BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 237-254

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__237_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PROCEEDINGS OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY. — In-8°.

Séance du 27 mai 1867.

MILLER (W.-H.). — *Sur la méthode cristallographique de Grassmann, et sur son emploi dans l'étude des propriétés géométriques générales des cristaux.* (24 p.)

MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY (*).

T. XXXVI; 1867.

LASSELL (W.). — *Observations de planètes et de nébuleuses à Malte.* (32 p.)

— *Observations diverses faites à Malte avec l'équatorial de 4 pieds.* (19 p.)

— *Catalogue de nébuleuses nouvelles, découvertes à Malte avec l'équatorial de 4 pieds, en* 1863-1865. (23 p., 10 pl.)

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITAT. — GÖTTINGEN, Verlag der Dieterichschen Buchhandlung (**).

Année 1868.

ENNEPER (A.). — *Sur un théorème de géométrie.* (7 p.)

Sur la courbe limite de l'ombre projetée par une surface de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe.

ENNEPER (A.). — *Remarques sur l'intersection de deux surfaces.* (9 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur les faits qui servent de base à la géométrie* (29 p.)

NEUMANN (C.). — *Résultats d'une étude sur les principes de l'électrodynamique* (12 p.)

ENNEPER (A.). — *Recherches de géométrie analytique.*

Suite d'articles publiés dans les volumes précédents. (2 art., 43 p.)

SCHERING (E.). — *Extension du théorème fondamental de Gauss sur les surfaces à courbure continue.*

Expression des angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont

---

(*) London : published by the Society, at their apartments, Somerset House. — Il paraît annuellement un volume in-4°, en langue anglaise.

(**) *Nouvelles de la Société royale des Sciences et de l'Université de Georges-Auguste.* — Gœttingue, librairie Dieterich.

Paraît deux fois par mois, dans le format in-12. Sciences mathématiques, physiques et naturelles; Philologie, Histoire. Programmes de l'Université. — En allemand.

même longueur que ceux d'un triangle géodésique tracé sur la surface courbe.

KLINKERFUES (W.). — *Sur les applications de l'équation différentielle* $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ *à l'acoustique et à l'optique, en faisant varier les conditions aux limites.* (10 p.)

Année 1869.

NEUMANN. — *Sur une extension du théorème de calcul intégral sur lequel est fondée la théorie de la décomposition en fractions simples.*

NEUMANN (C.). — *Sur la décharge oscillante d'une table de Franklin.* (10 p.)

ENNEPER (A.). — *Remarques sur le mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.)

ENNEPER (A.). — *De la surface développable formée par les plans tangents le long d'une courbe donnée sur une surface.* (10 p.)

KLEIN (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et et du second degré.* (1 p.)

NÖTHER (M.). — *Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes.* (6 p.)

STERN (A.). — *Sur un théorème de Gauss (relatif à la théorie des nombres).*

QUINCKE (G.). — *Des phénomènes de capillarité sur la surface commune à deux fluides.* (22 p.)

LISTING (J.-B.). — *Sur une nouvelle espèce de vision stéréoscopique.* (25 p., 3 pl.)

ENNEPER (A.). — *Sur les loxodromies des surfaces coniques.* (17 p.)

CLEBSCH (A.). — *Sur la déformation des surfaces algébriques.*

BRIOSCHI (FR.). — *Des substitutions de la forme*

$$\theta(r) \equiv \varepsilon \left(r^{n-2} + a r^{\frac{n-3}{2}} \right),$$

pour un nombre n premier de lettres. (9 p.)

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG (*).

T. XIII; 1868.

SOMOF (J.). — *Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface.* (5 col.; fr.)

Nouvelle démonstration de ce théorème de Laplace, que les attractions sur un point M de l'une des surfaces de la couche, exercées, en raison inverse du carré de la distance, par tous les éléments auxquels on peut mener de M des droites qui ne rencontrent aucune des deux surfaces, ont une résultante normale à la surface en M, et égale à la densité de la couche multipliée par la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'épaisseur de cette couche.

BOUNIAKOWSKY (M.). — *Sur quelques formules qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non-quadratiques des nombres premiers.* (8 col.; fr.)

L'auteur établit diverses formules exprimant des propriétés de la fonction $E(x)$, qui représente l'entier maximum contenu dans le nombre x.

SAWITSCH (A.). — *Observations des planètes Saturne et Neptune en 1867 à l'Observatoire académique de Saint-Pétersbourg.* (1 col.; fr.)

STRUVE (O.). — *Observation spectrale d'une aurore boréale.* (2 col.; all.)

MINDING (F.). — *Sur la loi de formation des dénominateurs et des numérateurs dans la réduction des fractions continues en fractions ordinaires.* (4 col.; all.)

L'auteur rattache ses recherches à celles de Gauss sur les systèmes de lentilles, ainsi qu'aux travaux antérieurs d'Euler.

LINSSER (C.). — *Éphéméride pour la recherche de la Comète périodique de Winnecke* (1858, II), *à son retour en* 1869. (2 col.; all.)

(*) Il parait chaque annee un volume de 36 feuilles gr. in-4, à 2 colonnes, en 5 fascicules. Prix : pour la Russie, 3 rbl. arg.; pour l'etranger, 3 thlrs. de Prusse. — En français et en allemand.

Somof (J.). — *Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de Mécanique.* (4 col.; fr.)

(Voyez *Journal de Crelle,* t. I. — *Œuvres d'Abel,* t. I, p. 27-30). — « Trouver la courbe décrite par un corps pesant, connaissant le « temps employé par le corps à descendre d'une certaine hauteur, « en fonction de cette hauteur. » — Abel a généralisé le problème, et l'a résolu au moyen des propriétés des intégrales eulériennes. En le restreignant à son énoncé primitif, M. Somof a évité l'emploi des intégrales eulériennes, et a ramené la solution à une transformation très-simple des variables dans une intégrale double.

Minding (F.). — *Sur un problème du calcul des probabilités, qui se présente dans l'observation des étoiles filantes.* (6 col.; all.)

Parmi toutes les étoiles filantes qui tombent, dans un temps donné, sur la Terre, en traversant le champ visuel d'un observateur, combien y en aura-t-il de visibles dans une lunette placée dans une direction déterminée quelconque?

T. XIV; 1869.

Lenz (R.). — *Influence de la température sur la conductibilité de certains métaux pour la chaleur.* (5 col.; all.)

Comparaison des pouvoirs conducteurs pour la chaleur et pour l'électricité. Ces deux pouvoirs varient proportionnellement.

Savitch (M.). — *Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.* (2 col.; fr.)

Passage de Mercure sur le Soleil du 5 novembre 1868. — Oppositions de Neptune et de Jupiter en 1868.

Rosén (P.-G.). — *Études faites à l'aide d'un astro-photomètre de M. Zöllner.* (28 col.; all.)

Description de l'instrument. Plan et résultats des observations. Erreurs probables. Différence d'éclat pour des étoiles de grandeurs consécutives. Diagramme comparatif des résultats obtenus par Zöllner et Rosén, pour les intensités correspondantes aux couleurs.

Gyldén (H.). — *Sur une méthode pour représenter les perturbations d'une comète par des expressions rapidement convergentes.* (37 col.; all.)

Hansen, dans son Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris, a fait faire un pas considérable à la théorie des perturbations cométaires, au moyen de son *principe de partition*, qui consiste à exprimer les perturbations de la comète dans les différentes parties de son orbite par des systèmes de variables différents. La distance de la comète à la planète perturbatrice se compose d'une partie constante (c'est-à-dire indépendante de l'*anomalie partielle* de la comète), et d'une partie variable, d'autant plus petite, par rapport à la partie constante, et développable suivant une série d'autant plus convergente, que l'intervalle auquel correspond la forme du développement est moindre. Mais cette partie *constante* est une fonction de la position de la planète perturbatrice, dont le développement est peu convergent dans le cas où les deux astres sont très-voisins, si l'on prend pour argument l'anomalie moyenne de la planète. On peut augmenter la convergence en appliquant à l'orbite de la planète le principe de partition. Mais il est souvent possible d'éviter cette application, en considérant l'anomalie moyenne de la planète comme l'amplitude elliptique d'une nouvelle variable. L'auteur applique sa méthode à l'exemple, traité par Hansen, des perturbations de la comète d'Encke par Jupiter.

STRUVE (O.). — *Réapparition de la Comète de Winnecke, et découverte de quelques nouvelles nébuleuses.* (4 col.; all.)

LINDELÖF (L.). — *Propriétes des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, enferment le plus grand volume.* (13 col.; fr.)

Steiner a démontré (*Journal de Crelle*, t. XXIV) que le polyèdre maximum est circonscrit à une sphère tangente à chacune des faces en son centre de gravité. Il ajoute qu'il reste encore à résoudre, concernant les résultats qu'il a obtenus, plusieurs questions importantes, parmi lesquelles se trouve celle de savoir si la propriété indiquée ci-dessus convient généralement à tous les polyèdres convexes. M. Lindelöf examine cette question, et y répond par l'affirmative.

KONGLIGA SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR. — *Ny foljd* (*).

T. V; 1863-1864.

LINDMANN (C.-F.). — *Sur les fonctions transcendantes* $Z'(a)$ *et* Ga,

(*) *Actes de l'Académie royale des Sciences de Suède.* Nouvelle serie. — Stockholm, *avec l'extension de leurs valeurs au cas des valeurs impaires de a.* (18 p.)

DILLNER (G.). — *Groupe de formules concernant les fonctions elliptiques de première espèce.* (19 p.)

Application du *Calcul géométrique* de l'auteur à la discussion de l'intégrale de première espèce. En désignant, d'après Argand et Cauchy, par R_p la *quantité géométrique* $Re^{p\sqrt{-1}}$, l'intégration de la formule différentielle

$$dR_p = \frac{d\rho_\varphi}{1+(\rho_\varphi)^2}$$

conduit à des relations d'où l'on déduit très-simplement la discussion géométrique du problème du pendule simple.

HOLMGREN (HJ.). — *Sur la transformation des intégrales multiples.* (40 p.)

§ 1. Notations. Signe de substitution de Sarrus et de Lindelöf. — §§ 2 et 3. Changement de l'ordre des intégrations dans les intégrales multiples. — § 4. Introduction de nouvelles variables dans les intégrales définies. — §§ 5 et 6. Cas simples de la formule

$$\left[\prod_{i=0}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(x_1,x_2,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right] F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= \Big|_{u=f_0}^{u=F_0}\left[\prod_{i=1}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(u,x_2,x_3,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right]$$

$$\times \int_{F_{n-1}^{-1}(x_n,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{u} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1.$$

LINDMANN (C.-F.). — *Détermination des dérivées supérieures de quelques fonctions, et de diverses intégrales définies qui en dépendent.* (29 p.)

Détermination des dérivées d'ordre quelconque des fonctions $x^n e^{\frac{a}{x}}$,

$$x^n e^{ax^2},\quad e^{a\sqrt{x}},\quad \frac{\log(a+bx)}{x^n},\quad \frac{\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2},\quad \frac{x\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2},$$

$$(a^2+b^2x^2)^n,\quad x(a^2+b^2x^2)^n,\quad \operatorname{arc\,cot}\frac{\beta x}{\alpha}\log(a^2+b^2x^2),\quad e^{a^2x^2+bx},$$

P.-A. Norstedt et Fils. Publies chaque annee par demi-volumes in-4. Les Memoires sont pagines separement. En langue suedoise.

$e^{a^2x^2} {\cos \atop \sin} \alpha x$. — Calcul de plusieurs intégrales déduites des résultats précédents et des valeurs données par les Tables de Bierens de Haan.

Holmgren (Hj.). — *Sur le Calcul différentiel à indices quelconques.* (83 p.)

L'auteur part de la définition

$$D^{\mu}_{x,x_0} f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} D^m (x-x_0)^{m-\mu} \int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1} f[x_0+(x-x_0)u]\, du,$$

x, x_0 étant, ainsi que μ, des grandeurs réelles ou complexes quelconques, et m le nombre entier positif (ou nul) immédiatement plus grand que la partie réelle de μ. Ces recherches se rattachent au Mémoire précédemment indiqué sur les intégrales multiples.

T. VI; 1865-1866.

Malmsten (C.-J.). — *Sur les intégrales définies entre des limites imaginaires.* (18 p.)

Après avoir fixé, dans son *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal* (*) (21e Leçon), la signification d'une intégrale définie entre des limites réelles, Cauchy l'a étendue, deux ans plus tard, dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*. M. Malmsten établit les théorèmes suivants, relatifs à ces dernières intégrales :

Théorème I. Si l'on a diverses quantités complexes $A_n + B_n i$, dont les parties réelles soient de même signe, et que le module de $a+bi$ soit une *moyenne* entre ceux des quantités $\alpha_n + \beta_n i$, on a

$$\Sigma(A_n + B_n i)(\alpha_n + \beta_n i) = (a+bi)\Sigma(A_n + B_n i).$$

Théorème II. $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte,

$$\lim \Sigma [p(x_n, y_n)\,dx_n + q(x_n, y_n)\,dy_n]$$
$$= \int_{x_0}^{X} p(x, Y)\,dx + \int_{y_0}^{Y} q(x_0, y)\,dy.$$

(*) Cet Ouvrage de Cauchy, si important pour l'histoire de la Science, est maintenant *presque introuvable*. Il serait bien à souhaiter qu'on en fît une nouvelle edition.

Théorème III. $f(z)$ étant une fonction synectique de $z = x + yi$, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ est une quantité indépendante du chemin parcouru.

Théorème IV. On a

$$\int_{z_1}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

Théorème V. Si $f(z)$ est une fonction synectique de z, et

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

$F(z)$ sera une fonction synectique, ayant pour dérivée $f(z)$.

ÖFVERSIGT af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. — *Stockholm. P.-A. Norstedt och söner* (*).

T. XXII, 1865.

Dahlander (G.-R.). — *Sur l'effet mécanique produit par la vapeur d'eau saturée pendant son expansion.* (10 p., 1 pl.)

Möller (A.). — *Éléments et éphéméride de la comète de Faye.* (11 p.)

L'auteur trouve, pour les éléments de la quatrième apparition,

1865, oct. 4,0, T. m. Berlin.

$\mu = 478'',64582$	$\varpi = 49°56'54'',56$
$M = 342°18'32'',41$	$\Omega = 209.41.52,91$
$\varphi = 33.53.8,57$	$i = 11.22.7,44.$

Edlund (E.). — *Détermination quantitative des phénomènes de chaleur qui se produisent dans le changement de volume des métaux, et de l'équivalent mécanique de la chaleur, indépendamment du travail intérieur du métal.* (31 p.)

Daug (H.-T.). — *Sur les cubatures approximatives.* (5 p.)

L'auteur ne s'occupe que des volumes terminés à une surface quelconque et ayant pour base un rectangle. Imaginons qu'on ait divisé

(*) *Compte rendu des travaux de l'Académie royale des Sciences.* Stockholm, P.-A. Norstedt. et fils.

Un volume par an, en 10 livraisons in-8, en langue suedoise. Prix du volume : 6 Rdr.

ce rectangle en rectangles égaux par deux systèmes de parallèles aux côtés. On n'emploiera que les ordonnées de la surface élevées aux sommets et aux centres de ces rectangles.

Soient S_1 la somme des ordonnées élevées aux sommets du rectangle qui sert de base au volume; S_2 la somme des ordonnées aux points de division situés sur le périmètre du rectangle; S_4 la somme des ordonnées aux points de division situés à l'intérieur de la base; S_8 la somme des ordonnées aux centres des rectangles partiels; 2δ, 2ε les dimensions de l'un des rectangles partiels. On a approximativement

$$V = \frac{\delta.\varepsilon}{3}(1.S_1 + 2.S_2 + 4.S_4 + 8.S_8).$$

Holmgren (K.-A.). — *Sur la théorie de la formation des ondes sonores dans les tuyaux.* (17 p.)

Björling (C.-F.-E.). — *Sur quelques propriétés des séries de Fourier et de leurs coefficients.* (6 p.)

Théorème. — La série $F(t) = \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} v_n \sin nt$ peut être différentiée, lorsque l'égalité précédente subsiste non-seulement entre les limites o et π, mais encore aux limites elles-mêmes. Au contraire, pour que la série $F(t) = \frac{1}{2}u_0 + \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n \cos nt$ puisse être différentiée, il suffit que $F(t)$ ait une valeur finie pour $t = 0$ et $t = \pi$; en supposant toujours que $F(t)$ ne devienne infini pour aucune valeur de t comprise entre les mêmes limites.

Åstrand (J.-J.). — *Méthode simple d'approximation pour les déterminations du temps et de la longitude.* (15 p.)

Cette méthode n'exige point l'emploi des Tables de logarithmes.

T. XXIII; 1866.

Edlund (Er.). — *Démonstration expérimentale de la dilatation produite par le courant électrique dans les corps solides, indépendamment de la chaleur développée.* (27 p.)

Björling (E.-G.). — *Sur les formules d'addition pour les fonctions elliptiques.* (4 p.)

Jacobi (*Sur la rotation des corps,* Journ. de Crelle; t. XXXIX, p. 324), déduit les diverses formules d'addition de la formule

$$\cos \mathrm{am}(\alpha+\beta) = \cos \mathrm{am}\,\alpha \cos \mathrm{am}\,\beta - \sin \mathrm{am}\,\alpha \sin \mathrm{am}\,\beta\, \Delta \mathrm{am}(\dot{\alpha}+\beta).$$

On peut les déduire plus simplement d'une autre manière, que l'auteur indique brièvement.

T. XXIV; 1867.

THEORELL (A.-G.). — *Quelques conséquences du théorème du Cauchy sur les différences des fonctions continues.* (4 p.)

On a les formules

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + n\theta\Delta x),$$
$$\Delta^n f(x,y) = d^n f(x + n\theta\Delta x, \quad y + n\theta\Delta y).$$

PETTERSON (C.-A.). — *Déterminations astronomiques de positions dans le district de Norrbotten, en* 1859-62. (9 p.)

DAHLANDER (G.-R.). — *Sur la détermination de l'axe central et de l'axe de rotation dans le mouvement d'un corps.* (4 p.)

Construction géométrique.

T. XXV; 1868.

DAHLANDER (G.-R.). — *Théorie géométrique de l'accélération dans le déplacement d'une figure dans son plan.* (16 p., 1 pl.)

L'auteur, partant des travaux de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LI et LII), étudie la relation qui existe entre trois positions d'une figure, et ses résultats contiennent, comme cas particulier, la théorie de l'accélération. Il expose ensuite plusieurs théorèmes auxquels ces recherches l'ont conduit.

BJÖRLING (C.-F.-EM.). — *Sur les conditions de réalité des racines des équations algébriques.* (10 p.)

Ces conditions sont fondées sur les relations qui existent entre les racines d'une équation et celles de sa dérivée.

NOVA ACTA REGIÆ SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS. — *Upsaliæ, W. Schultz* (*).

III[e] Série, t. VI; 1866-1868.

WACKERBARTH (A-D.). — *Théorie provisoire de Léda.* (24 p.; angl.)

Les perturbations sont calculées par la méthode de Laplace.

(*) Paraît par demi-volumes in-4, tous les deux ans. Memoires pagines separement, en diverses langues.

Hoppe (R.). — *Sur les sommes des séries divergentes.* (12 p.; fr.).

Recherche de la fonction $\varphi(n)$, telle que lim. $\frac{\Sigma u_n}{\varphi(n)} = 1$ pour n infini.

Hoppe (R.). — *Surfaces également illuminées.* (4 p.; fr.)

La surface uniformément éclairée par des rayons partis d'un point est représentée par l'ensemble des équations

$$r = \sqrt{\frac{\sin 2\mu}{c}},$$

$$\lambda = \text{arc tang}\,(\text{tang}\,\eta\,\sin\vartheta) + \varphi'(\sin\eta\,\cos\vartheta)$$

$$\mu = \text{arc tang}\,\frac{\text{tang}\,\vartheta}{\cos\eta} + \sin\eta\,\cos\vartheta\,.\,\varphi'(\sin\eta\,\cos\vartheta) - \varphi(\sin\eta\,\cos\vartheta),$$

r, ϑ, λ étant le rayon vecteur, la latitude et la longitude, η et μ des variables auxiliaires, et φ une fonction arbitraire.

ARCHIV der Mathematik und Physik (*).

Bd. LI, Heft 1; 1869.

Gretschel (H.). — *Démonstration élémentaire de la formule de la durée de l'oscillation d'un pendule simple.* (6 p.; all.)

L'auteur arrive à l'expression rigoureuse en remplaçant les intégrations par des sommations de séries.

Exner (K.). — *Sur la forme des petits éléments de surface.* (3 p.; all.)

Un élément de surface est engendré par le mouvement continu d'un arc de cercle infiniment petit glissant sur un autre arc de cercle infiniment petit, de manière que leurs deux plans soient toujours perpendiculaires entre eux, et que le centre du premier reste toujours dans le plan du second.

Spieker (Th.). — *Sur un cercle remarquable, décrit autour du centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne, et analogue au cercle des neuf points.* (5 p.; all.).

Most (R.). — *Sur le centre de gravité du contour des figures planes et solides les plus simples.* (5 p.; all.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 100.

Sonderhof (A.). — *Corrections géodésiques des angles horizontaux observés sur le sphéroïde.* (26 p.; all.)

Fasbender. — *Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives.* (3 p.; fr.)

Versluys (J.). — *Applications nouvelles des déterminants à la Géométrie* (2e art.). (23 p.; fr.)

Discussion de l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles, et de la courbe du second degré intersection d'une surface et d'un plan.

Unferdinger (Fr.). — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, et sur les courbes dont l'équation est* $r^k = a^k \sin k\theta$. (21 p.; all.)

Grassmann (H.). — *Résolution élémentaire de l'équation générale du quatrième degré.* (3 p.; all.)

Dostor (G.). — *Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. — Ellipse et hyperbole : relation entre les angles des deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. — Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. — Propriétés du triangle rectangle. — Généralisation d'un théorème d'Euler (ou de Fermat) sur le cercle, et son extension à l'ellipse. — Propriétés du triangle sphérique rectangle.* (17 p.; fr.)

Littrow (C. von). — *Sur l'infériorité des Anciens dans les sciences physiques.* (13 p.; all.)

Discours prononcé à l'occasion de son installation comme recteur de l'Université de Vienne.

DILLNER (Göran), adjunkt i matematik vid Upsala Akademi. — Grunddragen af den geometriska kalkylen. (*Tidskrift for matematik och Fysik*, 1868-1870, Upsala) (*).

L'*unité*, au point de vue arithmétique, étant une quantité de *grandeur* arbitraire, on peut la faire varier, et les nombres qui représentent les diverses grandeurs concrètes varieront en même temps.

(*) *Éléments du Calcul géométrique;* par le Dr G. Dillner, Professeur adjoint de

Le changement d'unité donne lieu aux opérations de la multiplication et de la division.

Au lieu de chercher la grandeur absolue d'une quantité, on peut avoir pour but sa détermination dans une série illimitée dans les deux sens, telle que la détermination d'un point sur une droite indéfinie. Cette question se ramène à une détermination de grandeur, si l'on prend pour inconnue la distance du point cherché à une origine fixée arbitrairement sur la droite. Mais ici la grandeur de la distance n'est qu'une quantité auxiliaire, qui ne suffirait pas pour l'expression complète du résultat, si l'on n'y ajoutait l'indication du sens dans lequel elle doit être portée à partir de l'origine.

Au lieu donc de considérer séparément les deux déterminations de grandeur et de sens, il est plus simple de les comprendre dans une même détermination, et de substituer aux opérations arithmétiques d'addition et de soustraction, qui rappelaient uniquement les idées d'augmentation et de diminution, des opérations algébriques plus générales, comprenant les premières comme cas particuliers, et désignées, pour cette raison, par les mêmes noms, savoir : l'*addition algébrique,* consistant dans le transport de l'extrémité de la distance dans un certain sens convenu, et la *soustraction algébrique*, consistant dans le transport de la même extrémité dans le sens opposé. Ces deux opérations peuvent être considérées comme correspondantes au *changement d'origine.*

En concevant maintenant la soustraction à ce point de vue ***plus général***, cette opération sera ***toujours possible***, et la notion des quantités négatives n'offrira plus aucune difficulté.

Si l'on considère l'unité comme étant elle-même susceptible de signe, le *changement d'unité* donnera lieu à la multiplication et à la

---

Mathématiques à l'Académie d'Upsala. (Extrait du *Journal de Mathématiques et de Physique,* années 1868-1870. Huit articles, 91 p.)

Voir *Bulletin,* p. 177 et 179.

M. Dillner avait dejà publié en 1860 un Mémoire sur le même sujet, intitulé : *Geometrisk kalkyl, eller geometriska qvantiteters räknelagar*, af G. Dillner. (Aftryckt ur *Upsala Kongl. Vetenskaps-Societets Årskrift*); Upsala, G.-A. Leffler, 1860. [*Calcul géométrique,* ou *Règles du calcul des quantités géométriques.* (Extrait de l'*Annuaire de la Société Royale des Sciences d'Upsala.*) Gr. in-8, 96 p.]. L'auteur y a étendu ses recherches à la représentation des points dans l'espace à trois dimensions.

La série d'articles dont nous analysons la première partie est une exposition détaillée de la même théorie, pour le cas de deux dimensions.

division *en grandeur et en signe*, et la règle des signes s'établira aisément *a priori*, ainsi que toutes les règles du calcul algébrique des quantités réelles, et ces règles donneront toujours des résultats admissibles, tant que le problème pourra être résolu par un point appartenant à la série *linéaire* représentée par les nombres positifs et négatifs.

La question proposée peut avoir un but encore plus général, celui de la détermination d'une quantité faisant partie d'une série double, et que l'on peut représenter par un point d'un plan. Ici, outre la distance à une origine arbitraire, il faut encore avoir, non plus une simple indication pour choisir entre deux sens opposés, mais une seconde grandeur déterminant la direction dans laquelle la distance doit être portée.

En faisant un nouveau pas dans la généralisation des notations et des opérations, on est conduit à incorporer dans un même symbole analytique toutes les données qui déterminent un point du plan, et à donner les noms d'addition et de soustraction au transport d'un point dans le plan, ou, ce qui revient au même, au *changement d'origine,* lorsque l'on conserve les directions fondamentales d'où l'on compte les angles. Le symbole binaire qui caractérise ainsi une quantité de la double série s'appelle *quantité géométrique* (Cauchy) ou *quantité complexe* (Gauss) (*).

En considérant l'*unité* comme une quantité géométrique, ayant une grandeur et une direction, le *changement d'unité* conduit de la manière la plus simple et la plus naturelle à la définition de la multiplication et de la division des quantités géométriques. De là on passe à l'élévation aux puissances, et à l'extraction des racines. Cette dernière opération, grâce à la nouvelle généralisation de sa définition, ne peut plus offrir maintenant d'impossibilité, et la dénomination d'*imaginaire* ne peut plus être prise dans son sens primitif, puisqu'elle s'applique à des quantités parfaitement réelles.

(*) La première idée de la substitution des quantités géométriques aux quantités *imaginaires* ou *impossibles* remonte à Wallis (1693), qui, partant de la proportion $+1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$, en conclut que $\sqrt{-1}$ doit être représenté par une longueur portée dans une direction intérmédiaire entre celles qui repondent à $+1$ et à -1. Plus d'un siècle s'écoula avant qu'Argand ne vînt reprendre cette idée féconde (1806). Depuis lors, la théorie géométrique des imaginaires a été l'objet des recherches d'un grand nombre d'auteurs, travaillant souvent à l'insu les uns des autres, et parmi lesquels nous citerons en première ligne les noms d'Hamilton et de Bellavitis.

En revenant en arrière, il est aisé de voir comment les règles du calcul des quantités *algébriques* (positives ou négatives) se déduisent comme cas particulier de celles du calcul des quantités *géometriques*.

De plus, c'est seulement en vertu de la définition généralisée des opérations qu'il est permis d'appliquer à tous les cas la plupart des théorèmes relatifs aux équations algébriques.

Après avoir fondé le calcul des quantités géométriques sur les considérations simples et ingénieuses dont nous venons d'analyser la substance, M. Dillner passe aux applications de sa théorie. Nous avons exprimé déjà, en parlant de la *Méthode des équipollences* de M. Bellavitis (*), notre conviction relativement aux avantages que présente ce procédé d'analyse géométrique sous le rapport de la simplicité et de l'uniformité des moyens. Les exemples que donne M. Dillner justifient pleinement cette manière de voir.

La méthode du Calcul géométrique conduit directement aux théorèmes connus sur les projections, exprimés sous leur forme la plus simple, aux propriétés des fonctions circulaires et à leur applition à la résolution des triangles plans. Elle donne immédiatement les formules de la transformation des coordonnées, si l'on combine le changement d'origine avec le changement d'unité en direction seulement.

Chaque point d'une courbe plane étant déterminé par une certaine quantité géométrique, la formule qu'exprimera la loi de variation de cette quantité sera l'équation de la courbe. On représentera d'abord cette loi au moyen du système de coordonnées le plus simple; puis, par la transformation des coordonnées, on rapportera l'équation à un système de coordonnées quelconque.

Par exemple, si l'on prend pour origine un point d'une droite, et que l'on désigne par ρ_σ la quantité géométrique qui détermine un point quelconque de la droite, l'équation de la droite rapportée à cette origine sera $\sigma =$ const. Si l'on transporte maintenant l'origine en un point représenté par $-k_\alpha$, la nouvelle équation du lieu sera

$$r_p = k_\alpha + \rho_\sigma.$$

Si l'on décompose r_p et k_α parallèlement à deux axes faisant entre eux

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e serie, t. VIII, p. 289.

un angle θ, l'équation deviendra de la forme

$$x + y_\theta = g + h_\theta + \rho_\sigma,$$

d'où l'on tire, en égalant les composantes rectangulaires des deux membres,

$$x - g + (y - h)\cos\theta = \rho\cos\sigma,$$
$$(y - h)\sin\theta = \rho\sin\sigma.$$

L'élimination de la variable ρ donne l'équation en x et y.

Si l'on supposait σ variable et ρ constant, on aurait, par l'élimination de σ, l'équation du cercle de rayon ρ.

Un cercle de rayon ρ roulant sans glisser sur l'axe des x, soit $\rho\sigma$ l'abscisse du point de contact; le centre sera exprimé par $\rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}}$, et le point décrivant de la cycloïde aura pour expression, relativement à ce centre, $\rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma}$. Donc l'équation de la cycloïde sera

$$r_p = \rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}} + \rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma},$$

d'où

$$x = \rho\,(\sigma - \sin\sigma),\quad y = \rho\,(1 - \cos\sigma).$$

Après ces indications, l'auteur revient sur l'emploi de la méthode dans la résolution des problèmes de géométrie élémentaire.

Un triangle OAB est déterminé de forme par le quotient *géométrique* $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$. La proportion OA : OB = O'A' : O'B' exprime la similitude des triangles OAB, O'A'B'. La proportion OA : OB = OB : OC indique que OB est moyenne proportionnelle entre OA et OC et bissectrice de l'angle AOC.

La constrnction des identités algébriques où entrent des quantités géométriques fournit un moyen fécond pour établir analytiquement un nombre illimité de propositions de géométrie.

Ainsi l'identité

$$a^2 - (b_\gamma)^2 = (a + b_\gamma)(a - b_\gamma)$$

donne, en prenant les modules de part et d'autre,

$$\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2\cos 2\gamma} = \mathrm{mod.}\,(a + b_\gamma) \times \mathrm{mod.}\,(a - b_\gamma).$$

Si OA = a est la ligne menée du sommet O d'un triangle au milieu A de la base BB' = $2b$, et que γ soit l'angle OAB, le second membre sera égal à OB $\times$ OB'. En donnant à γ diverses valeurs, on aura différents théorèmes :

$$\text{Pour } \gamma = 0, \quad a^2 - b^2 = \mathrm{OB}.\mathrm{OB}', \quad [\text{Eucl., II, 5}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 + b^2 = \mathrm{OB}.\mathrm{OB}', \quad [\text{Eucl., I, 47}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad a^4 + b^4 = c^4, \quad \text{où} \quad c^2 = \mathrm{OB}.\mathrm{OB}';$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

M. Dillner termine par des exemples de constructions tirées de la résolution d'équations entre des quantités géométriques.

Pour encourager l'étude de ces élégantes méthodes, qui finiront sans doute par devenir classiques, M. Dillner propose pour sujet du prix annuel que décerne la rédaction du *Tidskrift*, la composition d'un Recueil de problèmes géométriques résolus au moyen des équations du premier et du second degré et de celles qui s'y ramènent (*).

J. HOÜEL.