G. Darboux

Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 158-176
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__158_0>

SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE;

PAR M. G. DARBOUX (1).

J'ai présenté, en 1870, à l'Académie des Sciences, deux Notes dans lesquelles se trouve établi un théorème relatif aux solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre. Dans ce nouveau travail, je me propose de compléter les résultats que j'ai déjà indiqués et de donner un théorème précis, faisant connaître dans quelles circonstances une équation différentielle peut admettre une intégrale ou solution singulière.

Soit

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que φ soit une fonction bien déterminée, algébrique, entière et rationnelle, si l'on veut, des variables x, y, y'. La règle connue qui conduit à la solution singulière, si elle existe, est alors d'éliminer y' entre l'équation (1) et la suivante (2),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

(1) Ces recherches ont été présentées à la Société Philomathique dans la séance du 23 novembre 1872. Voir l'*Institut*, nouvelle série, 1re année; 1873, n° 6.

(2) Dans un travail présenté récemment à l'Académie de Belgique, M. Mansion a critiqué les résultats auxquels je suis arrivé, et en particulier ce géomètre croit devoir faire remarquer que la règle précédente n'est pas absolument exacte, qu'il faut remplacer l'équation (2) par les suivantes :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x, y, y')}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0, \quad \frac{\frac{\partial}{\partial x'}\varphi\left(x, y, \frac{1}{x'}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = 0.$$

Mais ces dernières règles ne s'appliquent qu'aux cas tout à fait singuliers où la fonction φ contient des expressions mal déterminées, radicaux, etc.; tout au plus si elles peuvent fournir la solution $y' = \infty$, que ne donne pas l'équation (2), et qu'on peut toujours écarter par un changement d'axes coordonnés. Les règles que rappelle M. Mansion, et qui sont données sous des formes à peu près équivalentes dans les Cours de Calcul intégral, ne trouvent donc pas leur application dans la question actuelle, et, d'ailleurs, elles n'infirmeraient pas nos raisonnements.

M. Mansion ne paraît pas avoir compris le raisonnement si simple que j'ai pré-

La proposition que j'ai énoncée à ce sujet est la suivante : *En général, il n'y a pas de solution singulière, et l'élimination de y' entre les équations* (1) *et* (2) *conduit à l'équation d'une courbe représentant, non pas l'enveloppe des solutions générales, mais le lieu de leurs points de rebroussement.* Nous allons mettre ce résultat en lumière et le compléter par les considérations suivantes.

Une équation différentielle ordinaire présente un double caractère, sur lequel on n'insiste pas, en général, quoiqu'il nous paraisse d'une grande importance. On dit souvent qu'une telle équation définit une courbe par les propriétés de sa tangente ; et, en effet, elle fait connaître la direction de la tangente en chaque point de la courbe. Mais il importe aussi de remarquer que, *si l'on considère la courbe intégrale non comme lieu de points, mais comme enveloppe de droites, l'équation différentielle définit une propriété du point de contact.* En d'autres termes, les courbes intégrales qui sont tangentes à une droite sont en nombre limité, et leurs points de contact avec cette droite sont définis par l'équation différentielle.

Soit, en effet,

$$y = ax + b \tag{3}$$

l'équation d'une ligne droite. Si elle doit être tangente à la courbe

---

senté au t. LXXI des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Je me permets donc de le reproduire ici en le précisant.

Soit $\varphi(x, y, y') = 0$ l'équation différentielle proposée. Je dis qu'en éliminant y', entre cette equation et la suivante,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,$$

on n'a pas, en général, une solution singulière. En effet, nous pouvons supposer que l'equation différentielle contienne des coefficients littéraux. Soit a un de ces coefficients. Alors on tirera des équations précédentes y et y' en fonction de x et de a,

$$y = f(x, a),$$
$$y' = f_1(x, a).$$

Cela posé, si, en général, il y avait une solution singulière, il faudrait que l'on eût

$$f_1(x, a) = \frac{\partial f(x, a)}{\partial x}.$$

Or, mettant à la place de a une fonction de x quelconque $\varpi(x)$, les valeurs de y et y' ne seront pas changées, et l'on devra avoir cette fois

$$f_1(x, a) = \frac{\partial f(x, a)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\varpi'(x),$$

résultat incompatible avec le précédent.

définie par l'équation différentielle, on aura, pour le point de contact, $y' = a$, et, en substituant cette valeur de y', dans l'équation (1), on obtiendra

$$\varphi(x, y, a) = 0, \tag{4}$$

équation en termes finis d'une courbe qui coupe la droite (3) aux points de contact cherchés.

Il suit de cette proposition que, si l'on prend les polaires réciproques de toutes les courbes satisfaisant à l'équation (1), ces polaires réciproques satisfont aussi à une équation différentielle du premier ordre. Par suite, à toute propriété des courbes intégrales, considérées comme lieux de points, correspondra, par le principe de dualité, une propriété relative à ces courbes, considérées comme enveloppes de droites. Cette symétric, introduite dans la théorie qui nous occupe, est d'un grand secours dans une foule de questions, et elle va nous permettre, en particulier, d'éclaircir la question des solutions singulières.

Cherchons d'abord les droites (3) pour lesquelles deux des points de contact définis par les équations (3) et (4) viennent se confondre. Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que la droite (3) et la courbe (4) soient tangentes, c'est-à-dire que l'on ait, pour un des points (x, y) d'intersection de la droite et de la courbe,

$$\varphi(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

En remplaçant a par y', nous avons les deux équations

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' = 0. \tag{5}$$

Éliminons y' entre ces deux équations, nous obtenons un certain lieu, défini par l'équation

$$\varpi(x, y) = 0. \tag{6}$$

Pour chaque point de ce lieu, la droite, ayant pour coefficient angulaire la valeur de y' satisfaisant aux équations (5), sera telle, que deux des points de contact des courbes intégrales avec elle seront confondus au point (x, y). On peut donner une définition simple du lieu représenté par l'équation (6).

En effet, si l'on différentie la première des équations (5), on trouve, en tenant compte de la seconde,

$$(7)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,y'' = 0;$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ n'est pas nul, en général, pour le point considéré; car il n'y a pas de raison pour que les trois équations

$$(8)\qquad \varphi = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

soient satisfaites par tous les points d'une courbe; donc on a

$$y'' = 0.$$

Ainsi *le lieu représenté par l'équation* (6) *est en général celui des points d'inflexion des courbes intégrales, et les tangentes en ce point sont les seules droites pour lesquelles deux points de contact viennent se réunir en un seul, qui est le point d'inflexion.*

Remarquons d'ailleurs que les points considérés sont, en général, des points ordinaires d'inflexion, pour lesquels y''' n'est pas nul.

Cela posé, si nous transformons, par la méthode des polaires réciproques, la proposition précédente, nous obtenons le théorème suivant :

Les points pour lesquels deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, *fournies par l'équation différentielle, deviennent égales, sont, en général, des points doubles de rebroussement de première espèce pour les courbes intégrales, et les deux valeurs égales de* $\frac{dy}{dx}$ *définissent la tangente à la courbe intégrale au point de rebroussement.*

Ainsi se trouve justifiée, sans l'emploi des séries, la conclusion à laquelle nous étions arrivé dans nos premières études. Et maintenant dans quel cas se présente la solution singulière, si elle existe? Il faut que les trois équations (8) soient vérifiées pour tous les points d'une courbe, ce qui conduit à la proposition suivante :

Pour qu'une équation différentielle admette une ou plusieurs solutions singulières, il faut que les deux lieux suivants : 1° *le lieu des points pour lesquels deux valeurs de* y' *deviennent égales,* 2° *le lieu qui, dans le cas général, contient tous les points d'in-*

flexion des courbes intégrales, coïncident ou aient des courbes partielles communes. Si ces deux lieux ne coïncident pas dans toutes leurs parties, les deux portions non communes seront, l'une le lieu des points de rebroussement (généralement de première espèce) des courbes intégrales, l'autre le lieu des points d'inflexion (généralement points ordinaires d'inflexion) des courbes intégrales.

Ce théorème peut d'ailleurs être rendu plus précis et démontré sans l'emploi des polaires réciproques. Nous allons en donner, sans faire appel aux remarques qui précèdent, une démonstration directe et élémentaire.

A cet effet, reprenons l'équation différentielle que nous supposerons toujours, pour plus de netteté, algébrique, entière et rationnelle,

$$\varphi(x, y, y') = 0. \tag{9}$$

Si elle admet une solution singulière, c'est-à-dire si les courbes qui représentent l'intégrale générale ont une enveloppe, on devra avoir, pour tous les points de cette enveloppe,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0. \tag{10}$$

D'ailleurs, en différentiant l'équation proposée, on pourra adjoindre à l'équation précédente la suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0. \tag{11}$$

Ainsi, pour qu'il y ait une solution singulière, il faut que les trois équations (9), (10), (11) soient vérifiées pour tous les points d'une courbe, ce qu'on peut exprimer de la manière suivante :

Éliminons y' d'abord entre les équations (9) et (10), nous obtenons un premier lieu géométrique représenté par l'équation

$$\mathcal{A} = 0.$$

Éliminons ensuite y' entre les équations (9) et (11), nous obtenons un second lieu géométrique représenté par l'équation

$$\mathcal{B} = 0.$$

Cela posé, il faut évidemment, pour qu'il y ait une solution singulière, que ces deux lieux aient une partie commune. Si cette condition n'est pas remplie, il n'y aura pas de solution singulière.

Supposons, au contraire, que les deux lieux aient une partie commune, représentée par l'équation

$$(12)\qquad \varpi(x, y) = 0,$$

et *satisfaisant aux conditions suivantes.* Pour chaque point de ce lieu partiel (x, y), les trois équations (9), (10), (11), considérées comme étant à une seule inconnue y', ont une ou plusieurs racines y' communes. Soient $y' = m$ une de ces racines ; alors, pour tout point du lieu (12), on peut déterminer une quantité m satisfaisant aux trois équations

$$(13)\quad \varphi(x, y, m) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial m}\varphi(x, y, m) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = 0.$$

Cela posé, pour avoir la tangente en un point du lieu (12), différentions la première de ces équations. Nous aurons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial m}\frac{dm}{dx} = 0,$$

et, par suite, comme $\dfrac{\partial \varphi}{\partial m}$ est nul,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0.$$

En comparant cette équation à la dernière des formules (13), on en déduit

$$(14)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(m - y') = 0.$$

Supposons que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ ne soit pas nul. Alors

$$m = y',$$

et, par suite, substituant cette valeur de m dans la première des équations (13),

$$\varphi(x, y, y') = 0.$$

Le lieu représenté par l'équation (12) satisfait donc à l'équation différentielle, et nous obtenons la proposition suivante :

Pour qu'il y ait une solution singulière, il faut que les trois *équations*

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

soient satisfaites en tous les points d'une courbe (A), *c'est-à-dire que, pour chaque point de cette courbe, elles donnent une même valeur de y'. Si cette condition est satisfaite, il y aura toujours une solution singulière représentée par la courbe* (A), *à moins que, en chaque point de cette courbe, la valeur de y', qui satisfait à ces équations, ne satisfasse identiquement à la suivante,*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

qui, jointe aux trois précédentes, donne aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Pour être précis autant que possible, dans une théorie aussi difficile, j'ajouterai que le théorème précédent laisse de côté : 1° les intégrales singulières correspondant à $y' = \infty$, et qui se composent de droites parallèles à l'axe des y : on les obtiendra soit par une recherche directe, soit en changeant la direction des axes, soit en changeant y en x, et x en y ; 2° les intégrales singulières, lieux des points de rebroussement des courbes intégrales générales, et admettant pour tangente, en chaque point M de rebroussement d'une courbe intégrale (C), la tangente à cette courbe en son point de rebroussement. En effet, si cette singularité se présente, on a $y'' = \infty$, et, par suite, des deux équations

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0,$$

on peut bien conclure l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' = 0 ;$$

mais, le dernier terme se présentant sous la forme $0 \times \infty$, on n'a plus le droit d'écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0,$$

comme nous l'avons fait dans nos raisonnements.

En résumé, si l'on veut acquérir le plus de notions possible sur les courbes intégrales en employant seulement l'équation différentielle, on pourra procéder de la manière suivante (¹) :

1° On cherchera le lieu ($\mathcal{A}$), résultat de l'élimination de y' entre les deux équations

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0.$$

Soit $\mathcal{A} = 0$ l'équation de ce lieu.

2° On cherchera le lieu ($\mathcal{B}$), résultant de l'élimination de y entre les deux équations

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0.$$

Soit $\mathcal{B} = 0$ l'équation de ce lieu.

Si les deux courbes ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$) n'ont aucune partie commune, il n'y a pas de solution singulière; la première contient les points de rebroussement, généralement de première espèce, des courbes intégrales; la seconde les points d'inflexion.

Si les deux courbes ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$) ont une ou plusieurs courbes partielles communes (C), (C'),..., soit

$$\mathcal{A} = \mathrm{A}\mathrm{C}^{\alpha}\mathrm{C}'^{\alpha'}\mathrm{C}''^{\alpha''}\ldots,$$
$$\mathcal{B} = \mathrm{B}\mathrm{C}^{\beta}\mathrm{C}'^{\beta'}\mathrm{C}''^{\beta''}\ldots;$$

alors les lieux (A) et (B) contiendront encore respectivement les points d'inflexion et de rebroussement des courbes intégrales; mais les équations

$$\mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{C}' = 0, \ldots$$

ne donneront pas encore nécessairement des solutions singulières.

(¹) Pour la recherche des solutions singulières, on pourrait se borner à l'énoncé que voici :

Pour qu'il y ait une solution singulière, il faut qu'en tous les points d'une courbe les trois équations

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0$$

soient vérifiées par une même valeur de y'. Cette condition est suffisante, si la valeur de y' n'annule pas $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ou $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Sinon il faudra vérifier directement si la courbe donnée par la règle précédente satisfait à l'équation différentielle.

En effet : 1° pour tous les points d'une courbe (C), les deux équations en y'

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0,$$

et aussi

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

sont bien satisfaites par une même valeur de y'. Mais la valeur de y', racine commune aux deux premières, peut fort bien ne pas être la racine commune aux deux autres, et la condition pour que $C = 0$ donne une solution singulière, c'est que les trois équations en y',

$$(15) \qquad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

soient satisfaites, pour tous les points de la courbe (C), *par une même valeur de y'*.

2° En admettant même que les trois équations (15) soient satisfaites par une même valeur de y', il faudra encore s'assurer que cette valeur de y' ne vérifie pas identiquement l'une des équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

et, si ces équations ne sont pas vérifiées, on sera sûr que (C) est une solution singulière.

Si, au contraire, ces équations sont vérifiées, le procédé le plus direct pour résoudre la question consiste à examiner si la courbe (C) satisfait à l'équation différentielle proposée.

Ajoutons encore, pour compléter ce résumé, qu'il est indispensable de tenir compte des deux cas d'exception signalés à la fin de l'article précédent.

On voit qu'il existe encore bien des points à examiner Certaines intégrales particulières, en nombre limité, se distingueront des autres, soit par un point de rebroussement, soit par un point d'inflexion d'espèce plus compliquée. D'autres, en nombre limité, pourront n'avoir ni point d'inflexion ni point de rebroussement ; mais ce sera l'objet d'un travail plus étendu que ce simple résumé.

En terminant, nous devons nous demander quelle a été l'origine de l'erreur qui a duré si longtemps dans la théorie des solutions singulières. Cette erreur tient à une confusion, que presque tous les géomètres ont laissé s'établir dans toute cette question.

Comme on forme les équations différentielles par l'élimination de constantes entre une équation finie et ses dérivées, les auteurs ont supposé, à tort selon nous, qu'étant donnée, par exemple, une équation différentielle du premier ordre, cette équation admet toujours une intégrale du premier ordre, définie par la formule

$$(9) \qquad f(x, y, c) = 0,$$

où f est une fonction qui, dans toute l'étendue du plan, possède les propriétés qu'on reconnaît généralement aux fonctions étudiées dans l'Analyse. Cette fonction f était pour eux plus ou moins difficile à trouver; mais dans leur esprit elle existait toujours. Or c'est là précisément le point contestable, et les recherches nouvelles sur la théorie des fonctions nous paraissent devoir changer cette manière de voir [1].

Il est bien clair que, si une équation différentielle est intégrable par une équation de la forme (9), il y a, en général, une solution singulière, qui est l'enveloppe de toutes les courbes représentées par l'équation (9). Ainsi, si l'équation différentielle est intégrable dans le sens qu'on donne à ce mot en Analyse, c'est-à-dire en égalant à zéro une fonction f finie et continue de x, y, c, la solution singulière est le cas général, et alors sa recherche dépend, à proprement parler, de la théorie des enveloppes.

Mais comme rien ne démontre qu'une équation différentielle admette, en général, une intégrale de la forme (9), on voit qu'on devra séparer cette théorie en deux parties bien distinctes :

L'une, du ressort du Calcul différentiel, et dans laquelle on examine les équations différentielles formées par l'élimination des constantes;

L'autre, appartenant au Calcul intégral, et où, ne supposant rien sur l'origine de l'équation différentielle, on est obligé de se tenir dans les hypothèses générales et de ne pas supposer l'existence

[1] Les seules recherches rigoureuses sur l'existence des intégrales, celles de Cauchy et de MM. Briot et Bouquet, établissent bien qu'il y a une infinité d'intégrales générales; mais on remarquera qu'elles ne démontrent pas que ces intégrales satisfassent à une équation de la forme (9), où f possède les propriétés nécessaires pour qu'on ait le droit d'appliquer les principes de la théorie des enveloppes.

d'une intégrale de la forme (9). C'est à ce dernier cas que se rapportent nos remarques.

La distinction que nous proposons en dernier lieu nous est d'ailleurs commune avec plusieurs géomètres; elle a été proposée aussi par M. Clebsch, dans une Note des *Nachrichten* de Gœttingue.

APPLICATIONS.

Premier exemple, emprunté au *Cours du Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. II, p. 383 :

$$y - 2xy' - y'^2 = 0.$$

L'intégrale générale est

$$(3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0.$$

On a ici

$$\mathcal{A} = y + x^2, \quad \mathcal{B} = y.$$

Il n'y a pas de solution singulière. La courbe

$$y + x^2 = 0$$

contient les points de rebroussement. Le lieu $y = 0$ correspond à une solution particulière, l'axe des x. Pour cette solution, tous les points de l'axe des x sont bien des points d'inflexion. Cet exemple est pleinement d'accord avec la théorie générale [1].

Deuxième exemple, emprunté au même Ouvrage, t. II, p. 397 :

$$y'^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)y' - (1 + x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

On a

$$\mathcal{A} = (1 + x^2)(16y + x^4 + 4x^2),$$
$$\mathcal{B} = x(16y + 3x^2)(16y + x^4 + 4x^2).$$

---

[1] Quand nous disons que la courbe ($\mathcal{B}$) ou une portion de cette courbe contient les points d'inflexion des courbes intégrales, nous n'entendons pas par là évidemment que toutes les courbes intégrales passant en un point M de ce lieu y aient un point d'inflexion : c'est seulement la courbe ou les courbes correspondant aux valeurs de y', racines communes des équations

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' = 0,$$

qui ont au point M une inflexion. C'est ainsi que, si une courbe (C) appartient aux lieux ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$), elle peut être à la fois lieu de points d'inflexion pour certaines intégrales et de points de rebroussement pour d'autres, sans donner une solution singulière.

Le facteur commun à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B}$ satisfait à toutes les conditions que nous avons posées. Il y a donc ici une solution singulière donnée par l'équation

$$16y + x^4 + 4x^2 = 0.$$

L'équation

$$x(16y + 3x^2) = 0$$

représente bien le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales, comme on s'en assurera à l'inspection de l'équation intégrale

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \mathrm{H}.$$

Troisième exemple, emprunté au *Compendium der hoheren Analysis* de M. Schlömilch, 3e éd., t. I, p. 509 :

$$y^2 y'^2 - \frac{y^3 y'}{x} + a^2 = 0.$$

Nous trouvons

$$\mathcal{A} = y^2(y^4 - 4a^2x^2),$$
$$\mathcal{B} = x(y^4 - 4a^2x^2).$$

L'équation

$$y^4 - 4a^2x^2 = 0$$

donne bien une solution singulière.

Quatrième exemple, emprunté à l'Ouvrage de Boole : *A Treatise on differential Equations,* 1872, p. 169 :

$$y'^2 - 2x\sqrt{y}\,y' + 4y\sqrt{y} = 0,$$

ou

$$y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0.$$

On a ici

$$\mathcal{A} = y^2(x^4 - 16y),$$
$$\mathcal{B} = y^3(x^4 - 16y),$$

et l'on reconnaît facilement que le facteur $x^4 - 16y$ satisfait aux conditions que nous avons posées : il donne, par conséquent, une solution singulière ; mais prenons le second et faisons

$$y = 0.$$

On déduit de cette équation

$$y' = 0.$$

L'hypothèse $y = 0$ satisfait donc à l'équation différentielle. Cette solution est d'ailleurs comprise dans l'intégrale générale

$$y = c^2(x - c)^2.$$

Cinquième exemple. — Équation d'Euler :

$$y'^2 X - Y = 0,$$

où

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$
$$Y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4.$$

On a ici

$$\mathcal{A} = XY,$$
$$\mathcal{B} = Y(XY'^2 - YX'^2).$$

Nous ne trouvons ici que la solution singulière

$$Y = 0,$$

et nous oublions, comme cela a été prévu dans la théorie, la solution singulière

$$X = 0,$$

qui correspond à une droite ou à des droites parallèles à l'axe des y. On sait que l'intégrale générale se compose de courbes du quatrième ordre, à deux points doubles, tangentes aux huit droites données par l'équation

$$XY = 0.$$

Sixième exemple, emprunté au *Cours de Calcul infinitésimal* de M. Hoüel, *seconde Partie*, p. 62 :

$$0 = (xy' - y)^2 - 2xy(1 + y'^2).$$

Cette équation nous offre, comme on va le voir, une confirmation très-remarquable de notre proposition. On a

$$\mathcal{A} = xy(y - x)^2, \quad \mathcal{B} = 2xy(y - x)^2.$$

On verra facilement que la solution singulière est donnée par l'équation

$$xy = 0.$$

Quant au facteur $(y - x)^2$, il doit être éliminé; car les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2(xy' - y)y' - 2y(1 + y'^2) = 2x(-y' - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2(y - xy') - 2x(1 + y'^2) = -2xy'(y' + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2(xy' - y)x - 4xyy' = -2xy(1 + y') = 0,$$

$$\varphi = -x^2(y' + 1)^2 = 0$$

sont vérifiées pour la même valeur de $y' = -1$. Il y a donc doute d'après la théorie; mais, la valeur $y' = -1$ n'étant pas la dérivée de $y = x$, le facteur $(x-y)^2$ doit être rejeté.

Septième exemple. — Équation de Clairaut :

$$F(y - xy', y') = 0.$$

En posant $y - xy' = u$, on a *identiquement*

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial u} x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Il y aura donc une solution singulière qu'on obtiendra en éliminant y' entre les deux équations

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} - x\frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Huitième exemple (*Calcul intégral* de M. l'abbé Moigno, p. 461) :

$$2xy(1 + y'^2) - (xy' + y)^2 = 0.$$

On a

$$\mathcal{A} = xy(x-y)^2,$$
$$\mathcal{B} = xy(x^2 + y^2)(x-y)^2.$$

La discussion du facteur $x - y$ se fait comme dans le sixième exemple, mais la conclusion est autre. On a ici

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x(1 + y'^2) - 2(xy' + y) = 2xy'(y' - 1),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y(1 + y'^2) - 2y'(xy' + y) = 2x(1 - y'),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2x^2(y' - 1),$$

$$\varphi = x^2(1 - y')^2.$$

L'hypothèse $y' = 1$ annule tous les premiers membres ; mais, comme elle est la conséquence de l'équation

$$x - y = 0,$$

le facteur $(x - y)$ vérifie ici l'équation différentielle quand on l'égale à zéro. Cette conclusion est différente de celle de l'exemple sixième relative à un cas douteux du même genre.

Neuvième exemple. — Équation différentielle des cercles doublement tangents à l'ellipse et ayant leur centre sur l'axe des x :

$$\varphi(y') = x^2 + y^2 - 2x(x + yy') + \frac{1}{m^2}(x + yy')^2 + K = 0.$$

On obtient

$$\mathcal{A} = y^2[y^2 + x^2(1 - m^2) + K],$$
$$\mathcal{B} = \varphi(\sqrt{-1})\,\varphi(-\sqrt{-1})[y^2 + x^2(1 - m^2) + K].$$

La solution singulière est donnée par l'équation

$$x^2(1 - m^2) + y^2 + K = 0.$$

Dixième exemple. — Équation différentielle des cercles représentés par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + K = 0,$$

où α et β sont liés par la relation

$$m\alpha^2 + n\beta^2 = 1.$$

Cette équation est

$$\begin{aligned} &m(y^2 - 2xyy' - x^2 + K)^2 \\ &\qquad + n(x^2y' - 2xy - y^2y' + Ky')^2 - (y - xy')^2 = \varphi(x, y, y'). \end{aligned}$$

On a ici

$$\mathcal{A} = (x^2 + y^2 - K)^2[mn(x^2 + y^2 + K)^2 - mx^2 - ny^2].$$

Le second facteur correspond à l'enveloppe des cercles. Examinons le premier. En substituant dans chacun des deux premiers carrés qui figurent dans φ, soit la valeur de y^2, soit celle de x^2 tirée de l'équation

$$x^2 + y^2 - K = 0,$$

on a

$$4my^2(y - xy')^2 + 4nx^2(xy' - y)^2 - (y - xy')^2 = 0 :$$

donc la valeur de y' correspondant à ce facteur est

$$y' = \frac{y}{x};$$

cela suffit pour montrer qu'il ne donne pas une solution singulière; car on devrait avoir, pour tous les points du cercle,

$$x^2 + y^2 = K,$$
$$x + yy' = 0.$$

Ce résultat est conforme à notre proposition; car la valeur de y', annulant les trois carrés de φ, vérifie les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0, \quad \varphi = 0,$$

et, par conséquent, la théorie générale ne nous indique pas le facteur $x^2 + y^2 - K$ comme devant nécessairement donner une solution singulière. Ce facteur figurerait d'ailleurs dans $\mathfrak{B}$, que nous n'avons pas pris la peine de calculer, et qui sera de la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = \varphi(x, y, \sqrt{-1})\, \varphi(x, y, -\sqrt{-1})\,(x^2 + y^2 - K)^{\alpha} \\ \times [mn(x^2 + y^2 + K)^2 - mx^2 - ny^2]. \end{aligned}$$

Remarque. — Les exemples précédents, choisis sans parti pris ou formés directement, sont bien d'accord, on le voit, avec la proposition générale que nous avons développée, et cela suffit au but que nous nous proposions. Cependant on pourrait demander d'expliquer dans chacun d'eux la présence des différents facteurs qui figurent dans les expressions que nous avons désignées par $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. La remarque générale suivante, déjà faite, dans un cas particulier, par M. Catalan [1], explique d'une manière assez nette comment, même dans le cas où il y a une solution singulière, le résultat $\mathfrak{A}$ de l'élimination de y' entre les deux équations

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$$

doit contenir *généralement* des facteurs étrangers à cette solution.

Supposons, en effet, que l'équation différentielle proposée admette pour intégrales des courbes algébriques représentées par l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0, \tag{16}$$

et, par conséquent, plaçons-nous dans le cas où il doit y avoir, en général, une enveloppe. On peut obtenir cette courbe, soit en éliminant λ entre l'équation précédente et la suivante,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \tag{17}$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, 1870, p. 50.

soit en éliminant y' entre l'équation différentielle des courbes (16),

$$(18)\qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

et l'équation

$$(19)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0.$$

Soit $\mathcal{A}$ le résultat de l'élimination de y' entre ces deux dernières équations, et soit A le résultat de l'élimination de λ entre les deux équations (16) et (17). Il est clair que $\mathcal{A}$ doit contenir le facteur A; mais je dis qu'il contient en outre, en général, un autre facteur C, qui ne correspond pas à une solution singulière, et dont on peut donner la définition géométrique.

En effet, en éliminant y' entre les deux équations (18), (19), on obtient le lieu des points pour lesquels deux valeurs de y' sont égales. Cette condition est évidemment remplie pour les points de contact de chaque courbe avec son enveloppe; mais elle l'est aussi évidemment pour les points où deux courbes distinctes viennent se toucher, sans être, en tout leur parcours, à une distance infiniment petite l'une de l'autre. Considérons, par exemple, les cercles doublement tangents à une ellipse et ayant leur centre sur son grand axe (*neuvième exemple*). Par tout point du plan, non situé sur l'ellipse, il passera deux de ces cercles, se coupant sous un angle fini, en général; mais, si le point est pris sur le grand axe même de la conique, les deux cercles seront tangents l'un à l'autre; les deux valeurs de y', fournies en ce point par l'équation différentielle, devront donc être égales, et le facteur y devra, par conséquent, figurer dans $\mathcal{A}$.

Ainsi, même quand il y a une intégrale générale algébrique, l'expression que nous avons désignée par $\mathcal{A}$ doit contenir, en même temps que le facteur correspondant à la solution singulière, un autre facteur B, qui, égalé à zéro, donne le lieu des points où les courbes intégrales se touchent. J'ajoute que ce facteur B, égalé à zéro, vérifiera les équations

$$(21)\qquad \varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' = 0.$$

En effet, par la manière même dont on l'a formé, il doit vérifier les deux premières. De plus, pour l'une des courbes intégrales passant au point (x, y), on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''=0,$$

et, si nous supposons que y'' ne soit pas infini, ce qui est le cas général, nous voyons que l'équation deviendra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0.$$

Ainsi, pour le facteur B, les trois équations (21) seront vérifiées par une même valeur de y', et, comme ces facteurs ne donnent pas de solution singulière, on devra avoir, d'après notre théorie,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0;$$

par conséquent, la méthode précédente, appliquée à ces facteurs, exigera une vérification directe qui conduira à les rejeter. C'est ce qui a lieu dans les deux derniers exemples donnés.

J'ajoute une remarque essentielle, relative au facteur B : *ils figureront, élevés au carré, dans* $\mathcal{A}$. En effet, pour former $\mathcal{A}$, on peut procéder de la manière suivante.

Soit

$$f(x, y, \lambda)=0$$

l'équation des intégrales générales, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs de λ satisfaisant pour un point donné à cette équation. Soient $y'_1, \ldots, y'_m$ les coefficients angulaires des tangentes aux courbes passant en ce point. On a

$$y'_i=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y, \lambda_i)}{\dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y, \lambda_i)};$$

par suite,

$$y'_i-y'_j=\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y, \lambda_j)}{\dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y, \lambda_j)}-\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y, \lambda_i)}{\dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y, \lambda_i)},$$

ce qu'on peut écrire, en mettant en évidence le facteur $\lambda_i-\lambda_j$,

$$y'_i-y'_j=(\lambda_i-\lambda_j)\,\psi(x, y, \lambda_i, \lambda_j),$$

ψ étant une *fonction symétrique* et rationnelle de λ_i, λ_j : donc le discriminant $\mathcal{A}$ de l'équation en y', qui est le produit des quantités $(y'_i - y'_j)^2$, sera égal à

$$\Pi(\lambda_i - \lambda_j)^2 \times \Pi\,\psi^2(\lambda_i, \lambda_j),$$

c'est-à-dire au discriminant A de l'équation en λ, multiplié par un carré parfait

$$\mathcal{A} = AC^2.$$

Ce résultat se vérifie facilement sur les courbes représentées par l'équation

$$M + N\lambda + P\lambda^2 = 0,$$

où M, N, P sont des fonctions de x, y, et qui est un peu plus générale que celle de M. Catalan. On trouve

$$\mathcal{A} = (N^2 - 4MP) \begin{vmatrix} M & N & P \\ \dfrac{\partial M}{\partial x} & \dfrac{\partial N}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial M}{\partial y} & \dfrac{\partial N}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix}^2.$$