \lambda_1$ *(resp.* $\lambda < \sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}$ *si* $\phi_h \equiv \phi =$ cte), *les solutions respectives* $\omega$ *et* $\omega_h$ *de* (2.1) *et* (2.16)*-1ère étape sont uniques et vérifient*

$$(2.25) \qquad ||\omega-\omega_h||_{H_0^1} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{||\omega-v_h|| + |P_{K_\lambda}v_h-P_hv_h|_{L^2}\}$$

*De plus, si* K *et* $K_h$ *sont des cônes de sommet zéro, alors* $\theta$ *et* $\theta_h$ *vérifient respectivement* (2.21) *et* (2.11)*2e étape, sont uniques et satisfont*

$$(2.26) \qquad |\theta-\theta_h| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{||\omega-v_h|| + |P_{K_\lambda}v_h-P_hv_h|\}$$

*où* c *dénote des constantes indépendantes de* h.

Démonstration. i) Considérons d'abord $0 < \lambda < \lambda_1$. Alors d'après les Théorèmes I-2 et II-3, $\omega$ et $\omega_h$ satisfaisant (2.1) et (2.16) 1ère étape, sont uniques (indépendamment d'avoir (HU) et $(HU)_h$).

Soit $v_h \in V_h$, alors

$$(2.27)\qquad \begin{aligned} ||\omega_h - v_h||^2 &= \int |\nabla\omega_h - \nabla v_h|^2 = \int \nabla(\omega - v_h).\nabla(\omega_h - v_h) - \\ &- \lambda\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h)(\omega_h - v_h) \end{aligned}$$

Donc

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h|| + \lambda|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h|\,|\omega_h - v_h|$$

ou encore

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}}\,|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h|$$

Mais

$$|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h| \leq |\omega - \omega_h| + |P_h\omega - P_{K_\lambda}\omega|$$

et donc

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\lambda_1}||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}}\,|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega|$$

Comme

$$||\omega - \omega_h|| \leq ||\omega - v_h|| + ||\omega_h - v_h||$$

on obtient

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})||\omega - \omega_h|| \leq 2||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}}\,|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega|$$

De plus

$$(2.28)\qquad \begin{aligned} |P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega| &\leq |P_{K_\lambda}\omega - P_{K_\lambda}v_h| + |P_{K_\lambda}v_h - P_hv_h| + \\ &+ |P_hv_h - P_h\omega| \leq 2|\omega - v_h| + |P_{K_\lambda}v_h - P_hv_h| \end{aligned}$$

d'où on a

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})||\omega - \omega_h|| \leq 2(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1})||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}}|P_{K_\lambda}v_h - P_hv_h|$$

$v_h$ étant arbitraire et $\lambda < \lambda_1$ on conclut

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{||\omega - v_h|| + |P_K v_h - P_hv_h|\}$$

ii) Supposons maintenant $\lambda < 0$ et soit

$\xi > 0$ tel que $\lambda = -\xi$

Alors

$$||\omega_h - v_h||^2 = \int \nabla(\omega - v_h).\nabla(\omega_h - v_h) - \xi\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h)(v_h - \omega_h)$$

$$= \int \nabla(\omega - v_h).\nabla(\omega_h - v_h) - \xi\int (P_h\omega - P_h\omega_h)(v_h - \omega_h)$$

$$- \xi\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega)(v_h - \omega_h)$$

Donc

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h|| - \xi\int (P_h\omega - P_h\omega_h)(\omega - \omega_h)$$

$$- \xi\int (P_h\omega - P_h\omega_h)(v_h - \omega) - \xi\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega)(v_h - \omega_h)$$

ou encore

$$\xi|P_h\omega - P_h\omega_h|^2 + ||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h||$$

$$+ \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}}|P_h\omega - P_h\omega_h|\ ||\omega - v_h|| + \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}}|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega|\ ||v_h - \omega_h||$$

$$\leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h|| + \frac{\xi^2}{2\alpha}|P_h\omega - P_h\omega_h|^2 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}||\omega - v_h||^2$$

$$+ \frac{\xi^2}{2\beta\lambda_1}|P_h\omega - P_{K_\lambda}\omega|^2 + \frac{\beta}{2}||\omega_h - v_h||^2$$

Donc

$$\xi(1 - \frac{\xi}{2\alpha})|P_h\omega - P_h\omega_h|^2 + ||\omega_h - v_h||^2 \leq \beta||\omega_h - v_h||^2$$

$$+ (\frac{1}{2\beta} + \frac{\alpha}{2\lambda_1})||\omega - v_h||^2 + \frac{\xi^2}{2\beta\lambda_1}|P_h\omega - P_{K_\lambda}\omega|^2$$

En choisissant $\alpha = \xi/2 > 0$ et $\beta = 1/2$ par exemple, on obtient

$$1/2||\omega_h - v_h||^2 \leq (1 + \frac{\xi}{4\lambda_1})||\omega - v_h||^2 + \frac{\xi^2}{\lambda_1}|P_h\omega - P_{K_\lambda}\omega|^2$$

Donc

$$||\omega_h - v_h|| \leq \sqrt{2(1 + \xi/4\lambda_1)}\ ||\omega - v_h|| + \frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\lambda_1}}|P_h\omega - P_{K_\lambda}\omega|$$

et d'après (2.28)

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda}v_h - P_h v_h|\}$$

iii) Soit maintenant $\phi_h \equiv \phi$ = cte et supposons $0 < \lambda < \sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}$

D'après (2.27)

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h|| - \lambda\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h)(\omega_h - v_h)$$

Considérons

$$\tilde{\omega}_h = \omega_h - \frac{1}{|\Omega|}\int \omega_h$$

et

$$\tilde{v}_h = v_h - \frac{1}{|\Omega|}\int v_h$$

Alors, comme

$$\int P_{K_\lambda}\omega = \int P_h\omega_h = I/\lambda$$

on a

$$\lambda\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h)(\omega_h - v_h) = \lambda\int (P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h)(\tilde{\omega}_h - \tilde{v}_h)$$

et donc, d'après le Lemme I-5

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h||\ ||\omega_h - v_h|| +$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_2^*}}\ |P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h|\ ||\omega_h - v_h||$$

Comme

$$|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega_h| \leq |P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\ ||\omega - \omega_h||$$

on obtient

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}}\ ||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_2^*}}|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega|$$

ou encore

$$||\omega - \omega_h|| \leq 2||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}}\ ||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_2^*}}|P_{K_\lambda}\omega - P_h\omega|$$

Donc, comme plus haut

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h}\{||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda}v_h - P_h v_h|\}$$

iv) Toujours sous les hypothèses $\lambda < \lambda_1$ (ou $\lambda < \sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}$ si $\phi_h = \phi = cte$), supposons $K$ et $K_h$ des cônes de sommet 0. Alors d'après la remarque I-1 :

$$\theta = \frac{\lambda}{I}\int (P_{K_\lambda}\omega-\omega)P_{K_\lambda}\omega$$

$$\theta_h = \frac{\lambda}{I}\int (P_h\omega_h-\omega_h)P_h\omega_h$$

Donc

$$|\theta-\theta_h| = \frac{|\lambda|}{I}\left| |P_{K_\lambda}\omega|^2_{L^2} - |P_h\omega_h|^2_{L^2} - \int \omega P_{K_\lambda}\omega + \int \omega_h P_h\omega_h\right|$$

$$\leq \frac{|\lambda|}{I}\Big(|P_{K_\lambda}\omega-P_h\omega_h|_{L^2}\{|P_{K_\lambda}\omega| + |P_h\omega_h|_{L^2}\} + |P_{K_\lambda}\omega|\ |\omega-\omega_h| +$$

$$+ |\omega_h|\ |P_{K_\lambda}\omega-P_h\omega_h|\Big)$$

$$\leq \frac{|\lambda|}{I}\Big[(2|\omega_h| + |P_{K_\lambda}\omega| + |P_h o|)|P_{K_\lambda}\omega-P_h\omega_h| + |P_{K_\lambda}\omega|\ |\omega-\omega_h|\Big]$$

ou encore

$$|\theta-\theta_h| \leq \frac{|\lambda|}{I}\Big[(2|\omega_h| + |P_{K_\lambda}\omega| + |P_h o|)\quad |P_{K_\lambda}\omega-P_h\omega|$$

$$+ (2|\omega_h| + 2|P_{K_\lambda}\omega| + |P_h o|)\ |\omega-\omega_h|\Big]$$

D'après le Théorème II-4 et le Lemme II-6, $\{\omega_h\}$ et $\{P_h o\}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$.

Donc il existe c tel que

$$|\theta-\theta_h| \leq c(|P_{K_\lambda}\omega-P_h\omega| + |\omega-\omega_h|)$$

et d'après (2.28) et i), ii) et iii) on obtient (2.26).

<u>REMARQUE II-4</u> : Une estimation du genre (2.26) pour le cas où K et $K_h$ ne sont pas des cônes est un problème ouvert.

<u>REMARQUE II-5</u> : Les estimations (2.25) et (2.26) du théorème précédent présentent l'inconvénient du terme $|P_{K_\lambda}v_h - P_h v_h|_{L^2}$ qui est compliqué à estimer par rapport à h.

En vue de simplifier ces expressions, on va considérer le problème discret (2.16) sans l'approximation des convexes, à savoir : on suppose $\psi_h \equiv \psi \quad \forall\, h$ . Alors, (2.16) devient : déterminer $(\omega_h;\theta_h) \in V_h\times\mathbb{R}$ tel que.

$$
(2.29)\quad \begin{cases} \text{1ère étape :} & \displaystyle\int \nabla\omega_h\cdot\nabla v_h = \lambda\int P_{K_\lambda}(\omega_h)v_h \quad \forall\, v_h \in V_h \\ \text{2e étape :} & \displaystyle\int P_K(\omega_h+\theta_h\psi)\psi = I/\lambda \end{cases}
$$

où $P_{K_\lambda}$ est l'opérateur de projection sur $K_\lambda$ défini dans (1.2). Cela correspond (dans la pratique) à modifier la triangulation de $\Omega$ à chaque itération ; c'est la méthode introduite et étudiée par M. Sermange [28] pour le cas où $K = \{v \in L^2 \; ; \; v \geq 0\}$ et $\psi$ = cte sur $\Omega$.

Nous avons :

<u>**THEOREME II-6**</u> : *Sous les hypothèses du Théorème I-1, le problème* (2.29) *admet au moins une solution pour tout* $\lambda \in \Lambda$

*De plus, sous les hypothèses du Théorème I-2,* (2.29) *admet une solution unique si* $\lambda < \lambda_1$ *(resp.* $\lambda < \lambda_2^*$ *si* $\phi \equiv \phi_h \equiv$ cte).

*La démonstration est tout à fait identique à celle des Théorèmes I-1 et I-2. (cf. aussi Sermange [28]).*

<u>**THEOREME II-7**</u> : *Pour* $\lambda < \lambda_1$ *(resp.* $\lambda < \sqrt{\lambda_1\lambda_2^*}$ $\phi_h \equiv \phi$ = cte*) les solutions respectives* $\omega$ *et* $\omega_h$ *de* (2.1) *et* (2.29)-*1ère étape sont uniques et vérifient*

$$||\omega-\omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} ||\omega-v_h||$$

*De plus, si* K *est un cône de sommet 0, alors* $\theta$ *et* $\theta_h$ *vérifiant respectivement* (2.1) *et* (2.29)-*2e étape, sont uniques et satisfont*

$$|\theta-\theta_h| \leq c \inf_{v_h \in V_h} ||\omega-v_h||$$

*où* c *dénote des constantes indépendantes de* h.

Démonstration : Elle est tout à fait analogue à celle du Théorème II-5.

## § 2-4. APPROXIMATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Nous indiquons dans ce paragraphe la construction d'une discrétisation "concrète", où les résultats des paragraphes précédents s'appliquent ; il s'agit de la méthode des éléments finis.

Nous nous bornerons au cas conforme, lorsque $\Omega$ est un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on considère pour chaque valeur du paramètre h une triangulation $\mathcal{T}h$ de $\overline{\Omega}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(2.30) $\mathcal{T}h$ est une triangulation "admissible" au sens suivant :

a) tout élément $T \in \mathcal{T}h$ est un triangle continu dans $\overline{\Omega}$ de diamètre $h_T \leq h$.

b) si T, $T' \in \mathcal{T}h$, alors ou bien $T \cap T' = \emptyset$, ou bien $T \cap T'$ = un côté tout entier, ou bien $T \cap T'$ = un sommet.

(2.31) La famille de triangulation $\{\mathcal{T}h\}_h$ de $\overline{\Omega}$ est "régulière" au sens suivant :

Il existe $\theta_o > 0$ tel que, pour chaque h et pour chaque $T \in \mathcal{T}h$, si $\theta(T)$ désigne le plus petit des angles de T, alors $\theta(T) \geq \theta_o$.

Ceci étant dit, on définit

(2.32) $Y_h$ = ensemble de fonctions $v_h$ continues sur $\overline{\Omega}$ telles que, pour tout $T \in \mathcal{T}h$

$v_{h|T}$ = fonction affine

(2.33) $V_h = \{v_h \in Y_h \; ; \; v_{h|\partial\Omega} = 0\}$

Il est clair que $Y_h$ et $V_h$ ainsi définis satisfont les hypothèses (2.9) à (2.11).

Sur $Y_h$ on considère une base de la manière standard, à savoir, on définit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M$ où M est le nombre de sommets $P_i$

et $\xi_i$ est la fonction de $Y_h$ telle que

(2.34) $\quad \xi_i(P_j) = \delta_{ij}.$

Alors nous avons

<u>THEOREME II-8</u> : *Pour tout* $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *il existe* $c > 0$ *indépendant de* $h$ *tel que*

$$\inf_{v_h \in V_h} ||v-v_h|| \leqq ch$$

*(cf. Ciarlet [5], théorème 3.2.2.).*

## II-4.1 : <u>Exemples numériques</u>.

Nous envisageons de résoudre le problème (2.16) en utilisant l'algorithme décrit au § II-1. La difficulté repose sur le calcul de $P_h$.

Dans la suite, $\Omega$ est un ensemble polygonal de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on définit une triangulation $\mathcal{T}_h$ satisfaisant (2.30) et (2.31). On considère les espaces $Y_h$ et $V_h$ comme dans (2.32) et (2.33) et on se donne $\psi_h \in Y_h$ tel que $\psi_h \to \psi$ dans $L^2(\Omega)$. Si $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$ est la base de $Y_h$ donnée par (2.34) , nous avons

$$v_h = \sum_1^M v_i \xi_i \ , \quad \psi_h = \sum_1^M \psi_i \xi_i$$

Donc

$$\int v_h \psi_h = \sum_{i,j} v_i \psi_j \int \xi_i \xi_j$$

Désignant A la matrice $(a_{ij})_{ij}$ où

$$a_{ij} = \int \xi_i \xi_j$$

alors

$$\int v_h \psi_h = \vec{v} \ A \ \vec{\psi}$$

où $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$, $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M) \in \mathbb{R}^M$.

Donc, l'hyperplan (cf. (2.15))

$$\{v_h \in Y_h \; ; \; \int v_h \psi_h = I/\lambda\}$$

peut être identifié à l'hyperplan de $\mathbb{R}^M$.

(2.35) $\{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \; ; \; \vec{v} \; A \; \vec{\psi} = I/\lambda\}$

Voyons maintenant comment on peut approcher le convexe K dans les exemples cités au § I-4.

EXEMPLE 1. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \; ; \; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

et on définit

$$K_h = K \cap Y_h = \{v_h \in Y_h \; : \; v_h \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega}\} \; .$$

Comme $v_h = \sum v_i \xi_i$

alors

$$v_h \in K_h \text{ si et seulement si } v_i \geq 0, \; \forall \; i = 1,\dots,M.$$

Donc, on peut identifier $K_h$ au convexe

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \; ; \; v_i \geq 0, \; i = 1,\dots,M\}$$

D'après (2.15) et (2.35), $K_{h,\lambda}$ peut être identifié à

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \; ; \; v_i \geq 0 \text{ et } \vec{v} \; A \; \vec{\psi} = I/\lambda\}.$$

EXEMPLE 2. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \; ; \; v \geq 0 \text{ p.p. et } |v|_{L^2} \leq 1\} \; ,$$

et on définit

$$K_h = K \cap Y_h = \{v_h \in Y_h \; ; \; v_h \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ et } |v_h|_{L^2} \leq 1\}$$

Donc $v_h \in K_h$ si et seulement si

$$v_h = \sum v_i \xi_i \quad \text{et } v_i \geq 0, \; \vec{v} \; A \; \vec{v} \leq 1.$$

Donc, dans ce cas, le convexe $K_h$ peut être identifié à

$$K_M = \{v \in \mathbb{R}^M \; ; \; v_i \geq 0 \text{ et } \vec{v} \; A \; \vec{v} \leq 1\}$$

De même, $K_{h,\lambda}$ s'identifie au convexe

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \; ; \; v_i \geq 0, \; \vec{v} \; A \; \vec{v} \leq 1, \; \vec{v} \; A \; \vec{\psi} = I/\lambda\}.$$

EXEMPLE 3. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ a \leq v \leq b \text{ p.p.} \quad a < b \in \mathbb{R}\}$$

D'une façon analogue aux cas précédents, nous pouvons identifier $K_h$ et $K_{h,\lambda}$ respectivement à

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \ ; \ a \leq v_i \leq b\}$$

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \ ; \ a \leq v_i \leq b \text{ et } \vec{v}\, A\, \vec{\psi} = I/\lambda\} .$$

REMARQUE II-6. Dans les exemples qui précèdent, nous avons

$$K_h \subset K \quad \forall\, h \qquad \text{(cf. Remarque II-1).}$$

Voyons maintenant un exemple où cela n'est pas nécessairement vrai.

EXEMPLE 4. On considère

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \ , \ f \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega}$$

et

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ 0 \leq v \leq f \quad \text{p.p.}\} .$$

Alors on peut définir

$$K_h = \{v_h \in Y_h \ ; \ 0 \leq v_h \leq f_h \text{ sur } \overline{\Omega}\}$$

où $f_h$ est l'interpolée de f dans $Y_h$, ie $f_h$ est la fonction de $Y_h$ telle que

$$f_h(P_i) = f(P_i),$$

qui peut être identifié à

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \ ; \ 0 \leq v_i \leq f(P_i)\} .$$

Dans tous les exemples qui précèdent, $K_{h,\lambda}$ a pu être identifié à un convexe $K_{M,\lambda}$ de $\mathbb{R}^M$. Dans ce cas on peut calculer $P_h v_h$ par intermédiaire de $P_{M,\lambda}$ , la projection canonique sur $K_{M,\lambda}$.

D'une façon générale, $K_{h,\lambda}$ étant donné, supposons qu'on l'ait identifié à un convexe $K_{M,\lambda}$ de $\mathbb{R}^M$. Alors

<u>LEMME II-7</u> : *Soient* $v_h = \sum v_i \xi_i$ et $y_h = \sum y_i \xi_i$ *deux fonctions de* $Y_h$.*Alors*

$$y_h = P_h v_h$$

*si et seulement si*

$$\vec{y} = P_{M,\lambda}(\vec{y} - \mu A\vec{y} + \mu A\vec{v}) \quad \forall\, \mu > 0 \tag{2.36}$$

*avec* $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$.

<u>Démonstration</u> :

$g_h \in K_{h,\lambda}$ si et seulement si $g_h = \sum g_i \xi_i$, et $\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_M) \in K_{M,\lambda}$

Donc

$y_h = \sum y_i \xi_i = P_h v_h$ si et seulement si

$y_h \in K_{h,\lambda}$ et $|y_h - v_h| \leq |g_h - v_h|$ pour tout $g_h \in K_{h,\lambda}$,

si et seulement si

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in K_{M,\lambda}$ et

$(\vec{y}-\vec{v})A(\vec{y}-\vec{v}) \leq (\vec{g}-\vec{v})A(\vec{g}-\vec{v})$ pour tout $g \in K_{M,\lambda}$

ce qui équivaut à

$$2A(\vec{y}-\vec{v}) + \partial I_{K_{M,\lambda}}(\vec{y}) \ni 0,$$

ou, d'une façon équivalente

$$\vec{y} = P_{K_{M,\lambda}}(\vec{y} - \mu A\vec{y} + \mu A\vec{v}) \quad \mu > 0.$$

L'équation (2.36) nous amène à définir le schéma itératif suivant :

$$(2.37)\quad \begin{cases} \text{i) on initialise par } \vec{y}_o \in \mathbb{R}^M \text{ quelconque} \\ \text{ii) } \vec{y}_k \ (k = 0,1,2\dots) \text{ étant donné, on calcule} \\ \vec{y}_{k+1} = P_{K_{M,\lambda}}(\vec{y}_k - \mu A\vec{y}_k + \mu A\vec{v}) \end{cases}$$

Alors,

<u>LEMME II-8</u> : *Pour un choix convenable de* $\mu > 0$ *le schéma* (2.37) *converge vers l'unique solution de* (2.36).

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour un choix convenable de $\mu$, l'opérateur

$$T : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$$

$$\vec{y} \longmapsto T\vec{y} = P_{K_{M,\lambda}} (\vec{y} - \mu A\vec{y} + \mu A\vec{v})$$

est une contraction stricte. Soit

$$0 < \alpha = \inf_{v \neq 0} \frac{\vec{v}A\vec{v}}{|v|^2} \leqq \sup_{v \neq 0} \frac{vAv}{|v|^2} = \beta$$

Alors

$$|T\vec{y}_1 - T\vec{y}_2|^2 = |\vec{y}_1 - \mu A\vec{y}_1 - \vec{y}_2 + \mu A\vec{y}_2|^2 =$$

$$|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2 - 2\mu(A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2 \ ; \ \vec{y}_1 - \vec{y}_2) + \mu^2 |A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2|^2$$

$$\leqq |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2 - 2\mu\alpha|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2 + \mu^2\beta^2|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2$$

$$= (1 - 2\mu\alpha + \mu^2\beta^2)|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2$$

Donc, comme $0 < \alpha \leqq \beta$

$$1 - 2\mu\alpha + \mu^2\beta^2 < 1$$

pour tout $0 < \mu < 2\alpha/\beta$.

<u>REMARQUE II-7</u> : Si $\alpha < \beta$ le schéma (2.37) converge avec vitesse optimale égale à

$$\sqrt{1 - (\alpha/\beta)^2}.$$

<u>REMARQUE II-8</u> : Pour la résolution effective du problème (1.1), la formulation (1.4) (ou (2.1)) a l'avantage de ne pas avoir besoin de calculer $\theta$ à chaque itération de l'algorithme. Cet avantage est anéanti par le fait que la projection $P_{K_{M,\lambda}}$ est plus difficile à calculer que $P_{K_M}$ en général. Néanmoins, pour l'exemple 1 cette projection $P_{K_{M,\lambda}}$ est très simple à déterminer. En effet, soit

(2.38) $\quad C = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M \ ; \ \vec{v} \geq 0 \text{ et } \vec{v}.\vec{f} = c\} \quad \vec{f} \in \mathbb{R}^M$ avec $f_i > 0 \ \forall i$.

Nous présentons maintenant un procédé qui permet le calcul exact de la projection sur C par un nombre fini d'opérations très simples.

Soit $H = \{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^M \ ; \ \vec{\omega}.\vec{f} = c\}$ avec $c, f_i > 0$. Pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$, on pose

1°. $\vec{v}_o = P_H\vec{y} = y - (\frac{\vec{y}\vec{f}-c}{|f|^2})\vec{f}$

2°. $\vec{v}_k \in H$ étant donné $k \geq 0$ on pose

$$\text{(2.39)} \quad \begin{cases} \text{i)} \ \vec{v}_{k+1/2} = \vec{v}_k^{\,+} \ \text{(c.a.d. } v^i_{k+1/2} = \max\{0, v^i_k\}) \\ \text{ii)} \ \vec{v}_k \ \text{défini par } f^i_k = \begin{cases} f^i & \text{si } v^i_{k+1/2} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{iii)} \ \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_{k+1/2} - \dfrac{\vec{v}_{k+1/2}.\vec{f}_k - c}{|f_k|^2} f_k \end{cases}$$

Alors nous avons

<u>THEOREME II-9</u>. *Si* $f_i > 0 \ \forall \, i$ *et* $c > 0$ *pour tout* $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$ *le schéma* (2.39) *converge vers* $P_C y$ *après un nombre fini d'itérations.*

La démonstration est une conséquence directe des considérations suivantes.

<u>LEMME II-9</u>. *Soit* H *un hyperplan et* $K \subset H$ *un convexe fermé d'un espace de Hilbert* Y. *Alors pour tout* $y \in Y$ *nous avons*

$$P_K y = P_K P_H y.$$

Démonstration : en effet, par définition de projection

$$(y - P_K y \ ; \ P_K P_H y - P_K y) \leq 0$$

$$(P_H y - P_K P_H y \ ; \ P_K y - P_K P_H y) \leq 0$$

ce qui nous donne

$$|P_K P_H y - P_K y|^2 + (y - P_H y \ ; \ P_K P_H y - P_K y) \leq 0$$

H étant un hyperplan et $K \subset H$ nous avons

$$(y - P_H y \ ; \ P_K P_H y - P_K y) = 0$$

Donc

$$P_K P_H y = P_K y.$$

■

Soit C le convexe donné par (2.38) avec $f_i > 0$ pour tout $i = 1,\dots,M$, $c > 0$. Considérons l'opérateur A défini par

$$
(2.40) \qquad \begin{cases} A : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M \\ A\vec v = \vec v^{+} - \left( \dfrac{\vec v^{+} \cdot \underset{\sim}{\vec f} - c}{|\underset{\sim}{\vec f}|^2} \right) \underset{\sim}{\vec f} \end{cases}
$$

où

$$
\underset{\sim}{f}_i = \begin{cases} f_i \text{ si } v_i > 0 \\ 0 \text{ si } v_i \leq 0 \end{cases}
$$

Alors A satisfait les propriétés suivantes :

<u>LEMME II-10</u>.

i) *pour tout* $\vec v \in \mathbb{R}^M$, $A\vec v \in H$. *De plus,* $\vec v \in C$ *si et seulement si* $A\vec v = \vec v$

ii) *si* $v_i \leq 0$ *alors* $(Av)_i = 0$

iii) *pour tout* $\vec v \in H$, $|A\vec v| \leq |\vec v^{+}| \leq |\vec v|$ et $|A\vec v| = |\vec v|$ *si et seulement si* $A\vec v = \vec v \in C$

iv) *pour tout* $\vec v \in H$, *il existe* $k = k(\vec v) \in \mathbb{N}$, $k \leq M$, *tel que* $A^{k+j}\vec v = A^{k}\vec v$ *pour tout* $j \geq 1$.

v) *Pour tout* $\vec v \in H$, $P_C(\vec v) = P_C(A\vec v)$.

Démonstration : ii) est immédiat d'après la définition de A.

i) soit $\vec v \in \mathbb{R}^M$. Alors

$$
A\vec v \cdot \vec f = \vec v^{+} \cdot \vec f - \left( \frac{\vec v^{+} \cdot \underset{\sim}{\vec f} - c}{|\underset{\sim}{\vec f}|^2} \right) \vec f \cdot \underset{\sim}{\vec f} = c
$$

De plus, si $\vec v \in C$, alors $\vec v \cdot \vec f = \vec v^{+} \cdot \vec f = c$ et donc $A\vec v = \vec v$.

Supposons maintenant que $A\vec v = \vec v$. Alors $\vec v \in H$ et

$$
c = \vec v \cdot \vec f = \vec v^{+} \cdot \vec f - \vec v^{-} \cdot \vec f,
$$

d'où nous obtenons

$$
(2.41) \qquad \vec v^{+} \cdot \vec f = \vec v^{+} \cdot \vec f \geq c.
$$

Alors $\vec v = \vec v^{+} - \vec v^{-} = A\vec v = \vec v^{+} - \left( \dfrac{\vec v^{+} \cdot \underset{\sim}{\vec f} - c}{|\underset{\sim}{\vec f}|^2} \right) \underset{\sim}{\vec f}$ entraîne

$$v_i^- = \left( \frac{\vec{v}^+ . \vec{\underset{\sim}{f}} - c}{|\underset{\sim}{f}|^2} \right) \underset{\sim}{f}_i \geq 0 \quad \forall\, i$$

S'il existe i tel que $v_i^- > 0$, alors $\underset{\sim}{f}_i = f_i > 0$, ce qui est une absurdité d'après la définition de $\vec{\underset{\sim}{f}}$. Donc

$$v_i^- = 0 \qquad \forall\, i$$

ce qui équivaut à $\vec{v} \in C$.

iii) $|A\vec{v}|^2 = |\vec{v}^+|^2 - \frac{1}{|\vec{\underset{\sim}{f}}|^2} \left[ (\vec{v}^+ . \vec{f})^2 - c^2 \right]$ et d'après (2.41)

$$|A\vec{v}|^2 \leq |\vec{v}^+|^2 \leq |\vec{v}|^2$$

De plus, si $|A\vec{v}| = |\vec{v}|$ alors

$$\vec{v} = \vec{v}^+$$

ce qui donne $\vec{\underset{\sim}{f}} = \vec{f}$ et

$$|\vec{v}|^2 = |A\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 - \frac{1}{|\vec{\underset{\sim}{f}}|^2} \left[ (\vec{v} . \vec{f})^2 - c^2 \right]$$

ou encore $\vec{v}\vec{f} = c$. Donc $\vec{v} \in C$, et d'après i)

$$A\vec{v} = \vec{v}.$$

iv) Soit $\mathcal{J}(\vec{v}) = \{i \;;\; v_i = 0\}$. D'après ii) nous avons

$$\mathcal{J}(\vec{v}) \subset \mathcal{J}(A\vec{v}) \subset \mathcal{J}(A^2\vec{v}) \subset \ldots$$

Comme

$$\mathcal{J}(A^j\vec{v}) \subset \{1, 2, \ldots, M\} \quad \forall\, j,$$

il existe $k = k(\vec{v})$ tel que

$$\mathcal{J}(A^k\vec{v}) = \mathcal{J}(A^{k+j}\vec{v}) \qquad \forall\, j \geq 1.$$

Donc, d'après ii)

$$(A^k\vec{v})_i \geq 0 \qquad \forall\, i$$

et d'après i)

$$A^{k+j}\vec{v} = A^k\vec{v} \in C \quad \forall\, j \geq 1.$$

v) Soit $\vec{v} \in H$. Si $\vec{v} \geq 0$, alors $\vec{v} \in C$ et

$$\vec{v} = P_C\vec{v} = P_C(A\vec{v})$$

Supposons donc $\vec{v} \notin C$. Soients $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ toutes les coordonnées négatives de $\vec{v}$.

($k < M$ car $\vec{v} \in H = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M : \vec{v}.\vec{f} = c\}$ et $c, f_i > 0$), et soit

$$H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^M ; x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = 0\}.$$

Il est évident que

$$P_C\vec{v} = P_{C_1}\vec{v}$$

avec $C_1 = C \cap H_1$. D'après le Lemme II-9

$$P_{C_1}\vec{v} = P_{C_1}P_{H_1}\vec{v},$$

où $P_{H_1}\vec{v} = \vec{v}^+$.

Soit $\underset{\sim}{\vec{f}} = P_{H_1}\vec{f}$. Alors, comme

$$C_1 \subset H_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^M ; \vec{x}\underset{\sim}{\vec{f}} = c\}$$

nous avons

$$P_{C_1}\vec{v}^+ = P_{C_1}P_{H_1}\vec{v} = P_{C_1}P_{H_2}\vec{v} = P_{C_1}A\vec{v}.$$

Mais d'après ii)

$(A\vec{v})_{i_j} = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, k$, et donc

$$P_{C_1}A\vec{v} = P_C A\vec{v}.$$

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème II-9 :

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$ et soit $\vec{v}_o = P_H\vec{y}$.

D'après le Lemme II-9

$$P_C\vec{y} = P_C\vec{v}_o.$$

Considérons la suite

$$\vec{v}_o, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_j, \ldots$$

avec

$$\vec{v}_j = A^j\vec{v}_o \qquad j = 1,2,3,\ldots$$

D'après le Lemme II-10, nous avons

$$P_C\vec{v}_o = P_C\vec{v}_1 = P_C\vec{v}_2 = \ldots$$

et il existe $k = k(\vec{v})$ tel que

$$A^{k+1}\vec{v}_o = A^k\vec{v}_o \quad c.$$

Donc

$$P_C\vec{y} = P_C A^k\vec{v}_o = A^k\vec{v}_o.$$

# CHAPITRE III

# DEUX INEGALITES ISOPERIMETRIQUES ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous donnons des estimations concernant les solutions u du problème (1.1). Ces estimations sont essentiellement dues à deux inégalités générales :

. La première est une inégalité de type isopérimétrique. Les résultats obtenus ici sont en majorité des cas particuliers d'un résultat général dû à J. Mossino [21] (communication personnelle, cf. aussi [22]).

. La deuxième est une inégalité due à L.E. Payne et I. Stackgold [25] et généralisée par J. Mossino [21].

## § III-1. UNE INEGALITE ISOPERIMETRIQUE - APPLICATIONS.

Pour établir notre inégalité, quelques rappels sont nécessaires.

### III-1.1. Rappels.

On considère un ensemble mesurable $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$ et u une fonction mesurable définie dans $\Omega$.

DEFINITION III-1. *On appelle "fonction de distribution de* u*" l'application mesurable* $\mu_u$ *définie par*

$\mu_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$\mu_u(t) = \text{mes}\,\{x\ ;\ u(x) > t\}$

$\mu_u$ jouit des propriétés suivantes :

1i) $\mu_u$ est monotone décroissante ;

1ii) $\mu_u$ est p.p. différentiable (puisque monotone) ;

1iii) $\mu_u$ est continue à droite, c'est-à-dire,

$$\lim_{t \to t_o^+} \mu_u(t) = \mu_u(t_o)$$

<u>DEFINITION III-2</u>. *On appelle "réarrangement décroissant de* u*"* *l'application* u* *définie par :*

$u^* : \left[0, |\Omega|\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$u^*(s) = \inf \{t \in \mathbb{R} \ ; \ \mu_u(t) < s\}$

$u^*(0) = \sup\limits_{\Omega} \text{ess } u$

u* jouit de propriétés remarquables. En particulier :

2i) u* est la plus petite fonction décroissante v, telle que $v(\mu_u(t)) \geq t, \ \forall t$.

2ii) u et u* ont la même fonction de distribution, c'est-à-dire $\mu_u = \mu_{u^*}$.

2iii) pour tout $p > 0$, $\displaystyle\int_\Omega |u|^p = \int_0^{|\Omega|} |u^*(t)|^p dt$

2iv) sup ess u = sup ess u* = $u^*(o^+)$.

<u>DEFINITION III-3</u>. *On appelle "réarrangement sphérique de* u*"* *l'application* $\tilde{u}$ *définie par*

$\tilde{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{u}(x) = u^*(\alpha_N |x|^N) = \inf \{t \ ; \ \mu_u(t) < \alpha_N |x|^N\}$

*où* $\alpha_N = \dfrac{\Pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N+2}{N})}$ *est la mesure de la boule unitaire dans* $\mathbb{R}^N$.

$\tilde{u}$ satisfait

3i) les ensembles de niveau de $\tilde{u}$, ie, $\{x \ ; \ \tilde{u}(x) > t\}$ sont des boules concentriques dont la mesure coïncide avec la mesure des ensembles de niveau de u. En particulier

$\mu_u(t) = \mu_{\tilde{u}}(t) \quad \forall t.$

3ii) pour tout p > 0, $\int_\Omega |u|^p = \int_{\tilde\Omega} |\tilde u|^p$

où $\tilde\Omega$ est la boule de rayon $R = \left(\frac{|\Omega|}{\alpha_N}\right)^{1/N}$

3iii) $\sup_{\tilde\Omega} \mathrm{ess}\, \tilde u = \sup_\Omega \mathrm{ess}\, u$

Une autre propriété importante - et qui nous sera fort utile - est le résultat suivant, dû à Hardy et Littlewood : si u et v sont deux fonctions mesurables définies dans $\Omega$, alors

(3.1) $$\int_\Omega uv \leq \int_0^{|\Omega|} u^*v^* \leq \int_{\tilde\Omega} \tilde u\, \tilde v$$

En particulier, lorsque $v = \chi_{\Omega'}$ avec $\Omega'$ sous-ensemble mesurable de $\Omega$, on peut conclure :

$$v^* = \chi_{(0,|\Omega'|)} \quad \text{et} \quad \tilde v = \chi_{\tilde\Omega'}$$

Donc (3.1) nous donne

(3.2) $$\int_{\Omega'} u \leq \int_0^{|\Omega'|} u^*(s)ds = \int_{\tilde\Omega'} \tilde u$$

De plus, si $\Omega$ est une boule de rayon L et de centre $x_o$ et $u(x) = g(|x-x_o|)$ avec g continue et strictement décroissante dans $[0,L)$, alors $\tilde u(x) = u(x)$ p.p. et

(3.3) $$\int_{\Omega'} u(x) = \int_0^{|\Omega'|} u^*(s)ds = \int_{\tilde\Omega'} \tilde u(x)$$

pour toute $\Omega'$ boule de centre $x_o$ et rayon $R \leq L$.

En effet, si g est strictement décroissante dans $[0,L)$ elle y est inversible. Soit donc $x \in \Omega$ tel que

$$t = u(x) = g(|x-x_o|).$$

Par définition nous avons

$$\tilde u(x) = u^*(\alpha_N|x-x_o|^N) = u^*(\mu_u(t)) = t.$$

§ III-1.2 La première inégalité.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir notre première inégalité. C'est le résultat suivant (dû à J. Mossino).

THEOREME III-1. *Soit* $\Omega$ *ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ , *et soit* $u \in H^2(\Omega)$ . *Alors, pour presque tout* $t \in ]A,B[$ *avec*

$$A = \max \{\inf_{\Omega} \text{ess } u, \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u\}$$

$$B = \sup_{\Omega} \text{ess } u$$

*nous avons*

$$N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \left( \int_{u>t} -\Delta u\right) (-\mu_u'(t)) \tag{3.4}$$

*où* $\int_{u>t}$ *désigne l'intégrale sur* $\{x \,;\, u(x) > t\}$

*De plus, l'inégalité* (3.4) *devient une égalité si*

(3.5)
i) $c = \{x \in \Omega \,;\, A < u(x) \leq B\}$ *est une couronne à symétrie sphérique (limitée par des sphères de rayon* $0 \leq R_A \leq R_B$).

ii) *Comme fonction du rayon* $r$, $u$ *est strictement décroissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* $[R_A, R_B]$.

Démonstration : c'est une conséquence des lemmes suivants :

LEMME III-1 : *Soit* $u \in H^1(\Omega)$. *Alors, pour presque tout* $t \in ]A,B[$ (A *et* B *donnés dans le Théorème III-1) nous avons*

$$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| = P_\Omega(\{x \,;\, u(x) > t\})$$

$P_\Omega(E)$ *désignant le périmètre (au sens de De Giorgi) de* E *dans* $\Omega$, *c'est-à-dire :*

$$P_\Omega(E) = \sup\{\int_E \sum \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \,;\, \phi_i \in \mathcal{C}_o^\infty(\Omega),\ \max_\Omega \sum \phi_i^2(x) \leq 1 \}$$

Démonstration : D'après Fleming et Rischel [10], pour $u \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(\{x \,;\, u(x) > s\}) ds. \tag{3.6}$$

Pour $t \in ]A,B[$ fixé, soit

$$u' = (u-t)^t + t$$

Alors $u' \in H^1(\Omega)$ et d'après (3.6)

$$\int_\Omega |\nabla u'| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(\{x \ ; \ u'(x) > s\})ds$$

Mais si $s < t$, alors $\{x \ ; \ u'(x) > s\} = \Omega$ et donc

$$P_\Omega(\{x \ ; \ u'(x) > s\}) = 0$$

Si $s \geqq t$, alors $\{x \ ; \ u'(x) > s\} = \{x \ ; \ u(x) > s\}$ et donc

$$P_\Omega(\{x \ ; \ u'(x) > s\}) = P_\Omega(\{x \ ; \ u(x) > s\})$$

Donc

$$\int_{u>t} |\nabla u| = \int_\Omega |\nabla u'| = \int_{-t}^{+\infty} P_\Omega(\{x \ ; \ u(x) > s\})ds$$

d'où

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u| = P_\Omega(\{x \ ; \ u(x) > t\}) \text{ p.p.}$$

<u>LEMME III-2</u>. *Si* $u \in H^2(\Omega)$, *alors*

$$\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} \Delta u$$

*pour presque tout* $t \in ]A,B[$ .

Démonstration : Soit $f = -\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\int -\Delta u \psi = \int f\psi \quad \forall \ \psi \in L^2(\Omega).$$

Considérons $\psi = (u-t)^t + t$ avec $t \in ]A,B[$ . Alors $\psi \in H^1(\Omega)$ et nous avons

$$\int_\Omega -\Delta u\psi = \int_{u>t} f(u-t) + t\int_\Omega f$$

De plus,

$$\int_\Omega -\Delta u\psi = \int_\Omega \nabla u.\nabla\psi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\psi = \int_{u>t} |\nabla u|^2 - t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}$$

Donc

$$\int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} f(u-t)$$

Il suffit de démontrer donc que

$$\frac{d}{dt} \int_{u>t} f(u-t) = - \int_{u>t} f.$$

Or, pour tout $h > 0$

i) $$\frac{1}{h}\left[ \int_{u>t+h} f(u-t-h) - \int_{u>t} f(u-t)\right] = \frac{1}{h}\left[- \int_{u>t+h} fh - \int_{t<u\leq t+h} f(u-t)\right.$$

$$= - \int_{u>t+h} f - \frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} f(u-t)$$

On veut montrer que

$$\lim_{h\to 0^+} \left[- \int_{u>t+h} f - \frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} f(u-t)\right] = - \int_{u>t} f$$

Soit $H_h = f\mathcal{X}_{\{x;u(x)>t+h\}}$ et $H_o = f\mathcal{X}_{\{x;u(x)>t\}}$

$H_h$ et $H_o$ sont mesurables, $H_h \to H_o$ p.p. et $|H_h(x)| \leq |f(x)|$ p.p..
Donc, d'après le théorème de Lebesgue

$$\int H_h \to \int H_o$$

c'est-à-dire

$$\int_{u>t+h} f \to \int_{u>t} f$$

De plus

$$\left|\frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} f(u-t)\right| \leq \frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} |f|\,|u-t| \leq \int_{t<u\leq u+h} |f|$$

et de nouveau d'après le théorème de Lebesgue (puisque
$H_h = |f|\mathcal{X}_{\{x;t<u\ t+h\}} \to 0$ p.p.), nous avons

$$\frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} f(u-t) \to 0.$$

$$\text{ii)}\quad -\frac{1}{h}\left[\int_{u>t-h} f(u-t+h) - \int_{u>t} f(u-t)\right] = -\frac{1}{h}\left[\int_{u>t-h} fh + \int_{t-h<u\leqq t} f(u-t)\right]$$

$$= -\int_{u>t-h} f - \frac{1}{h}\int_{t-h<u\leqq t} f(u-t)$$

Les raisonnements précédents nous donnent :

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{u>t-h} f = \int_{u\geqq t} f$$

et

$$\left|\frac{1}{h}\int_{t-h<u\leqq t} f(u-t)\right| \leqq \frac{1}{h}\int_{t-h<u\leqq t} |f|\,|u-t| \leqq \int_{t-h<u\leqq t} |f|$$

Donc, pour tout $t$ tel que mes $\{x;u(x) = t\} = 0$, nous avons

$$\lim_{h\to 0^+} -\frac{1}{h}\left[\int_{u>t-h} f(u-t+h) - \int_{u>t} f(u-t)\right] = -\int_{u>t} f$$

i) et ii) sont équivalents à

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{u>t+h} |\nabla u|^2 - \int_{u>t} |\nabla u|^2\right] = \int_{u>t} \Delta u$$

pourvu que mes $\{x;u(x) = t\} = 0$.

Comme $\{t \in ]A,B[\ ;\ \text{mes}\ \{x;u(x) = t\} = 0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ nous avons :

$$\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} \Delta u \quad \text{pour presque tout } t \in ]A,B[ .$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème III-1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(3.7)\qquad \left(\frac{1}{h}\int_{t<u\leqq t+h} |\nabla u|\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{h}\int_{t<u\leqq t+h} |\nabla u|^2\right) \frac{1}{h}\left[\mu_u(t) - \mu_u(t+h)\right]$$

D'après les lemmes précédents et la propriété 1ii) nous avons

$$(3.8)\qquad P(\{x;u(x)>t\})^2 \leqq \left(\int_{u>t} -\Delta u\right)(-\mu_u'(t))$$

D'après l'inégalité isopérimétrique de De Giorgi

(3.9) $\quad P(\{x;u(x)>t\}) \geq N\alpha_N^{1/N}\ \mu_u^{1-1/N}(t)$

(l'égalité étant atteinte si u a la symétrie sphérique et décroit le long du rayon).

Donc (3.8) et (3.9) entraînent (3.4).

Pour finir la démonstration, il suffit de démontrer que l'égalité est atteinte dans (3.4). Pour ce faire, supposons (3.5). Alors, pour tout $t \in ]A,B[$

$$\mu_u(t) = \text{mes}\ \{x;u(x)>t\} = r^N(t)\alpha_N$$

où $r(t)$ désigne le rayon de la boule

$$\{x;u(x)>t\} \subset \{x;u(x)>A\}\ .$$

Donc

(3.10) $\quad N^2\alpha_N^{2/N}\ \mu_u^{2-2/N}(t) = N^2\ \alpha_N^2\ r(t)^{2N-2}$

De plus

$$\mu_u'(t) = N\alpha_N r(t)^{N-1}r'(t) \qquad \text{p.p. } t$$

et

(3.11) $$\int_{u>t} -\Delta u = -\int_{u=t} \frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = -\ u'(r(t)) \int_{u=t} d\Gamma$$

$$= N\alpha_N r(t)^{N-1}u'(r(t))$$

Donc

$$\left(\int_{u>t} -\Delta u\right)(-\mu_u'(t)) = N^2\alpha_N^2 r^{2N-2}(t)\ \frac{d}{dt}u(r(t)) \ \text{p.p.}$$

Comme u est strictement décroissante (par rapport à r),

$$\text{mes}\ \{x;u(x)=t\} = 0 \qquad \forall\ t$$

et

$$u(r(t)) = t$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\,(u(r(t))) = 1$$

et nous avons l'égalité dans (3.4).

## III-1.3 Applications.

Nous envisageons maintenant l'application du Théorème III-1 aux solutions des problèmes du type (1.1). Comme dans le Théorème III-1, nous supposons $N \geq 2$.

$K$ étant toujours un convexe fermé de $L^2(\Omega)$, on considère $u$ solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K u \\ u = \theta\phi \\ \lambda \int P_K(u)\psi = I \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et d'après le Théorème III-1

$$(3.13) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \lambda \int_{u>t} P_K u \ (-\mu_u'(t))$$

pour presque tout $t$ tel que

$$(3.14) \quad t \in (\max(\inf_{\Omega} \text{ess } u, \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u) \ ; \ \sup_{\Omega} \text{ess } u)$$

En particulier, si $\psi \equiv 1$ (3.13) et (3.14) deviennent :

$$(3.15) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \lambda \int_{u>t} P_K u(-\mu_u'(t)) \quad \text{p.p. } t > \theta$$

L'inéquation (3.15) nous permettra d'obtenir quelques informations sur les exemples traités au chapitre I, §I-4.

EXEMPLE 1. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ a \leq v \leq b \ \text{ p.p. avec } 0 \leq a < b\}$$

Soit $u$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda[a + (u-a)^+ - (u-b)^+] \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta \text{ sur } \partial\Omega \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I \end{cases}$$

où la première équation est prise au sens des distributions. Nous avons remarque (cf. ch. I, §I-3) que $u \in C^2(\Omega)$. Alors

THEOREME III-2 :

i) *Si* $\theta \leqq a \leqq \max_{\overline{\Omega}} u$ *alors*

$$(3.16)\quad \theta \geqq \begin{cases} a - \dfrac{I-\lambda a|\Omega|}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}}\left[|u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1}\right] - \dfrac{\lambda a}{2N\alpha_N^{2/N}}\left[|\Omega|^{\frac{2}{N}} - |u>a|^{\frac{2}{N}}\right] & \text{si } N > 2, \\ a - \dfrac{I-\lambda a|\Omega|}{4\Pi}\log\dfrac{|\Omega|}{|u>a|} - \dfrac{\lambda a}{4\Pi}\left[|\Omega| - |u>a|\right] & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

*où* $|u>a| = \text{mes}\,\{x; u(x)>a\} = \mu_u(a)$ *(avec la convention* $0\times\infty = 0$ si $a = \max_{\overline{\Omega}} u$).

ii) *Si* $\theta \leqq b < \max_{\overline{\Omega}} u$ *alors*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqq b + \frac{\lambda b}{2N\alpha_N^{2/N}}\,|u>b|^{2/N}$$

*Ces inégalités deviennent des égalités lorsque* $\Omega$ *est une boule.*

Démonstration :

i) Si $\theta < a$, alors pour $\theta \leqq \xi \leqq a$

$$\lambda \int_{u>\xi} P_K u = \lambda \int_{\Omega} P_K u - \lambda \int_{u\leqq\xi} P_K u = I - \lambda a \int_{u\leqq\xi} dx$$

$$= I - \lambda a(|\Omega| - \mu_u(\xi))$$

Donc, d'après (3.15)

$$N^2\alpha_N^{2/N}\mu_u^{2-2/N}(\xi) \leqq (I - \lambda a|\Omega|)(-\mu_u'(\xi)) + \lambda a\mu_u(\xi)(-\mu_u'(\xi))$$

Comme nécessairement $I - \lambda a|\Omega| \geqq 0$ (d'après la condition nécessaire d'existence) et comme $\lambda a \geqq 0$ (puisque $a \geqq 0$ entraîne $\lambda > 0$), on obtient :

$$\int_\theta^a d\xi \leqq -\frac{I-\lambda a|\Omega|}{N^2\alpha_N^{2/N}}\int_{|\Omega|}^{|u>a|} s^{2/N-2}ds - \frac{\lambda a}{N^2\alpha_N^{2/N}}\int_{|\Omega|}^{|u>a|} s^{2/N-1}ds$$

d'où (il faut remarquer que $-\mu_u'(\xi)d\xi \leqq d(-\mu_u(\xi))$)

$$a - \theta \leqq - \frac{(I-\lambda a|\Omega|)N}{N^2\alpha_N^{2/N}(2-N)}\{|u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1}\} -$$

$$- \frac{\lambda a}{N^2\alpha_N^{2/N}}\left(\frac{N}{2}\right)\{|u>a|^{\frac{2}{N}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}}\} \qquad \text{si } N > 2$$

ou encore

$$\theta \geqq a - \frac{I-\lambda a|\Omega|}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}}\{|u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1}\} - \frac{\lambda a}{2N\alpha_N^{2/N}}\{|\Omega|^{\frac{2}{N}} - |u>a|^{\frac{2}{N}}\}$$

$$\text{si } N > 2$$

ou

$$a - \theta \leqq - \frac{I-\lambda a|\Omega|}{4\Pi}\{\log|u>a| - \log|\Omega|\} - \frac{\lambda a}{4\Pi}\{|u>a| - |\Omega|\}$$

$$\text{si } N = 2$$

ce qui nous donne

$$\theta \geqq a - \frac{I-\lambda a|\Omega|}{4\Pi}\log\frac{|\Omega|}{|u>a|} - \frac{\lambda a}{4\Pi}\{|\Omega| - |u>a|\}$$

ii) Supposons maintenant $\theta \leqq b < \max_{\overline{\Omega}} u$. Alors pour

$$b \leqq \xi \leqq \max_{\overline{\Omega}} u$$

$$\lambda \int_{u>\xi} P_K u = \lambda b \mu_u(\xi)$$

Dans ce cas, (3.15) s'écrit

$$N^2\alpha_N^{2/N}\mu_u^{2-2/N}(\xi) \leqq \lambda b \mu_u(\xi)(-\mu_u'(\xi))$$

Donc

$$\int_b^{\max u} d\xi \leqq \frac{\lambda b}{N^2\alpha_N^{2/N}}\int_b^{\max u} \mu_u^{2/N-1}(\xi)(-\mu_u'(\xi))d\xi$$

ce qui nous donne

$$\max_{\Omega} u \leqq b + \frac{\lambda b}{2N\alpha_N^{2/N}}|u>b|^{2/N}$$

Lorsque $\Omega$ est une boule, la solution u vérifie la condition (3.5) ; c'est une conséquence du principe du maximum et d'un résultat de Gidas-Ni-Niremberg [12] (cf. aussi P.L. Lions [17]). De plus d'après la régularité de u dans ce cas, nous avons

$$d(-\mu_u(\xi)) = -\mu_u'(\xi)d\xi .$$

Donc, toutes les inégalités précédentes deviennent des égalités.

REMARQUE III-2. Lorsque $a \equiv 0$, (3.16) se simplifie et devient :

si $\theta \leqq a < \max\limits_{\overline{\Omega}} u$

$$(3.17) \quad \theta \geqq \begin{cases} -\dfrac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}}\{|u>0|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1}\} & \text{si } N > 2 \\ -\dfrac{I}{4\Pi}\log\dfrac{|\Omega|}{|u>0|} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

On voit facilement que les expressions (3.17) sont encore valables si u est une solution de (3.14) avec :

i) $K = \{v \quad L^2(\Omega) \ ; \ v \geqq 0 \ \text{ p.p. dans } \Omega\}$

ii) $K = \{v \quad L^2(\Omega) \ ; \ v \geqq 0 \text{ et } |v|_{L^2} \leqq 1\}$ .

En fait, l'inégalité (3.17) est valable pour toute solution de problèmes du type

$$\begin{cases} -\Delta u = \begin{cases} \lambda f(x,u) \text{ si } u \geqq 0 \\ 0 \text{ si } u < 0 \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \quad \text{sur } \partial\Omega \\ -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I \end{cases}$$

(avec $f(x,.) \geqq 0$ p.p. x $\Omega$), lorsque $\theta \leqq 0$ (cf. Mossino-Temam [24]).

EXEMPLE 3. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ v \geqq 0 \text{ et } |v|_{L^2} \leqq 1\}$$

Si u est solution de

$$(3.18)\quad \begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{1 + (|u^+|_{L^2} - 1)^+}\, u^+ & \text{dans } \Omega \\[2ex] u = \theta \quad \text{sur } \partial\Omega \\[2ex] -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma = I > 0 \end{cases}$$

Nous remarquons que $\max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$ et même

$$\max_{\overline{\Omega}} u \geqq \frac{I}{\lambda|\Omega|} > 0$$

puisque $I/\lambda = \int P_K u \leqq \max\limits_{\overline{\Omega}} u\, |\Omega|$

Nous avons :

THEOREME III-3 : *On suppose* $\theta \leqq 0$ . *Alors*

i) $$\theta \geq \begin{cases} -\dfrac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \left\{|u>0|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1}\right\} & \text{si } N > 2 \\[2ex] \dfrac{I}{4\Pi} \log \dfrac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

*(cette inégalité étant isopérimétrique)*

ii) $$\theta \geq \begin{cases} -\dfrac{2\lambda}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \left\{|u>0|^{\frac{4-N}{2N}} - |\Omega|^{\frac{4-N}{2N}}\right\} & \text{si } N \geq 2,\ N \neq 4 \\[2ex] \dfrac{\lambda}{8\sqrt{2}\Pi} \log \dfrac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

iii) $$\frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{2}{N}} \geqq 1$$

*En outre, on a, soit* $|u^+|_{L^2} \leqq 1$ , *soit*

$$1 < |u^+|_{L^2} \leqq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{2}{N}}$$

iv) $$\max_{\overline{\Omega}} u \geq \frac{2N\alpha_N^{2/N}}{\lambda} \frac{\theta}{(|u>0|^{2/N} - |\Omega|^{2/N})}$$

*Dans le cas* N = 2 *ou* 3 *on a encore*

v) $$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{N(4-N)\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{4-N}{2N}} & \text{si } \theta \leq 0 \\[2ex] \dfrac{2\lambda}{N(4-N)\alpha_N^{2/N}} |\Omega|^{\frac{4-N}{2N}} + \theta & \text{si } \theta \geq 0 \end{cases}$$

*Les inégalités* ii) *à* v) *ne sont pas isopérimétriques.*

Démonstration : La partie i) est identique à celle du théorème précédent (cf. remarque III-3).

On suppose $\theta \leq 0$. Alors, d'après (3.15)

(3.19) $$N^2\alpha_N^{2/N}\mu_u^{2-2/N}(\xi) \leq \lambda\int_{u>\xi} P_K u \; (-\mu_u'(\xi)) \qquad \text{p.p. } \xi > \theta$$

Puisque $|P_K u|_{L^2} \leq 1$ on obtient, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

(3.20) $$1 \leq \frac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}} \mu_u^{2/N-3/2}(\xi)(-\mu_u'(\xi)) \qquad \text{p.p. } \xi > \theta$$

Si on intègre (3.20) de $\theta$ à 0 (puisque $\max u \geq \dfrac{I}{\lambda|\Omega|} > 0$),

$$-\theta \leq -\frac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^{|u>0|} s^{2/N-3/2}\,ds$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}(\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} \{|u>0|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}\} & \text{si } N \neq 4 \\[2ex] \dfrac{\lambda}{16\sqrt{\alpha_4}} \log \dfrac{|\Omega|}{|u>0|} & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

Comme $\alpha_N = \dfrac{\Pi^{N/2}}{\Gamma(1 + N/2)}$ on obtient (ii)

Si on intègre (3.20) de 0 à max u, alors pour N < 4 :

$$0 \leqq \max_{\bar{\Omega}} u \leqq \frac{-\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}} \int_{|u>0|}^{0} s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} ds = \frac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}(\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} |u>0|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}$$

Si $\theta \geqq 0$, on intègre (3.20) de $\theta$ à $\max_{\bar{\Omega}} u$ pour avoir

$$\max_{\bar{\Omega}} u - \theta \leqq - \frac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^{0} s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} ds = \frac{\lambda}{N^2\alpha_N^{2/N}(\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}$$

d'où l'expression dans (v).

Pour démontrer (iii) et (iv), on considère (3.19). Alors, d'après (3.18) :

$$(3.21) \quad N^2\alpha_N^{2/N}\mu_u^{2-2/N}(\xi) \leqq \lambda c(u) \int_{u>\xi} u^+ \ (-\mu_u'(\xi))$$

avec $c(u) = 1$ si $|u^+|_{L^2} \leqq 1$ et $c(u) = 1/|u^+|$ sinon.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(3.22) \quad 1 \leqq \frac{\lambda c(u)}{N^2\alpha_N^{2/N}} \max u \ \mu_u^{2/N-1}(\xi)(-\mu_u'(\xi))$$

On intègre (3.22) de $\theta$ à 0 pour avoir

$$-\theta \leqq - \frac{\lambda c(u)}{N^2\alpha_N^{2/N}} \max u \int_{|\Omega|}^{|u>0|} s^{2/N-1} ds$$

Comme $c(u) \leqq 1$ on obtient (iv)

Si on intègre (3.22) de 0 à $\max_{\bar{\Omega}} u$, alors

$$\int_0^{\max_{\bar{\Omega}} u} d\xi \leqq \frac{\lambda c(u)}{N^2\alpha_N^{2/N}} \max_{\bar{\Omega}} u \int_{|u>0|} s^{2/N-1} ds$$

$$= \frac{\lambda c(u)}{2N\alpha_N^{2/N}} \max_{\bar{\Omega}} u \ |u>0|^{2/N}.$$

Donc

$$1 \leqq \frac{\lambda c(u)}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \leqq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N}$$

d'où, soit

$$|u^+|_{L^2} \leqq 1 \leqq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N}$$

soit

$$1 < |u^+|_{L^2} \leqq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \quad .$$

COROLLAIRE III-1. *Pour* $\lambda$ *assez petit il n'y a pas de frontière libre dans le problème* (3.18) . *Plus précisément, si*

$$\lambda < 2N\left(\frac{\alpha_N}{|\Omega|}\right)^{2/N}$$

*alors* $\theta > 0$.

Démonstration. D'après le Théorème III-3, iii), si $\theta \leqq 0$,

$$\frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \geqq 1$$

ou encore

$$\lambda \geqq 2N\left(\frac{\alpha_N}{|u>0|}\right)^{2/N} \geqq 2N\left(\frac{\alpha_N}{|\Omega|}\right)^{2/N}$$

Dans le cas N = 2, on a d'autres informations concernant le problème (3.18), à savoir :

THEOREME III-4. *On suppose toujours* $\theta \leqq 0$. *Si* $N = 2$, *alors*

i) *Si* $\lambda \geqq \frac{I^2}{4\Pi}$ *on a* $|u^+|_{L^2} \leqq \left(\frac{I^2}{4\Pi\lambda}\right)^{1/2} \leqq 1$

ii) *Si* $\lambda < \frac{I^2}{4\Pi}$ *on a :*

*soit* $|u^+|_{L^2} \leqq 1 \leqq \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$

*soit* $1 < |u^+|_{L^2} \leqq \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$

*Par conséquent :*

iii) *Si* $\lambda \geqq \frac{I^2}{4\Pi}$ *alors* $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leqq \frac{\sqrt{\lambda} I}{3\Pi\sqrt{\Pi}} \, |u>0|^{1/2}$

iv) *Si* $\lambda < \frac{I^2}{4\Pi}$ *alors* $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leqq \frac{I^2}{8\Pi^2} \, |u>0|^{1/2}$

Démonstration. Lorsque N = 2 l'inéquation (3.21) prend la forme

$$(3.23) \quad 4\Pi\mu_u(\xi) \leqq \lambda c(u) \int_{u>\xi} u^+(-u_u'(\xi)) \qquad \text{p.p. } \xi \geqq \theta$$

Donc, si $\theta \leqq 0$, pour $0 \leqq \xi \leqq \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, on a d'après (3.2)

$$(3.24) \quad 4\Pi\mu_u(\xi) \leqq \lambda c(u) \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s)ds\right)(-\mu_u'(\xi))$$

Si on multiplie les deux côtés de (3.24) par $2\xi(>0)$ et on intègre de 0 à $\infty$, on obtient :

$$8\Pi\int_0^\infty \xi\mu_u(\xi)d\xi \leqq 2\lambda c(u)\int_0^\infty \xi \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s)ds\right)(-\mu_u'(\xi))d\xi$$

$$\leqq \lambda c(u) \int_0^\infty 2u^*(\mu_u(\xi)) \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s)ds\right)(-\mu_u'(\xi))d\xi$$

$$= -\lambda c(u)\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s)ds\right)^2 d\xi \leqq \lambda c(u) \left(\int_0^{\mu_u(o)} u^*(s)ds\right)^2$$

$$= \lambda c(u) \left(\int_{u>0} u\right)^2 = \frac{\lambda}{c(u)}\left(\int P_K u\right)^2 = \frac{I^2}{\lambda c(u)}$$

Donc

$$\int_0^\infty 2\xi\mu_u(\xi)d\xi \leqq \frac{I^2}{4\Pi\lambda c(u)}$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Fubini :

$$\int_0^\infty 2\xi\mu_u(\xi)d\xi = \int_0^\infty 2\xi\left(\int_\Omega \chi_{\{u>\xi\}}dx\right)d\xi = \int_\Omega \left(\int_0^\infty 2\xi \, \chi_{\{u>\xi\}}d\xi\right)dx$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} 2\xi d\xi\right) = |u^+|^2_{L^2}$$

Donc

$$|u^+|^2_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\Pi\lambda c(u)}$$

ou encore

$$c(u)|u^+|^2_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$$

Si $|u^+|_{L^2} \leqq 1$, alors $c(u) = 1$ et

$$|u^+|_{L^2} \leqq \left(\frac{I^2}{4\Pi\lambda}\right)^{1/2}$$

Si $|u^+|_{L^2} > 1$, alors $c(u) = \frac{1}{|u^+|_{L^2}}$ et

$$|u^+|_{L^2} \leqq \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$$

Donc, si $\lambda \geqq I^2/4\Pi$ , alors

$$|u^+|_{L^2} \leqq \left(\frac{I^2}{4\Pi\lambda}\right)^{1/2} \leqq 1$$

Par contre, si $\lambda < I^2/4\Pi$ , alors :

soit $\quad |u^+|_{L^2} \leq 1 < \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$

soit $\quad 1 < |u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\Pi\lambda}$

On revient à l'inéquation (3.23). Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, comme $c(u) \leqq 1$ ,

$$4\Pi\mu_u(\xi) \leq \lambda|u^+|_{L^2}\mu_u^{1/2}(\xi)(-\mu_u'(\xi))$$

ou

$$1 \leqq \frac{\lambda|u^+|_{L^2}}{4\Pi}\mu_u^{-1/2}(\xi)(-\mu_u'(\xi))$$

Donc, si $\theta \leqq 0$, par intégration de 0 à $\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ :

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqq \frac{\lambda|u^+|_{L^2}}{4\Pi}\int_0^{|u>0|}\frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{\lambda|u^+|_{L^2}}{2\Pi}|u>0|^{1/2}$$

Si $\lambda \geq \frac{I^2}{4\Pi}$ alors d'après i)

$$|u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\Pi\lambda}\right)^{1/2}$$

et

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \frac{\sqrt{\lambda}\ I}{4\Pi\sqrt{\Pi}}\ |u>0|^{1/2}$$

Si $\lambda < \frac{I^2}{4\Pi}$ alors d'après ii)

$$\lambda |u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\Pi}$$

et nous avons

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \frac{I^2}{8\Pi^2}\ |u>0|^{1/2} \quad .$$

Nous pouvons dire que le problème (3.18) est local si $|u^+|_{L^2} \leq 1$, le deuxième membre de la 1ère équation (3.18) se réduisant à $\lambda u^+$. Comme conséquence immédiate du Théorème III-4, nous avons

<u>COROLLAIRE III-2</u>. *Dans le cas* N = 2, *une condition nécessaire pour que le problème* (3.18) *soit* <u>*non local*</u> *est*

$$\lambda \ < \ \frac{I^2}{4\Pi}$$

<u>REMARQUE III-3</u>. Pour l'exemple

$$K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

nous avons

$$P_K u = u^+ \ .$$

Donc la plupart des raisonnements précédents sont valables ; il suffit de considérer $c(u) \equiv 1$ dans (3.21). Plus précisément :

<u>EXEMPLE 3</u> : Soit

$$K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

Si u est solution de

$$(3.25)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ \text{ dans } \Omega \\ u = \theta \text{ sur } \partial\Omega \\ -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I \end{cases}$$

THEOREME III-5. *On suppose* $\theta \leq 0$ . *Alors*

i) $$\theta \geq \begin{cases} -\dfrac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \{|u>0|^{2/N-1} - |\Omega|^{2/N-1}\} & \text{si } N > 2 \\ \dfrac{I}{4\Pi} \log \dfrac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

ii) $$\frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \geq 1$$

iii) $$\max_{\overline{\Omega}} u \geq \frac{2N\alpha_N^{2/N}}{\lambda} \frac{\theta}{(|u>0|^{2/N} - |\Omega|^{2/N})}$$

*De plus, si* $N = 2$ *alors*

iv) $$|u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\Pi\lambda}\right)^{1/2}$$

v) $$\max_{\Omega} u \leq \frac{I\sqrt{\lambda}}{4\Pi\sqrt{\Pi}} |u>0|^{1/2}$$

*Seules les inégalités* i) *et* iv) *sont isopérimétriques.*

## § III-2. LA DEUXIEME INEGALITE - APPLICATIONS.

Nous passons maintenant à la deuxième inégalité ; elle nous permettra d'obtenir des estimations ponctuelles pour $\nabla u$, avec u solution des problèmes du type (1.1).

Les applications qu'on envisage ici sont inspirées des travaux de I. Stackgold [32] et J. Mossino [21]. Elles sont les conséquences directes d'une inégalité générale due à L.E. Payne et I. Stackgold [25] (cf. aussi R. Sperb [30]) et généralisée par J. Mossino dans [21].

Pour ce faire, on considère $\Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\varepsilon}$ et u solution de :

$$(3.26)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = \text{cte} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction continue positive ($f(u) \neq 0$). On fait l'hypothèse :

$$(3.27)\quad u \in W^{3,q}(\Omega) \qquad q > N \geq 2$$

Or, d'après le théorème d'immersion de Sobolev nous avons

$$u \in C^{2,\nu}(\bar{\Omega}) \qquad \text{avec } 0 < \nu \leq 1 - N/q$$

Alors

<u>THEOREME III-6</u>. *Pour tout* $x \in \bar{\Omega}$

$$(3.28)\quad 1/2|\nabla u(x)|^2 \leq \int_{u(x)}^{\max u} (\alpha + f(s))ds$$

*où* $\alpha = \max\{0, (N-1)\max_{\partial\Omega} k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\}$

$k(x)$ *étant la courbure moyenne de* $\partial\Omega$ *au point* $x$ ($k(x) \geq 0$ *si* $\Omega$ *est convexe).*

Démonstration. On considère pour tout $x \in \Omega$

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 - \int_{u(x)}^{\max u} f(s)ds + \alpha u(x)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à choisir convenablement. Alors, d'après la régularité de u et f

$$J \in C^1(\bar{\Omega}).$$

En différenciant $J$ par rapport à $x_i$ on obtient

$$(3.29)\qquad \frac{\partial J}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

et d'après (3.26)

$$(3.30)\qquad \frac{\partial J}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Vu les hypothèses (3.27), toutes les dérivées dans le second membre de (3.30) sont dans $H^1(\Omega)$. De plus, d'après l'hypothèse (3.27) on peut différencier (3.30) au sens faible (cf. Gilbert-Trudinger (théor. 7.4) [13] ).

Alors

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_i^2} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)^2 + \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i^2} - \sum_j \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$- \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

et

$$(3.31)\qquad \Delta J = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)^2 + (\alpha - \Delta u)\Delta u.$$

Si on dénote $g$ le deuxième membre de (3.31), alors

$g \in C^{0,\nu}(\bar{\Omega})$

De plus, si $x \in \partial\Omega$, alors

$$J(x) = \frac{1}{2} \left|\frac{\partial u}{\partial n}(x)\right|^2 - \int_c^{\max u} f(s)ds + \alpha c \in C^0(\partial\Omega)$$

Donc, (cf. D. Gilbart-N.S. Trudinger [13], Théorème 6.13)

$J \in C^{2,\nu}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Considérons $P \in \bar{\Omega}$ tel que $J(P) = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} J(x)$

Deux possibilités se présentent :

. Soit $P \in \partial\Omega$, soit $P \in \Omega$ .

On va montrer que, pour un choix convenable de $\alpha$, P ne peut pas appartenir à $\partial\Omega$. Pour cela, vu la régularité de $\partial\Omega$, on introduit un système de coordonnées normales dans un voisinage de $\partial\Omega$. Alors pour chaque $x \in \partial\Omega$ nous avons

$$J(x) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial n}(x)\right|^2 - \int_c^{\max u} f(s)ds + \alpha c$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial n}(x) = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + f(u)\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}$$

ou encore

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + f(u) + \alpha\right]$$

Mais, par rapport à ce système de coordonnées, l'équation (3.26) (restreinte à $\partial\Omega$) prend la forme

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - (n-1)k\frac{\partial u}{\partial n} = f(u)$$

pour tout $x \in \partial\Omega$ (avec k la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au point x).

Donc

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}\left[\alpha - (N-1)k\frac{\partial u}{\partial n}\right] \qquad \forall\ x \in \partial\Omega$$

D'après le principe du maximum fort (cf. D. Gilbert-Trudinger [13])

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0 \qquad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

En choisissant $\alpha > (N-1)\max\limits_{x \in \partial\Omega} k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ on obtient

$$\frac{\partial J}{\partial n}(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

Donc, pour ce choix de $\alpha$ nous avons nécessairement $P \in \Omega$ .

Mais là aussi deux cas sont possibles : soit $|\nabla u(P)| \neq 0$, soit $|\nabla u(P)| = 0$. On va montrer aussi que pour un choix convenable de $\alpha$, $|\nabla u(P)| \neq 0$ est impossible.

Si $|\nabla u(P)| \neq 0$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$\varepsilon < |\nabla u(P)|$

et on définit

$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \; ; \; |\nabla u(x)| > \varepsilon\}$

qui est un sous-ensemble ouvert de $\Omega$ contenant P. D'après (3.29)

$$\sum_i \left[\frac{\partial J}{\partial x_i} - (\alpha + f(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2 = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right]^2$$

$$\leq |\nabla u|^2 \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$$

Donc, d'après (3.31), pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\Delta J \geq \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i \left(\frac{\partial J}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{|\nabla u|^2} \sum_i (\alpha + f(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i (\alpha + f(u))^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + (\alpha - \Delta u)\Delta u$$

$$= \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 - \sum_i \omega_i \frac{\partial J}{\partial x_i} + (\alpha + f(u))^2 - (\alpha + f(u))f(u)$$

avec $\omega_i = \dfrac{2}{|\nabla u|^2}(\alpha + f(u)) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ qui est borné dans $\Omega_\varepsilon$.

Donc,

$$\Delta J + \sum \omega_i \frac{\partial J}{\partial x_i} \geq \alpha(\alpha + f(u)) \geq \alpha^2 > 0 \quad \text{si } \alpha > 0. \tag{3.32}$$

Or, si $P \in \Omega_\varepsilon$ est un point de maximum pour J, alors

$\dfrac{\partial J}{\partial x_i}(P) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N$

$\Delta J(P) \leq 0.$

ce qui est impossible d'après (3.32).

Il ne nous reste donc que la dernière possibilité :
$|\nabla u(P)| = 0$. Dans ce cas,

$$J(P) = -\int_{u(P)}^{\max u} f(s)ds + \alpha u(P)$$

$$= \max \{\alpha u(P') - \int_{u(P')}^{\max} f(s)ds \ ; \ P' \in \Omega \text{ et } \nabla u(P') = 0\}$$

Comme $f \geqq 0$ , en choisissant $\alpha \geqq 0$, la fonction

$$t \longmapsto \alpha t - \int_{t}^{\max u} f(s)ds$$

est croissante et

$$J(P) = \alpha \max u.$$

Donc

$$J(x) \leqq \alpha \max u \qquad \forall\, x \in \Omega$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leqq \int_{u(x)}^{\max u} [\alpha + f(s)]ds$$

<u>REMARQUE III-4</u>. L'inégalité (3.28) devient une égalité dans le cas $N = 1$ ; dans ce cas, pour $\alpha = 0$

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dx^2} + f(u)\right] = 0.$$

<u>COROLLAIRE III-3</u>. *On considère* $u$ *solution du problème* (3.14) *avec* $N = 2$ *ou* 3. *Alors, si* $\alpha = \max\{0, (n-1)\max_{\partial\Omega} k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\}$

i) *Pour* $K = \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ a \leqq v \leqq b \text{ p.p.}\}$ avec $0 \leqq a < b$, on a

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leqq (\alpha + \lambda a)(\max u - u(x)) +$$

$$\frac{\lambda}{2}\{(u(x) - b)_+^2 - (u(x) - a)_+^2 - \frac{\lambda}{2}\{(\max u - b)_+^2 - (\max u - a)_+^2\}$$

ii) *Pour* $K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ v \geq 0$ p.p. et $|v|_{L^2} \leq 1\}$ *on a :*

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leq \alpha(\max u - u(x)) + \frac{\lambda}{2\left[1+(|u^+|_{L^2}-1)^+\right]}\{(\max u)^2 - u(x)^{+2}\}$$

III-2.1. Applications.

Dans la suite, $\Omega$ est un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\varepsilon}$. On considère :

(3.33) $\quad K = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ 0 \leq v \leq b\}\quad, b > 0.$

On suppose u solution de (3.14) avec K donné par (3.33).

1. Estimations pour la distance entre les frontières libres.

THEOREME III-7. *Soit* $P \in \Omega$ *tel que* $u(P) = \max u = M$ . *Alors nous avons :*

1) Si $\theta \leq 0 \leq M \leq b$ (*il existe une frontière libre :* $\{u=0\}$)

i) $d(\{u=0\}, \partial\Omega) \geq \dfrac{-\theta}{\sqrt{\lambda}M}$

ii) $d(P, \{u=0\} \geq \dfrac{\Pi}{2\sqrt{\lambda}}$

2) Si $\theta \leq 0 < b \leq M$ :(*il existe deux frontières libres :* $\{u=0\}$ *et* $\{u=b\}$).

i) $d(\{u=0\}\ ;\partial\Omega) \geq \dfrac{\theta}{\sqrt{\lambda b(2M-b)}}$

ii) $d(\{u=b\},\{u=0\}) \geq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ arc sin $\sqrt{\dfrac{b}{2M-b}}$

iii) $d(P,\{u=b\}) \geq \sqrt{\dfrac{2(M-b)}{\lambda b}}$

3) $0 \leq \theta \leq M \leq b$ (*il n'existe pas de frontière libre*).

$d(P,\partial\Omega) \geq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\ (\Pi/2$ - arc sin $\dfrac{\theta}{M})$

4) $0 \leqq \theta \leqq b \leqq M$ *(une frontière libre :*$\{u=b\}$ *).*

$$d(\{u=b\};\partial\Omega) \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\text{ar sin}\sqrt{\frac{b}{2M-b}} - \text{ar sin}\frac{\theta}{\sqrt{b(2M-b)}}\right.$$

5) $0 < b \leqq \theta < M$ *(pas de frontière libre).*

$$d(P;\partial\Omega) \geqq \sqrt{\frac{2(M-\theta)}{\lambda b}}$$

*Toutes ces inégalités deviennent des égalités lorsque* $N = 1$.

Démonstration : D'après le Corollaire III-3 :

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leqq \frac{\lambda}{2}((u(x)-b)_+^2 - u(x)_+^2) - \frac{\lambda}{2}((M-b)_+^2 - M^2). \tag{3.34}$$

Il suffit de montrer un des cas ; les autres découlent du même procédé. Montrons par exemple 2ii).

Si $x \in \{0 \leqq u \leqq b\}$, alors (3.34) nous donne

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leqq \frac{\lambda}{2}\{2Mb - b^2 - u(x)^2\}$$

Donc

$$|\nabla u| \leqq \sqrt{\lambda}\sqrt{c^2 - u^2}$$

avec

$$c = \sqrt{b(2M-b)}$$

Soit $B \in \{u=b\}$ et $A \in \{u=0\}$ . Alors, le segment qui joint B à A a pour équation paramétrique

$$t \longmapsto t\vec{\nu} + B$$

avec

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{BA}}{|BA|}$$

et donc

$$\frac{du}{dt} \leqq \left|\frac{du}{dt}\right| \leqq |\nabla u| \leqq \sqrt{\lambda}\sqrt{c^2 - u^2}$$

ce qui donne

$$\int_0^b \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \leqq \sqrt{\lambda}\ d(B,A)$$

Donc

(3.35) $$d(B,A) \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}}$$

Comme le membre droit de (3.35) ne dépend pas du choix des points A et B, nous avons

$$d(\{u=b\},\{u=0\}) \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}}$$

2. Une condition suffisante pour l'existence de la frontière libre $\{u=b\}$ .

THEOREME III-8. *Pour* b *assez petit, la frontière libre* $\{u=b\}$ *existe pour* $\lambda$ *bien choisi. Plus précisément, pour*

$$b < I \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|^2}$$

*si* $\dfrac{I}{b|\Omega|} \leqq \lambda < \dfrac{I^2}{b^2|\partial\Omega|^2}$ *alors* $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u > b$

Démonstration : Si $M \leqq b$, d'après (3.34), pour $x \in \partial\Omega$ , on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 \leqq \lambda(M^2-(\theta_+)^2) \leqq \lambda M^2$$

Donc

$$I^2 = \left(\int \frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \leqq \lambda M^2 |\partial\Omega|^2$$

ce qui équivaut à

$$M \geqq \frac{I}{\sqrt{\lambda}|\partial\Omega|}$$

Donc, si $M \leqq b$, alors $\dfrac{I}{\sqrt{\lambda}|\partial\Omega|} \leqq M \leqq b.$

Mais alors, si

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}|\partial\Omega|} > b$$

nous avons $M > b$, pourvu que $\lambda$ satisfasse la condition nécessaire d'existence, à savoir

$$\frac{I}{\lambda} \leqq b|\Omega|$$

Or, comme $b < \frac{I|\Omega|}{|\partial\Omega|^2}$ on peut toujours choisir

$$\frac{I}{b|\Omega|} \leqq \lambda < \frac{I^2}{b^2|\partial\Omega|^2} .$$

# BIBLIOGRAPHIE

|1| ADAMS, R.A.,
Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975

|2| BERESTYCKI, H.,
Thèse, Université de Paris VI, 1980.

|3| BERESTYCKI, H., BREZIS, H.,
On a free boundary problem arising in plasma physics, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 4, 1980, 415-436.

|4| BERESTYCKI, H., BREZIS, H.,
Sur certains problèmes de frontière libre, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 283, A, 1976, 1091-1093.

|5| CIARLET, P.G.,
"The finit Element Method for Elliptic Problems", North-Holland, Amsterdam, 1978.

|6| CIPOLATTI, R.,
Sur un problème de valeur propre non linéaire, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 239, I, 1981, 455-458.

|7| DAMLAMIAN, A.,
Application de la dualité non convexe à un problème non linéaire à frontière libre (équation d'un plasma confiné), Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 286, A, 1978, 153-155.

|8| DIEUDONNE, J.,
"Eléments d'Analyse", tome 1, Paris, Gauthier-Villars, 1968.

|9| EKELAND, I., TEMAM, R.,
"Analyse Convexe et Problèmes Variationnels", Dunod, Gauthier-Villars, 1974.

|10| FLEMING, W., RISHEL, R.,
An integral formula for total gradient variations, Arch. Math., 11, 1960, 218-222.

|11| GALLOUET, T.,
Quelques remarques sur une équation apparaissant en physique des plasmas, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 286, A, 1978, 739-741.

|12| GIDAS, B., NI, W., NIREMBERG, L.,
Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68, 1979, 209-243.

|13| GILBARD, D., TRUDINGER, N.S.,
"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer Verlag, 1979.

|14| GLOWINSKI, R., LION, J.L., TREMOLIERE, R.,
"Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", vol. 1 et 2, Dunod-Bordas, 1976.

|15| KUČERA, M., NEČAS, J., SUČEK, J.,
The eigenvalue problem for variational inequalities and a new version of the Ljusternik-Schrivelmann theory, Nonlinear Analysis, Acad. Press, 1978.

|16| LAMINIE, J.,
Détermination numérique de la configuration d'équilibre du plasma d'un tokamak, Thèse de 3e Cycle, Université Paris-Sud 1977.

|17| LIONS, P.L.,
Two geometrical properties of solutions of semilinear problems, Applicable Analysis, 1981, vol. 12, 267-272.

|18| MERCIER, B.,
Inéquations variationnelles en mécanique, Publications Mathématiques d'Orsay, 1980.

|19| MOSSINO, J.,
Some nonlinear problems involving a free boundary in plasma physics, J. of Diff. Eq., vol. 34, n° 1, 1979.
Cf. aussi Thèse, Université de Paris XI, 1977.

|20| MOSSINO, J.,
Estimations a priori et réarrangements dans un problème de la physique des plasmas, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 288, A, 1979, 263-266.

|21| MOSSINO, J.,
A priori estimates for a model of Grad-Mercier type in plasma confinement, à paraître dans Applicable Analysis, 1982.

|22| MOSSINO, J.,
Inégalités isopérimétriques dans les E.D.P. elliptiques et applications en physique, Publications Mathématiques d'Orsay à paraître, 1982.

|23| MOSSINO, J., TEMAM, R.,
Directional derivatives of the non decreasing rearrangement mapping and applications to a queer differential equation in plasma physics (à paraître).

|24| MOSSINO, J., TEMAM, R.,
Free boundary problems in plasma physics - review of results and new developments (à paraître).

|25| PAYNE, L.E., STACKGOLD,
On the mean value of the fundamental mode in the fixed membrane problem, Appl. Analysis, 3, 1973, 295-303.

|26| PUEL, J.,
A free boundary nonlinear eigenvalue problem, Proc. of the Int. Symposium on Cont. Mech. and P.D.E., G.M. de la Penha and L.A. Medeiros ed., Rio de Janeiro, 1978.

|27| SCHAEFFER, G.,
Non uniqueness in the equilibrium shape of a confined plasma, Comm. in P.D.E., 2(6), 1977, 587-600.

|28| SERMANGE, M.,
Une méthode numérique en bifurcation-application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas, Appl. Math. Opt., 5, 1979, 127-151.

|29| SERMANGE, M.,
Non convex methods for computing free boundary equilibria of axially symmetric plasmas, Rapport INRIA, n° 108, 1981.

|30| SPERB, R.,
"Maximum Principles and their Applications", Math. in Sci. and Eng. Series, vol. 157, Acad. Press, 1981.

|31| SPRUCK, J.,
Convexity properties of the free boundary in a simple plasma model (à paraître).

|32| STACKGOLD, I.,
Gradient bounds for plasma confinements, Math. Meth. in Appl. Sci., 2, 1980, 68-72.

|33| TALENTI, G.,
Elliptic equations and rearrangements, Ann. della Scuela Norm. Sup. de Pisa, série 4, n° 3, 1976, 697-718.

|34| TEMAM, R.,
A nonlinear eigenvalue problem - the shape at equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal., 60, 1976, p.51

|35| TEMAM, R.,
Remarks on a free boundary value problem in plasma physics, Comm. in P.D.E., 2, 1977, p. 563.

|36| TEMAM, R.,
Monotone rearrangement of a function and Grad-Mercier equation of a plasma physics, Proc. of Int. Conf. on Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications, Rome, May 1978.

|37| TEMAM, R.,
Numerical problems in plasma physics, Numerical Meth. for P.D.E., Proc. of an Advanced Seminar conducted by the Math. Research Center, Univ. Wisconsin, ed. by S.V. Porter, Acad. Press, 1979.

|38| ZARANTONELLO, E.H.,
Projections on convex sets in Hilbert spaces and spectral theory - Contributions to Nonlinear Functional Analysis (E.H. Zarantonello ed.,), Acad. Press, New-York, 1971.