

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

UN ABONNÉ

## **Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches**

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 1  
(1870), p. 228-229

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1870\\_\\_1\\_\\_228\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__228_1)

© Gauthier-Villars, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES GAUCHES ;

Par UN ABONNÉ.

M. O. Bonnet a démontré, dans une Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et dans son Mémoire sur la théorie des surfaces applicables (\*\*), que la détermination des lignes asymptotiques d'une surface gauche dépend d'une équation de Riccati. Depuis

---

(\*) Ce Journal contient d'autres travaux de Lamé; mais tous, à part celui que nous citons, ont été publiés dans d'autres Recueils.

(\*\*) *Journal de l'École Polytechnique*, XLI<sup>e</sup> et XLII<sup>e</sup> Cahiers.

MM. Clebsch et Cremona ont publié des recherches (\*) sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches, et en particulier des surfaces gauches algébriques. Il résulte des travaux de ces éminents géomètres que, si une surface gauche a deux directrices rectilignes ou une directrice rectiligne et une ligne asymptotique algébrique, toutes les autres lignes asymptotiques sont algébriques. Mais peut-être n'a-t-on pas remarqué les théorèmes suivants qui nous paraissent, à cause de leur simplicité, mériter d'être énoncés.

*Le rapport anharmonique des quatre points où quatre lignes asymptotiques coupent une droite quelconque de la surface est constant.*

La démonstration de ce théorème s'obtient facilement par les considérations géométriques suivantes. Imaginons une surface gauche et l'hyperboloïde osculateur en tous les points d'une génératrice. La surface et l'hyperboloïde ayant les mêmes rayons de courbure, les directions des lignes asymptotiques seront les mêmes pour les deux surfaces ; en d'autres termes :

*Les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface gauche en tous les points d'une génératrice sont les génératrices de l'hyperboloïde osculateur.*

Quatre génératrices de l'un des systèmes de l'hyperboloïde allant couper les génératrices de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, on obtient sans difficulté le théorème énoncé au commencement de cette Note.

On déduit d'ailleurs très-facilement de ce théorème que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est une équation de Riccati. C'est en effet la propriété *caractéristique* de cette équation différentielle, que quatre solutions particulières donnent lieu à un rapport anharmonique constant.

En même temps, notre première proposition montre immédiatement que, si sur une surface gauche trois lignes asymptotiques sont algébriques, il en sera de même de toutes les autres (\*\*).

(\*) Voir CLEBSCH (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 868); CREMONA (*Annali di Matematica*, 2<sup>e</sup> série, t. I<sup>er</sup>, p. 248).

(\*\*) Les théorèmes cités dans ce court article n'ont pas été donnés en effet dans les travaux les plus récents des géomètres qui se sont occupés de la théorie des lignes asymptotiques; ils sont cependant connus, et se trouvent dans la *Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure* de M. Paul Serret. Comme ils nous paraissent élégants, nous avons pensé qu'on ne nous saurait pas mauvais gré de les réimprimer ici.