R. LIPSCHITZ

Extrait de six mémoires publiés dans le Journal de mathématiques de Borchardt

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 142-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__142_1>

EXTRAIT
DE SIX MÉMOIRES PUBLIÉS DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES DE BORCHARDT;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

(Analyse rédigée par l'Auteur.)

II.

Suite des recherches sur les fonctions entières homogènes de n différentielles (¹).

Pour l'étude de la *classe de formes* à laquelle appartient une forme donnée $f(dx)$, du $p^{\text{ième}}$ degré, il est bon de combiner avec la conception *du type normal* $\varphi(du)$, défini par l'équation (20), I (²), les considérations introduites dans le calcul des variations par Ha-

(¹) *Journal de Borchardt,* t. 72, p. 1-56.
(²) C'est-à-dire l'équation (20) du Mémoire I.

milton dans le travail déjà cité, et par Jacobi dans son Mémoire : *Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung,* etc. (*Journal de Crelle,* t. 17, p. 97-162), et dans une série de travaux postérieurs. Partons du problème de la variation de l'intégrale (9), I,

$$\Theta = \int_{t_0}^{t} f(x')\,dt,$$

et supposons le système d'équations différentielles (11), I, intégré de la manière indiquée ci-dessus. La valeur de l'intégrale Θ, considérée comme fonction des éléments $x_a^{(0)}$, $x_a'^{(0)}$, t, donnera pour sa variation complète

$$(1)\quad \delta\Theta = -(p-1)f(x')\,\delta t + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\,\delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(x'^{(0)})}{\partial x_a'^{(0)}}\,\delta x_a^{(0)}.$$

Les valeurs d'intégration sont des fonctions des seuls éléments $x_a^{(0)}$ et des *variables normales*

$$(t-t_0)\,x_b'^{(0)} = u_b,$$

introduites par la formule (18), I. Nous admettrons maintenant que le déterminant fonctionnel

$$(2)\qquad \left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right|$$

ne s'annule pas, et que les x_a sont des *fonctions* des u_b, *indépendantes entre elles.* Le déterminant (2) prend pour valeur l'unité, toutes les fois que l'on a les équations $x_a = x_a^{(0)}$, et l'hypothèse en question peut être satisfaite lorsque, dans la *variété* du premier ordre, déterminée par l'intégration de (11), I, on ne fait pas varier le système de valeurs x_a au delà d'une certaine limite à partir du système initial $x_a^{(0)}$. On peut alors, réciproquement, considérer les quantités u_b comme des fonctions des éléments $x_a^{(0)}$ et x_a (¹). Les

(¹) Relativement aux conditions qui doivent être satisfaites ici, *voir* le Memoire intitulé : *Beiträge zur Theorie der Umkehrung eines Functionensystems* (*Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, année 1870, 12 nov.; publié en italien dans les *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. IV, fasc. III, p. 231-259). Les considérations établies dans ce Mémoire sur les *variétés* des differents ordres *ne se rapportent pas,* comme on le fait observer dans l'art. 3, *à une forme de n différentielles, et se distinguent par là, dès le principe, de celles dont il est actuellement question.*

combinaisons

$$(3) \qquad (t - t_0)x'_b = v_b,$$

qui satisfont aux équations

$$(3^*) \qquad v_b = \frac{\partial x_b}{\partial u_1} u_1 + \ldots + \frac{\partial x_b}{\partial u_n} u_n,$$

sont des fonctions des mêmes quantités. De (13), I, résulte l'équation

$$(4) \qquad f(v) = f_0(u),$$

et cette fonction dépend, en vertu de l'équation (8*), I,

$$\mathrm{R} = \sqrt[p]{p f_0(u)},$$

de l'intégrale R, définie par (8), I. En multipliant actuellement l'équation (8) par le facteur $(t - t_0)^{p-1}$, on obtient l'expression suivante de la différentielle exacte de la fonction $f(v) = f_0(u)$ qui dépend des éléments x_a et $x_a^{(0)}$,

$$(5) \qquad \delta f(v) = \delta f_0(u) = \sum_a \frac{\partial f(v)}{\partial v_a} \delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} \delta x_a^{(0)}.$$

Appelons maintenant l'attention sur le type normal $\varphi(du)$, et en particulier sur la différence

$$(6) \qquad \varphi(du) - f_0(du).$$

En supposant qu'une forme $g(dy)$ appartient à la même classe que la forme $f(dx)$, on a établi précédemment les équations (16), I,

$$u_a = c_{a,1}^{(0)} z_1 + \ldots + c_{a,n}^{(0)} z_n,$$

et (23*), I,

$$\varphi(du) - f_0(du) = \chi(dz) - g_0(dz).$$

De ces équations il résulte que, si l'on développe la différence (6) suivant les puissances positives des variables normales u_a, et la différence $\chi(dz) - g_0(dz)$ suivant les puissances positives des variables normales z_k, les sommes des termes du $q^{\text{ième}}$ ordre dans les deux développements donneront respectivement les équations

$$(7) \qquad [\varphi(du) - f_0(du)]_q = [\chi(dz) - g_0(dz)]_q.$$

On voit facilement que la différence (6) s'annule, lorsqu'on y remplace chaque différentielle du_b par le u_b correspondant. Or l'application de l'équation (5) conduit à ce théorème, que *chacune des n dérivées partielles de la différence* (6), *par rapport aux différentielles du_a, s'annule pareillement, lorsqu'on remplace dans cette dérivée chaque différentielle du_b par le u_b correspondant.* La même chose a lieu pour l'expression

$$f_0(du) - [d\sqrt[p]{f(du)}]^p, \tag{8}$$

et par suite aussi pour l'expression

$$\varphi(du) - [d\sqrt[p]{f_0(u)}]^p. \tag{9}$$

Le quotient des deux déterminants relatifs aux formes $\varphi(du)$ et $f_0(du)$,

$$\frac{\left|\dfrac{\partial^2\varphi(du)}{\partial du_a\,\partial du_b}\right|}{\left|\dfrac{\partial^2 f_0(du)}{\partial du_a\,\partial du_b}\right|}, \tag{10}$$

lorsqu'on y remplace chaque différentielle du_c par le u_c correspondant, se change dans l'expression

$$\frac{\left|\dfrac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a\,\partial v_b}\right| \cdot \left|\dfrac{\partial x_a}{\partial u_b}\right|^2}{\left|\dfrac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a\,\partial u_b}\right|}, \tag{11}$$

laquelle peut être regardée comme une fonction des éléments x_a et $x_a^{(0)}$. De l'équation (5) résulte cette proposition : que *cette fonction n'est pas altérée, lorsqu'on y échange tous les x_a avec les $x_a^{(0)}$ correspondants.*

Nous omettrons ici, pour abréger, une représentation normale de la seconde variation de l'intégrale Θ, qui est fondée sur la supposition énoncée tout à l'heure, que les quantités x_a sont des fonctions *indépendantes entre elles* des quantités u_b, et que nous avons fait connaître dans notre Mémoire.

Nous allons maintenant supposer que le degré p est $= 2$; soit, comme dans (29), I,

$$2f(dx) = \sum_{a,b} a_{a,b}\,dx_a\,dx_b,, \quad \Delta = |a_{a,b}|.$$

Pour le type normal correspondant $\varphi(du)$ prenons les notations

$$(12) \qquad 2\varphi(du) = \sum_{a,b} p_{a,b}\, du_a\, du_b, \quad \Pi = |p_{a,b}|.$$

Désignons, de plus, par r la valeur de l'intégrale R tirée de (8), I, et par h la constante $f_0(x'^{(0)})$, de sorte que l'on ait

$$(13) \qquad r = \sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}\,(t - t_0).$$

En outre, par la supposition de $p = 2$, l'expression (10) devient égale à l'expression (11), et peut, en posant $\Delta_0 = |a_{a,b}^{(0)}|$, être représentée par la formule

$$(10^*) \qquad \frac{\Pi}{\Delta_0}.$$

Comme précédemment, la substitution $x_a = x_a^{(0)}$ dans ces expressions est indiquée par l'addition du signe ${}^{(0)}$.

Soit d'abord le nombre $n = 2$, et supposons que la forme quadratique $2f(dx)$ désigne, comme dans (29^*), I, le carré de l'élément linéaire pour une surface. Pour appliquer la propriété générale en question des différences (6), (8), (9), remarquons que, lorsque les dérivées d'une forme quadratique des deux différentielles du_1, du_2, prises par rapport à ces différentielles, s'évanouissent dès que l'on remplace du_1 par u_1, du_2 par u_2, la forme doit être égale au produit d'une quantité finie par l'expression $(u_1\, du_2 - u_2\, du_1)^2$. On a, par suite, l'équation

$$(14) \qquad 4f_0(u)f_0(du) - \left[d\sqrt{f_0(u)}\right]^2 = \Delta_0(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2.$$

De plus, le quotient

$$\frac{\varphi(du) - \left[d\sqrt{f_0(u)}\right]^2}{f_0(du) - \left[d\sqrt{f_0(u)}\right]^2}$$

doit être égal à une grandeur finie, et si l'on désigne celle-ci par $\dfrac{m^2}{2f_0(u)}$, il en résulte l'équation

$$(15) \qquad \varphi(du) - \left[d\sqrt{f_0(u)}\right]^2 = \frac{m^2}{2f_0(u)}\left\{f_0(du) - \left[d\sqrt{f_0(du)}\right]^2\right\}.$$

D'après les développements donnés plus haut, la quantité $r = \sqrt{2f_0(u)}$ mesure la longueur de la ligne la plus courte tracée sur la surface, du point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ au point (x_1, x_2). Pour l'angle Φ, que fait l'élément initial de cette ligne avec l'élément dx_1, on a les équations

$$(16)\qquad \operatorname{tang}\Phi = \frac{\sqrt{\Delta_0}\,.\,u_2}{a_{1,1}^{(0)}u_1 + a_{1,2}^{(0)}u_2},\qquad d\Phi = \frac{\sqrt{\Delta_0}\,(u_1\,du_2 - u_2\,du_1)}{2f_0(u)},$$

et, partant, l'équation (15) se change dans l'équation

$$(17)\qquad 2\varphi(du) = dr^2 + m^2\,d\Phi^2,$$

établie par Gauss dans le Mémoire cité, art. 19. Pour le quotient (10*) on a en même temps l'expression

$$(18)\qquad \frac{\Pi}{\Delta_0} = \frac{m^2}{2f_0(u)},$$

et la proposition qui a lieu pour le quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$, que sa valeur n'est pas altérée par l'échange mutuel de x_a avec $x_a^{(0)}$, se change dans le théorème que M. Christoffel a donné, relativement à l'expression $\frac{m^2}{2f_0(u)}$, dans sa *Théorie générale des triangles géodésiques* [1], art. 9.

Dans les formes quadratiques $f(dx)$ d'un nombre quelconque de différentielles, la forme quadrilinéaire $\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ va être maintenant considérée d'un nouveau point de vue. Admettons que les variables x_a parcourent la *variété* du premier ordre, déterminée par l'intégration du système (11), I, et que les différentielles dx_a et dx_g prennent les valeurs correspondant à ce mode de variation, $(t - t_0)x'_a = v_a$ et $(t - t_0)x'_g = v_g$, lesquelles sont, comme on l'a vu, fonctions des seuls systèmes $x_c^{(0)}$ et x_c. Les différentielles $\delta^1 x_b$ et δx_h ont été supposées, dans notre Mémoire, indépendantes les unes des autres; mais attendu que, dans les deux applications dont il s'agit, la généralité ne perd rien à ce que l'on remplace le signe δ^1 par le signe δ, nous introduirons cette simplification dans ce qui va suivre. Si l'on désigne par

$$\Xi(d^1u, \delta^1u, du, \delta u)$$

---

(1) *Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre* 1868. Voir *Bulletin*, t. I, p. 169.

la forme quadrilinéaire dans laquelle se change

$$\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$$

par l'introduction des variables normales u_a, on aura, en vertu des relations (3*), l'équation

$$(19)\qquad (t-t_0)^2\Psi(x', \delta x, x', \delta x) = \Xi(u, \delta u, u, \delta u).$$

La propriété fondamentale de la différence $\varphi(du) - f_0(du)$, établie ci-dessus, donne maintenant, pour l'expression du second membre, la formule

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}\sum_{b,h}\Bigg[&(t-t_0)^2\frac{d^2p_{b,h}}{dt^2} + 2(t-t_0)\frac{dp_{b,h}}{dt}\\ &-\frac{(t-t_0)^2}{2}\sum_{c,d}\frac{\mathrm{P}_{c,d}}{\Pi}\frac{dp_{c,h}}{dt}\frac{dp_{d,b}}{dt}\Bigg]\delta u_b\,\delta u_h,\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait

$$\frac{\partial\Pi}{\partial p_{a,b}} = \mathrm{P}_{a,b}.$$

Imaginons maintenant que la fonction $\Xi(u, \delta u, u, \delta u)$ soit développée suivant les puissances positives des quantités u_a, comme cela a eu lieu ci-dessus pour la différence $\varphi(du) - f_0(du)$. Pour la comparaison, on prend actuellement, au lieu de cette différence, la différence $\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)$. On reconnaît alors que, dans les deux développements, le terme d'ordre zéro et l'ensemble des termes du premier ordre s'évanouissent, et que, pour l'ensemble des termes du second ordre, on a

$$(21)\qquad [\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)]_2 = \frac{1}{12}[\Xi(u, \delta u, u, \delta u)]_2.$$

Soit $\Psi_0(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ ce que devient la forme

$$\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$$

par la substitution $x_a = x_a^{(0)}$; de (19) on tire l'équation

$$\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u) = [\Xi(u, \delta u, u, \delta u)]_2,$$

et par suite, en vertu de (21), l'équation

$$(22)\qquad [\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)]_2 = \frac{1}{12}\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u).$$

Cette équation caractérise la dépendance entre le type normal $\varphi(\delta u)$ *et la forme* $\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u)$.

Dans le cas d'une forme quadratique de deux différentielles, l'équation (32), I, exprime la relation qui existe entre la forme $\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ et la *mesure de courbure* k de Gauss. Soit k_0 ce que devient k par la substitution $x_a = x_a^{(0)}$, et supposons de plus que, en appliquant cette substitution, $d^1x_a = dx_a$ soit remplacé par u_a, $\delta^1x_a = \delta x_a$ par δu_a, et qu'ensuite on fasse usage de l'équation (14); il en résultera, pour l'expression de la mesure de courbure k_0 de la surface considérée, au point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$,

$$k_0 = \frac{-\frac{1}{2}\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u)}{4f_0(u)\{f_0(\delta u) - [\delta\sqrt{f_0(u)}]^2\}}. \tag{23}$$

Si, conformément aux notations introduites, on rapporte cette équation à une forme quadratique $f(dx)$ d'autant de différentielles que l'on voudra, elle contiendra *la représentation explicite* d'une quantité que Riemann ([1]) a introduite dans la théorie des formes quadratiques de n différentielles. *Dans le langage de Riemann, k_0 est la mesure de courbure de la variété du $n^{ième}$ ordre dont l'élément linéaire est mesuré par l'expression $\sqrt{2f(\delta x)}$, pour le système de valeurs ou le point $x_a^{(0)}$.* En vertu de l'équation (22), on obtient pour k_0 cette seconde représentation :

$$k_0 = -\frac{3}{4}\frac{[2\varphi(\delta u) - 2f_0(\delta u)]_2}{f_0(u)\{f_0(\delta u) - [\delta\sqrt{f_0(u)}]^2\}}, \tag{23*}$$

qui coïncide avec la définition en question de Riemann.

La quantité k_0 est la mesure de courbure de Gauss pour la VARIÉTÉ *du second ordre que l'on obtient en égalant à zéro $n-2$ fonctions linéaires homogènes, indépendantes entre elles, des quantités u_a, par rapport au point où toutes les quantités u_a s'annulent, le carré de l'élément linéaire y étant représenté par la forme*

$$2\varphi(\delta u) = 2f(\delta x).$$

La *variété* du second ordre en question peut aussi être caractérisée en disant qu'elle renferme en elle *deux variétés du premier ordre* qui partent du système de valeurs $u_a = 0$ ou $x_a = x_a^{(0)}$, et où l'élément initial est déterminé pour l'une par les rapports des quantités u_a et pour l'autre par les rapports des quantités δu_a. Pour re-

([1]) *Loc. cit.*, II, § 2.

présenter la mesure de courbure relative au système de valeurs x_a et à deux *variétés* du premier ordre, dont les éléments initiaux soient déterminés par les quantités dx_a et δx_a, introduisons la seconde forme quadrilinéaire

$$(24)\quad F(d^1x, \delta^1 x, dx, \delta x) = \sum_{a,b} \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_b}\frac{\partial f(\delta x)}{\partial \delta x_b}(d^1 x_a \delta^1 x_b - \delta^1 x_a d^1 x_b);$$

nous obtiendrons, pour la mesure de courbure, l'expression

$$(23^{**})\qquad \frac{-\frac{1}{2}\Psi(dx, \delta x, dx, \delta x)}{F(dx, \delta x, dx, \delta x)}.$$

Parmi les formes quadratiques de plus de deux différentielles, celles-là doivent être distinguées pour lesquelles le quotient

$$\frac{\varphi(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2}{f_0(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2}$$

est égal à une quantité finie, tandis que ce même quotient, comme nous l'avons vu, dans le cas de formes quadratiques de deux différentielles, est nécessairement égal à une quantité finie. Nous considérerons toutes les formes quadratiques qui jouissent de cette propriété comme composant ensemble *un genre de formes;* et, en désignant, comme plus haut, la quantité finie par $\frac{m^2}{2f_0(u)}$, nous caractériserons ce genre par l'équation, équivalente à (15),

$$(25)\quad \varphi(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2 = \frac{m^2}{2f_0(u)}\{f_0(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2\}.$$

Dans ce genre de formes, le quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$, représenté par ($10^\star$), prendra la forme simple

$$(26)\qquad \frac{\Pi}{\Delta_0} = \left[\frac{m^2}{2f_0(u)}\right]^{n-1}.$$

Si les variables u_a convergent vers zéro, ou, ce qui est la même chose, si $t - t_0$ tend vers zéro, on aura

$$(27)\qquad \lim \frac{m}{\sqrt{2f_0(u)}} = \lim \frac{m}{\sqrt{2h(t - t_0)}} = 1.$$

De plus, de (25) on déduit, pour le quotient des deux formes quadrilinéaires $\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ et $F(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$, en remplaçant de nouveau $d^1x_a = dx_a$ par $(t-t_0)x'_a$, et faisant $\delta^1x_b = \delta x_b$, l'équation

$$(28)\qquad \frac{\frac{1}{2}\Psi(x', \delta x, x', \delta x)}{F(x', \delta x, x', \delta x)} = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{2h\,dt^2}.$$

En vertu de l'équation (13), la différentielle $\sqrt{2h}\,dt$ coïncide avec la différentielle dr. Pour une forme quadratique de deux différentielles, le premier membre de (28) devient égal à la mesure de courbure de Gauss k, prise négativement; l'équation (28) se change alors dans l'équation

$$(29)\qquad -k = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{dr^2},$$

et l'équation (27) dans ce théorème, que, pour un r décroissant indéfiniment, la quantité m tend vers zéro, et le quotient $\frac{dm}{dr}$ vers l'unité. Ces diverses propositions ont été indiquées par Gauss, *loc. cit.*, art. 19.

Le théorème énoncé dans l'équation (28) admet maintenant la réciproque suivante : *Étant donnée une forme $f(dx)$, et le système correspondant d'équations différentielles* (II), I, *étant préalablement intégré, si le quotient des deux formes correspondantes*

$$\frac{\frac{1}{2}\Psi(x', \delta x, x', \delta x)}{F(x', \delta x, x', \delta x)}$$

est égal à une quantité $-k$, indépendante des différentielles δx_b, et si la liaison d'une fonction m avec les systèmes de quantités $x_a^{(0)}$ et x_a est déterminée par les conditions

$$\lim \frac{m}{\sqrt{h}(t-t_0)} = 1, \quad \text{pour} \quad t - t_0 = 0,$$

$$-k = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{2h\,dt^2},$$

alors le type normal $\varphi(du)$ de la forme $f(dx)$ est représenté par la formule (25). La démonstration de cette proposition repose sur ce que le système d'équations différentielles (33), I,

$$\sum_b a_{a,b}\frac{d\zeta_b}{dt} + \frac{1}{2}\sum_b \frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b}\zeta_b = 0,$$

dans les hypothèses actuelles, est intégré complétement par les n systèmes d'expressions

$$(30)\quad \zeta_b = \frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\frac{\partial x_b}{\partial u_l} + \frac{\partial\sqrt{2f_0(u)}}{\partial u_l}\left[1 - \frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\right]\frac{dx_b}{\sqrt{2h}\,dt},$$

et que de cette intégration on conclut directement la vérification de l'équation (25).

Ici l'on peut ajouter à notre Mémoire une remarque, qui se rattache à l'équation (28), déduite de l'hypothèse (25). On suppose, en ce moment, que les quantités $(t - t_0)x'_a = \nu_a$, qui dépendent des éléments $x_c^{(0)}$ et x_c, sont des *fonctions indépendantes entre elles* des éléments $x_c^{(0)}$, en sorte que les $x_c^{(0)}$, de leur côté, peuvent être exprimés au moyen des éléments x_a et $(t - t_0)x'_a = \nu_a$. Si alors le quotient

$$\frac{\frac{1}{2}\Psi(x', \delta x, x', \delta x)}{\mathrm{F}(x', \delta x, x', \delta x)}$$

est égal à la quantité $\frac{1}{m}\frac{d^2 m}{2h\,dt^2}$ ou $-k$, indépendante de δx_b, et que l'on regarde cette quantité comme une fonction des éléments x_a et $(t - t_0)x'_a = \nu_a$, alors l'équation (28) devra être *une identité*, parce que des relations entre les quantités x_a et ν_a, en vertu de l'hypothèse admise, sont impossibles. Comme, de plus, le quotient en question ne peut pas changer, lorsqu'on échange entre eux respectivement les rapports des quantités $(t - t_0)x'_a = \nu_a$ et les rapports des quantités δx_b, *ce quotient doit être identiquement égal à une fonction des seules quantités* x_a. Or, dès qu'il en est ainsi, on a aussi l'équation identique

$$(31)\qquad \frac{\frac{1}{2}\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)}{\mathrm{F}(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)} = -k,$$

et, dans l'hypothèse énoncée, on a ce théorème : *La représentation du type normal* $\varphi(du)$ *par l'équation* (25) *entraîne comme conséquence l'équation* (31), *et réciproquement.*

L'expression (23**) nous fait voir que, dans l'hypothèse énoncée, pour le genre de formes qu'elle caractérise, *la mesure de courbure de Riemann est représentée par la quantité* k, *indépendante des différentielles* δx_b, *et ne contenant que le système de valeurs* x_a.

On doit pouvoir tirer, aussi bien de la forme $\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ que de la forme $F(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$, un *invariant* de la forme $f(dx)$, en y remplaçant chaque expression

$$(d^1x_a\delta^1x_b - \delta^1x_a d^1x_b)(dx_g\delta x_h - \delta x_g dx_h)$$

par l'expression correspondante $\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{a,g}\,\partial a_{b,h}}$. De la première forme résulte l'*invariant* que nous désignerons par

$$(32)\qquad \psi;$$

de la seconde résulte le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$. Par le procédé indiqué découle donc, de l'équation (31), l'équation

$$(31^*)\qquad -\frac{1}{2}\psi = \frac{n(n-1)}{2}k,$$

par laquelle l'*invariant* k est ramené à l'invariant ψ.

Riemann répond, à la question de savoir dans quel cas une forme quadratique essentiellement positive $f(dx)$ peut être changée en une somme de carrés de différentielles exactes, que *la mesure de courbure correspondante, représentée par* (23**), *doit s'évanouir en chaque point*. Cette question, dans le cas d'une forme essentiellement positive $f(x)$, coïncide avec la question, que nous avons éclaircie à l'occasion du Mémoire I, de savoir dans quel cas $f(dx)$ peut être transformée en une forme à coefficients constants. En outre, Riemann s'occupe principalement *des formes pour lesquelles la mesure de courbure est partout constante*. D'après le témoignage des lettres à Schumacher que nous avons citées, Gauss a été aussi conduit à ces formes, ainsi que Helmholtz, comme il le déclare dans son travail : *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen* (¹). A ces formes se rapportent encore les travaux de M. Beltrami : *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (²), et : *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea* (³), où il y a des renseignements relativement aux recherches analogues de J. Bolyai et de Lobatchefsky.

(¹) *Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1868, 3. Juni.
(²) *Annali di Matematica*, serie II, t. II, fasc. III.
(³) *Giornale di Matematiche*, pubbl. per G. Battaglini, vol. VI.

Les formes de cette nature et de n différentielles dy_a peuvent se déduire d'une forme $\Gamma(dy)$ à coefficients constants et de $n+1$ différentielles dy_a, où $a=1, 2, 3,\ldots, n+1$, en éliminant la variable y_{n+1} au moyen de l'équation

$$(33) \qquad 2\Gamma(y)=\frac{1}{\alpha},$$

où α désigne une constante. Si l'on pose maintenant, pour la forme résultante

$$g(dy),$$

ce problème, que la première variation de l'intégrale $\int\sqrt{2g(dy)}$ s'évanouisse, le système d'équations différentielles correspondant (11), I, pourra s'intégrer facilement, et le type normal $\chi(dz)$, relatif à la forme $g(dy)$, aura pour expression

$$(34) \qquad \chi(dz)=\left[d\sqrt{g_0(z)}\right]^2+\frac{\sin^2\sqrt{2\alpha g_0(z)}}{2\alpha g_0(z)}\left\{g_0(dz)-\left[d\sqrt{g_0(z)}\right]^2\right\}.$$

Aussitôt donc qu'une forme $f(dx)$ pourra, par une substitution quelconque, être transformée dans la forme spéciale actuelle $g(dy)$, le type normal $\varphi(du)$ relatif à cette forme sera exprimé par une équation, qui se déduira de l'équation (25) par la substitution

$$(35) \qquad m=\frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Ainsi la forme en question $f(dx)$ appartiendra au *genre de formes* caractérisé par l'équation (25). Lorsque la valeur de α tendra vers zéro, la forme spéciale $g(dy)$ se changera en une forme à coefficients constants, et l'équation (25), par la substitution

$$(36) \qquad m=\sqrt{2f_0(u)},$$

se transformera dans l'équation (26), I, qui est caractéristique pour les formes transformables en formes à coefficients constants.

L'équation (35) entraînant avec elle l'équation

$$(37) \qquad \frac{1}{m}\frac{d^2m}{2h\,dt^2}=-\alpha,$$

toute forme $f(x)$, transformable dans la forme spéciale $g(dy)$, définie plus haut, satisfera donc, en vertu de (28), à la relation

$$(38) \qquad \frac{\frac{1}{2}\Psi(x', \delta x, x', \delta x)}{F(x', \delta x, x', \delta x)} = -\alpha.$$

On est donc en droit de dire que la méthode exposée conduit à une forme $f(dx)$, pour laquelle *la mesure de courbure de Riemann, relativement à tout système de valeurs* x_a, *est égale à une constante, savoir, à la constante* α. En outre, les développements que nous avons donnés autorisent à énoncer le théorème suivant, au moyen duquel, sans supposer l'intégration d'un système d'équations différentielles, on peut décider si une forme donnée $f(dx)$ est, ou non, une forme où la mesure de courbure de Riemann α est constante, et qui, pour $\alpha = 0$, se change dans le théorème final du Mémoire I : *L'expression du type normal* $\varphi(du)$ *d'une forme donnée* $f(dx)$ *se tire de l'équation* (25) *par la substitution* (35), *dans le cas, et seulement dans le cas où le quotient des deux formes quadrilinéaires correspondantes*

$$\frac{\frac{1}{2}\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x)}{F(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x)}$$

est égal à la constante $-\alpha$.

Jacobi, dans un Mémoire *Sur une solution particulière de l'équation différentielle de Laplace* [1], a fait remarquer que l'expression transformée du carré de l'élément linéaire dans l'espace $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ suffit seule pour obtenir la transformation de l'équation différentielle de Laplace,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0.$$

Cette pensée a été développée par M. Beltrami dans un travail *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* [2]. Une forme quadratique $f(dx)$ de n différentielles, en désignant par w une fonction des n variables x_a, a pour *covariants* les algorithmes sui-

[1] *Journal de Crelle*, t. 36, p. 113 et suiv.

[2] *Mem. dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 1869.

vants : *Le premier paramètre différentiel de la fonction* w,

$$\Delta_1(w) = \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} \frac{\partial w}{\partial x_a} \frac{\partial w}{\partial x_b};$$

l'élément d'intégrale n-uple

$$\sqrt{\Delta}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n;$$

l'intégrale n-uple

$$\int \Delta_1(w) \sqrt{\Delta}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

et le second paramètre différentiel de la fonction w,

$$\Delta_2(w) = \Delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{a,b} \frac{\partial \left(\Delta^{-\frac{1}{2}} A_{a,b} \dfrac{\partial w}{\partial x_b} \right)}{\partial x_a},$$

dont l'évanouissement constitue la condition pour que la première variation de l'intégrale précédente soit égale à zéro. Pour la forme $f(dx) = \frac{1}{2} \sum_a dx_a^2$, on a

$$\Delta_1(w) = \sum_a \left(\frac{\partial w}{\partial x_a} \right)^2, \quad \Delta_2(w) = \sum_a \frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2},$$

et, par suite, $\Delta_2(w) = 0$ est l'équation différentielle de Laplace, étendue à n variables. Les plus importantes des propriétés connues de l'équation $\sum_a \frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2} = 0$ reposent sur ce qu'il existe, pour cette équation, une intégrale, fonction de la seule quantité

$$\sqrt{2 f_0(u)} = \sqrt{\sum_a (x_a - x_a^{(0)})}.$$

Il paraît intéressant de rechercher quelles conditions doit remplir une forme $f(dx)$ pour que l'équation aux différentielles partielles corrrespondante

$$\Delta_2(w) = 0$$

ait une intégrale qui soit fonction de la seule expression correspondante $\sqrt{2 f_0(u)} = r$. La condition nécessaire et suffisante pour cela consiste en ce que l'expression

$$\Pi^{-\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial \Pi^{\frac{1}{2}}}{du_a} u_a,$$

où Π désigne, d'après (12), le déterminant relatif au type normal $\varphi(du)$, soit fonction de la seule quantité r. Cette condition étant remplie, on obtient l'expression de la fonction cherchée w au moyen de la formule

$$d \log \frac{dw}{dr} = -\sum_a \frac{\partial \log \left(\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1}\right)}{\partial u_a} u_a \, d \log r.$$

Dès que la forme $f(dx)$ appartient *au genre de formes* caractérisé par l'équation (25), l'équation précédente se simplifie à l'aide de la relation suivante, qui est une conséquence de (26),

$$\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1} = \Delta_0^{\frac{1}{2}} m^{n-1}.$$

Si, de plus, m est une fonction de r seulement, il vient

$$w = \text{const.} \int m^{-(n-1)} \, dr.$$

Cette condition est remplie par les formes pour lesquelles la mesure de courbure de Riemann a la valeur constante α, et la valeur de m est exprimée par l'équation (35). On a donc, dans le cas de ces formes, pour l'équation aux différentielles partielles $\Delta_2(w) = 0$, l'intégrale

$$W = \int \left[\frac{\sin \sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}} \right]^{-(n-1)} d\sqrt{2 f_0(du)},$$

laquelle, pour α convergeant vers zéro et pour $n = 3$, se change dans *la fonction potentielle* $\frac{-1}{\sqrt{2 f_0(u)}}$.

(*A suivre.*)