BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 169-176

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__169_0>

© Gauthier-Villars, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHRISTOFFEL (E.-B.), corresp. Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — ALLGEMEINE THEORIE DER GEODAETISCHEN DREIECKE. Aus den Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868. — Berlin, Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften (C. Vogt), 1869. In Commission bei F. Dümmlers Verlags-Buchhandlung (*).

On doit regarder ce beau Mémoire comme marquant un progrès considérable dans cette Géométrie des surfaces courbes, une des plus belles créations de Gauss, suivant laquelle ces surfaces sont considérées « *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cujus dimensio una pro evanescente habetur, flexibile quidem, sed non extensibile,* » et qui, laissant de côté les propriétés qui se rapportent à telles ou telles formes qu'elles prennent dans l'espace, ne s'occupe que de celles qui « *absolutæ sunt, atque invariatæ manent, in quamcumque formam illa flectatur.* » (Gauss, à l'art. XIII des *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* 1827.) M. Christoffel s'est proposé d'établir les principes d'une Trigonométrie générale des surfaces, c'est-à-dire d'une méthode pour calculer les éléments d'un triangle géodésique au moyen des coordonnées curvilignes de ses sommets. Ces éléments sont en général au nombre de neuf (dont six indépendants); car, pour chaque côté, il faut connaître la longueur et les azimuts initial et final (ces azimuts étant rapportés aux directions des courbes coordonnées).

Par des considérations aussi simples qu'ingénieuses, l'auteur a réussi à faire dépendre toute cette recherche d'une seule fonction de quatre variables, qu'il a appelée *longueur réduite* d'un arc géodésique, et qui est le facteur par lequel on doit multiplier l'angle infiniment petit de deux géodésiques de même origine et d'égale longueur, pour obtenir la distance infiniment petite de leurs extrémités (sur la sphère,

---

(*) CHRISTOFFEL (E.-B.). *Théorie générale des triangles géodésiques.* Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* pour l'année 1868. Berlin, imprimerie de l'Académie des Sciences, Librairie de F. Dümmler. In-8°. Prix : 4 fr.

On vend à part tous les Mémoires publiés par l'Académie de Berlin, et en général par les Académies allemandes.

la longueur réduite est le sinus de la longueur géodésique). Cette fonction, qui dépend évidemment des deux couples de coordonnées correspondants aux extrémités de l'arc, est symétrique par rapport à ces couples; elle satisfait généralement à une équation différentielle partielle non linéaire du troisième ordre à deux variables, qui sont les coordonnées d'une des extrémités de l'arc, les coordonnées de l'autre ne s'introduisant dans son expression que par une particularisation convenable des arbitraires de l'intégration. Cette fonction une fois connue, on n'a plus que des équations finies pour déterminer les longueurs des côtés.

Outre ce théorème fondamental très-remarquable, le Mémoire de M. Christoffel renferme une foule de résultats intéressants se rattachant au même sujet, entre autres une discussion très-précise de la continuité des lignes géodésiques, dont l'équation différentielle est présentée sous des formes nouvelles, et des développements très-curieux tirés de l'expression (déjà donnée par Gauss) de la mesure de courbure en coordonnées polaires curvilignes, expression qui fournit en même temps l'équation différentielle des longueurs réduites pour les différents arcs d'une même ligne géodésique. Ces développements se rapportent au cas, très-important à considérer, où la longueur réduite peut devenir nulle, sans que la longueur géodésique le soit elle-même. Fixant sur la ligne géodésique une origine arbitraire, les distances à cette origine de deux points variables, dont la distance réduite est constamment nulle, satisfont à une équation différentielle du troisième ordre, qui comprend, comme cas particulier, celle de Jacobi pour les équations modulaires des fonctions elliptiques, et qui possède une intégrale de même forme.

Nous devons signaler enfin, comme un sujet très-digne d'être étudié à fond, celui que M. Christoffel a rapidement traité dans la dernière Section de son Mémoire. Les côtés et les angles d'un triangle géodésique sont, en général, six fonctions indépendantes des coordonnées des sommets, de sorte qu'à chaque système de valeurs de ces éléments il ne répond qu'une seule position du triangle, ou plusieurs positions distinctes, mais non infiniment proches. Les surfaces appartenant à ce cas, qui est le plus général, constituent pour M. Christoffel la *première classe*. Mais on peut très-bien supposer, en particularisant convenablement la nature de la surface, qu'il existe, entre les trois côtés et les trois angles, une, deux et même trois relations indépendantes des sommets, et dans ce cas, qui répond aux surfaces de la *seconde, troisième* et *quatrième* classe de M. Christoffel, il est évident que chaque triangle géodésique peut se déplacer sur la surface, sans que ses côtés et ses angles doivent varier nécessairement. Dans la seconde classe, le développement ne peut avoir lieu que suivant une ligne déterminée pour chaque sommet; dans la troisième, il est tout à fait arbitraire pour un sommet, mais déterminé en conséquence pour les deux autres; enfin il n'est limité, dans la dernière classe, que par la condition même de l'invariabilité des côtés.

Ce dernier cas est celui de la sphère, et, en général, de toutes les surfaces dont la courbure est constante en chaque point. C'est aussi le seul que M. Christoffel ait pu dégager complétement de ses formules. Le second cas comprend évidemment toutes les surfaces de révolution; mais sont-ce les seules? Le troisième doit aussi comprendre *certaines* surfaces de ce genre, et il serait bien intéressant de les connaître. Ces belles questions, qui ne sont pas les seules que l'étude du Mémoire fasse surgir dans l'esprit du lecteur, montrent combien le sujet inauguré par M. Christoffel est riche et attrayant.

E. BELTRAMI.

BRUHNS (C.), docteur en philosophie, directeur de l'Observatoire et professeur d'Astronomie à Leipzig. — NOUVEAU MANUEL DE LOGARITHMES A SEPT DÉCIMALES, *pour les nombres et les fonctions trigonométriques*. Édition stéréotype. — Gr. in-8°, XXIV-610 pages; 1870. Leipzig, Bernard Tauchnitz, libraire-éditeur. Prix : $1\frac{1}{3}$ Thl. (*).

Les Tables logarithmiques de Bremiker et de Schrön, introduites en France dans ces dernières années, n'ont pas eu de peine à détrôner le vieux Callet, par suite des qualités précieuses qu'elles doivent à l'expérience de leurs auteurs dans la pratique du calcul. Le nouveau recueil que nous annonçons est, comme les précédents, l'œuvre d'un éminent astronome, qui a pu profiter des travaux de

(*) Ces Tables ont été publiées en allemand, en anglais et en français.

ses devanciers, et y introduire des perfectionnements qu'apprécieront aisément les calculateurs praticiens.

Il en est des Tables numériques comme des instruments d'Astronomie et de Physique. C'est par l'usage seulement qu'on peut en apercevoir les qualités et les défauts, et encore faut-il tenir un grand compte des habitudes individuelles du calculateur. Les jugements que l'on porte sur un Ouvrage de cette nature ont donc toujours un caractère plus ou moins subjectif. Aussi est-ce avec une certaine réserve que nous présenterons ici nos appréciations personnelles, uniquement fondées sur les observations que nous avons faites en pratiquant nous-même les calculs d'Astronomie mathématique.

Pour épargner des détails inutiles, nous supposerons connus de nos lecteurs les recueils de Bremiker et de Schrön, et nous nous contenterons d'indiquer en quoi s'en distingue l'ouvrage de M. Bruhns.

Comme ses deux devanciers, M. Bruhns a restreint son Recueil aux deux Tables rigoureusement nécessaires dans les calculs de précision, pensant avec juste raison qu'il est plus commode de trouver dans différents ouvrages les Tables qui répondent aux différents besoins du calculateur, que de les avoir toutes entassées dans un même volume. Comme le titre l'indique, le *Nouveau Manuel* contient la Table des logarithmes des nombres entiers, de 1 à 100000, et la Table des logarithmes des fonctions trigonométriques.

Une des considérations les plus importantes dans un Recueil de ce genre est celle de l'exécution typographique, et l'on peut dire que celle du présent Ouvrage fait le plus grand honneur aux presses de M. B. Tauchnitz. Comme dans les Tables de Bremiker, et dans la plupart des belles publications faites dans ces dernières années en Angleterre et en Allemagne, on a adopté les anciens chiffres elzéviriens, d'une lecture plus facile que les chiffres d'égale hauteur, et même que les chiffres français qu'emploie encore l'imprimerie de M. Gauthier-Villars. Les chiffres de M. Bruhns sont un peu plus forts que ceux de M. Bremiker; seulement, la plus grande inégalité d'épaisseur entre les pleins et les déliés nuit un peu à la facilité de la lecture.

Babbage, Schrön et quelques autres auteurs ont adopté une modification dont nous ne sommes nullement partisan. Ils indiquent par un signe particulier les cas où le dernier chiffre a été *forcé*. Cette indication, qui a dû leur couter un énorme travail, ne nous paraît pas d'une grande utilité; elle introduit dans les pages du livre une certaine confusion, et conduit à des calculs beaucoup moins commodes et beaucoup plus longs que ceux qui résulteraient de l'emploi d'une huitième décimale. M. Bruhns restreint cette indication au seul cas où elle peut être réellement utile, à celui où le dernier chiffre est un 5, ce qui permet d'obtenir tous les logarithmes à 6 décimales, à moins d'une demi-unité près du dernier ordre.

La Table I, contenant les logarithmes vulgaires des nombres entiers de 1 à 100000, est disposée absolument comme la Table correspondante du Recueil de Bremiker. Malgré la meilleure forme des chiffres et la plus grande commodité du format de ces deux Recueils, nous avouons notre préférence pour la disposition donnée à cette section dans l'ouvrage de Schrön.

Il faut, en effet, considérer deux parties dans l'usage d'une Table : l'entrée *directe* et l'entrée *inverse*. Pour l'entrée directe, la disposition qui consiste à former chaque page de 50 ou 51 lignes, séparées de cinq en cinq par des blancs, permet à un calculateur tant soit peu exercé de trouver à première vue le nombre qu'il cherche, dès que le livre est ouvert à la page voulue. Il est inutile, dès lors, de se donner la peine, comme le font beaucoup d'auteurs et M. Schrön lui-même, de distinguer par des caractères plus forts les valeurs de l'argument de dix en dix lignes. Il nous semble même que le défaut d'uniformité qui en résulte est plutôt fait pour dérouter le coup d'œil. La disposition plus compliquée, qu'ont choisie MM. Bremiker et Bruhns, exige la lecture complète de l'argument, et rend la recherche moins prompte. A cela se joint la nécessité d'aller chercher quelques lignes plus haut ou plus bas les deux premiers chiffres de l'argument, qui ne sont inscrits que de dix en dix lignes, sans être séparés des autres par un blanc. Ce dernier inconvénient est plus sensible encore dans l'entrée inverse, quand on veut repasser du logarithme au nombre (*).

Nous pensons aussi qu'il n'eût pas été inutile de prolonger la Table

---

(*) Notre opinion sur ce point peut s'appuyer de l'autorite de Gauss, qui dit, en parlant d'une suppression de chiffres analogue dans les Tables de Pasquich : *Wir können diese Einrichtung bei Tafeln, die zum täglichen Gebrauch bestimmt sind, nicht unbedingt billigen, da das Auge immer die, wenn auch nur kleine, Mühe hat, in der Columne erst in die Höhe zu gehen, um die übrigen Ziffern zu finden.* (GAUSS Werke, t. III, p. 248.)

un peu au delà de 100000. Si l'on examine, en effet, un exemplaire d'une Table de logarithmes ayant longtemps servi, on verra les premières pages beaucoup plus usées que les autres, et cela tient à ce que les nombres voisins de l'unité sont ceux qui se rencontrent le plus souvent dans les calculs. Or, c'est précisément pour ces nombres que les différences tabulaires sont le plus fortes et l'interpolation le plus pénible. Seulement, il faudrait se garder, comme l'ont fait Callet et la plupart de ses successeurs, d'ajouter au prolongement de la Table une huitième décimale, qui n'est qu'un embarras inutile. Nous ne connaissons que Shortrede qui ait eu l'idée judicieuse de prolonger sa Table jusqu'à 120000, sans augmenter le nombre des décimales.

La Table trigonométrique se divise en deux parties, formant les Tables II et III.

La Table II contient les logarithmes des quatre fonctions trigonométriques de seconde en seconde, pour les six premiers degrés, c'est-à-dire pour un degré de plus que les Tables correspondantes de Callet et de Bremiker.

La Table III donne les mêmes logarithmes, de 10 en 10 secondes, pour le reste du quadrant.

M. Bruhns a préféré adopter, pour les colonnes de ces Tables, l'ordre suivi par Callet,

sinus, cosinus, tangente, cotangente,

tandis que Bremiker et Schrön ont choisi le même ordre que Lalande,

sinus, tangente, cotangente, cosinus.

Quoique nous penchions plutôt en faveur de cette dernière disposition, nous conviendrons cependant que c'est surtout l'habitude du calculateur qui doit décider en pareille circonstance.

Pour les 10 premières minutes, la Table II donne les logarithmes des quatre fonctions tout au long, avec les différences tabulaires et des Tables auxiliaires pour faciliter le calcul des parties proportionnelles. A partir de 10 minutes, le nombre des colonnes de chaque page est doublé, ce qui a forcé de supprimer les différences et les parties proportionnelles jusqu'à $1^{\circ}20'$; à partir de là, elles sont rétablies jusqu'à la fin du volume. Dans l'intervalle où elles manquent, on peut y suppléer avec avantage au moyen des logarithmes des rapports $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\tang x}{x}$, que donne la Table I. De $0°10'$ à 6 degrés, les premiers chiffres des logarithmes ne sont inscrits que dans les blancs qui séparent les lignes de dix en dix, en caractères différents de ceux du texte, mais qui ne s'en distinguent peut-être pas d'une manière assez tranchée.

La disposition de la Table III diffère encore de celle de Bremiker, en ce qu'au lieu de partager, comme celui-ci, les groupes de six lignes en un et cinq, M. Bruhns les partage en trois et trois, ce qui nous paraît bien préférable.

Il nous semble, d'après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, que la partie trigonométrique a été traitée par M. Bruhns avec une supériorité qui suffit pour assurer à son livre le premier rang parmi tous les Recueils de Tables que nous connaissons.

En tête du volume est placée une Introduction où sont exposées avec une grande clarté les instructions nécessaires pour l'usage des Tables.

J. Houël.

CHRISTIAN WIENER, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe. — Épreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre a 27 droites réelles. *Avec une Notice explicative.* — Leipzig, Teubner. Prix : $3^f,25$.

Depuis 1849, époque des premières recherches de MM. Salmon et Cayley, la théorie des surfaces du troisième ordre a fait des progrès considérables, dont nous présenterons quelque jour l'histoire à nos lecteurs; il nous suffira, pour le moment, de citer les noms de MM. Salmon, Cayley, Sylvester, Schläfli, August, Brioschi, Steiner, Clebsch, Cremona, Sturm, etc., qui tous ont contribué à donner à cette théorie un degré nouveau d'élégance et de perfection. Plusieurs auteurs ont déjà édifié une classification de la surface générale du troisième degré, d'après le nombre de droites réelles qu'elle renferme. C'est ainsi que M. Cremona, dans son beau Mémoire inséré au *Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 1-133, a divisé les surfaces du troisième ordre en cinq espèces, d'après le nombre des droites réelles et des plans tangents triples réels. Le tableau suivant indique les différents cas considérés par M. Cremona :

1[re] espèce.....	27 droites réelles.	45 plans tangents réels.	
2[e] »	15 »	15 »	
3[e] »	7 »	5 »	
4[e] »	3 »	7 »	
5[e] »	3 »	13 »	

Les géomètres, qui ont poussé si loin l'étude abstraite des propriétés de la surface du troisième ordre, désiraient vivement, et cela se conçoit, avoir une idée nette de sa forme et voir construire au moins un modèle d'une surface du troisième ordre. Sur l'invitation des savants allemands, et après des essais infructueux d'autres géomètres, M. Wiener s'est mis à l'œuvre, et il nous paraît avoir très-bien réussi dans la construction d'une surface à 27 droites réelles. Nous l'avouerons, c'est avec une vive impatience que nous attendions les deux épreuves stéréoscopiques du modèle construit par M. Wiener. Nous les avons soigneusement examinées, nous avons compté les droites qui sont tracées en noir sur le modèle et nous engageons vivement nos lecteurs à se donner le même plaisir. Il y a, pour ceux qui ont le goût de la Géométrie, une véritable satisfaction à voir réaliser ainsi et confirmer par l'expérience les conceptions les plus abstraites, fondées sur des calculs et des considérations géométriques d'un ordre si élevé.

Il serait à désirer qu'un de nos grands établissements se procurât un des modèles qui ont servi pour les épreuves stéréoscopiques. Dans sa Notice explicative, M. Wiener déclare qu'il tient à la disposition des géomètres un modèle en plâtre, à un prix qui nous paraît très-modéré (50 florins de Bade). Le modèle a 50 centimètres de hauteur à peu près.

Nous savons aussi que M. Kummer a fait exécuter, à Berlin, un modèle de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde. Si l'un des éditeurs de Berlin voulait en faire tirer quelques épreuves stéréoscopiques, il rendrait certainement service à toute une classe de géomètres, qui, après avoir étudié les propriétés d'une surface, ne sont pas fâchés de voir la surface elle-même.

G. D.