BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. LIPSCHITZ

Extrait de six mémoires publiés dans le Journal de mathématiques de Borchardt

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 212-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__212_1>

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

EXTRAIT
DE SIX MÉMOIRES PUBLIÉS DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES DE BORCHARDT;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

(Analyse rédigée par l'Auteur.)

III.

Recherches sur un problème de calcul des variations, qui renferme le problème de la Mécanique (1).

Ce travail a pour objet le problème qui consiste à faire évanouir la première variation de l'intégrale

$$(1)\qquad \Theta = \int_{t_0}^{t} [f(x') + \mathrm{U}]\, dt,$$

(1) *Journal de Borchardt*, t. 74, p. 116-141.

où $f(dx)$ désigne, comme précédemment, une forme du $p^{\text{ième}}$ degré des n différentielles dx_a; de plus, on a fait $\frac{dx_a}{dt} = x'_a$, et U représente une fonction des n variables x_a, ne contenant pas la variable t explicitement. En prenant la variation, on laisse invariables le système $x_a^{(0)}$ et le système x_a, qui correspondent respectivement au commencement et à la fin de l'intégration. D'après les lois effectives de la Mécanique, la *force vive* d'un point matériel supposé en mouvement se mesure en multipliant *la masse du point* par *le carré de l'élément linéaire* de sa trajectoire, et divisant par *le carré de l'élément du temps*. Si maintenant les coordonnées des points matériels d'un système en mouvement sont désignées par x_a, et le temps par t; si la demi-somme des forces vives de tous les points matériels est exprimée par la forme quadratique $f(x')$ des n quotients différentiels x'_a, et que U représente *la fonction des forces* donnée pour le système matériel, le problème de la variation de l'intégrale Θ reviendra à formuler le problème de Mécanique posé par Hamilton, dans le Mémoire cité plus haut. S'il existe, entre les coordonnées des points matériels, des équations de condition ne contenant pas le temps t, ces équations se joindront, comme équations de condition, au problème de calcul des variations dont il s'agit.

Mais on peut adapter les conceptions de la Mécanique à l'hypothèse généralisée sur la nature de l'espace, dont on a parlé dans le Mémoire I. Si l'élément linéaire, à partir d'un point dans l'espace, est mesuré par la $p^{\text{ième}}$ racine d'une forme essentiellement positive, du $p^{\text{ième}}$ degré, des différentielles des coordonnées, *la force vive* d'un point matériel mobile pourra se mesurer, en multipliant *la masse du point* par *la $p^{\text{ième}}$ puissance de l'élément linéaire correspondant*, et divisant par *la $p^{\text{ième}}$ puissance de l'élément du temps*. Supposons que les coordonnées des points matériels d'un système mobile soient les quantités x_a; que la $p^{\text{ième}}$ partie de la somme des forces vives de tous les points matériels, mesurées de la manière indiquée, soit la forme $f(x')$, du $p^{\text{ième}}$ degré, des quotients différentiels x'_a; que U soit une fonction des seules quantités x_a, correspondant à la fonction des forces : alors *le problème de la variation de l'intégrale Θ formera une généralisation du problème de la Mécanique, correspondant à l'hypothèse en question*. En même temps, il est établi que, si l'on donne, entre les coordonnées des points matériels du système mobile, des équations de condition ne contenant pas le temps, ces équations devront être jointes, comme équations de condition, au problème de variations considéré. Alors on peut exprimer les coordonnées des points matériels au moyen d'un système convenable de variables indépendantes, et introduire ces expressions dans les valeurs de la somme des forces vives, mesurées de la manière indiquée, et de la fonction des forces. De là résulte un nouveau problème de variations, dont l'intégrale se tire également de l'intégrale Θ, en considérant les quantités x_a comme représentant les nouvelles variables indépendantes, et prenant les fonctions $f(x')$ et U comme provenant de l'introduction des nouvelles variables indépendantes, définies précédemment.

Le problème de la variation de l'intégrale Θ donne lieu au système d'équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{\partial U}{\partial x_a} = 0;$$

supposons l'intégration effectuée de manière que, pour $t = t_0$, les conditions $x_a = x_a^{(0)}$, $x'_a = x_a'^{(0)}$ soient remplies. On aura généralement l'intégrale

$$(3) \qquad (p-1)f(x') - U = H;$$

la forme $f(x')$ ne pouvant prendre que des valeurs positives, la constante H devra être choisie de telle façon que la quantité $U + H$ soit positive pour $x_a = x_a^{(0)}$, cette quantité restant toujours positive dans tout l'intervalle $t - t_0$ supposé positif. Si la fonction des forces U est nulle, l'intégrale Θ se changera dans l'intégrale (9), I, le système (2) dans le système (11), I, l'équation (3) dans l'équation (13), I. En même temps, la signification mécanique indiquée du problème de calcul des variations conduit aux deux propositions suivantes, qui expriment des propriétés fondamentales d'un système matériel mobile : *Si, dans un système matériel mobile, la fonction des forces est égale à zéro, et qu'entre les coordonnées des points matériels il n'existe aucune équation de condition, chaque point décrira une ligne de plus courte distance conformément au choix fait pour l'élément linéaire de l'espace. Si, dans un sys-*

tème matériel mobile, la fonction des forces est égale à zéro, et qu'entre les coordonnées des points matériels il existe des équations de condition, indépendantes du temps, et si, pour un système initial quelconque de coordonnées et pour un temps déterminé, les premiers quotients différentiels des variables, pris par rapport au temps, sont tous nuls, la valeur de chacune des coordonnées restera invariable pendant tout le temps, et, par suite, le système demeurera en repos. Comme on peut construire un système de Mécanique sur les principes généralisés en question, il est absolument inutile de tenter de démontrer, sans hypothèse, les principes effectifs de la Mécanique, de même qu'il est inutile, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, de tenter de démontrer, sans hypothèse, l'axiome XI d'Euclide.

Les Mémoires I et II ont montré que le système d'équations différentielles (11), I, est d'une importance capitale pour la théorie de la forme $f(dx)$. On voit maintenant que le système (2) peut être regardé comme correspondant de la même manière à une forme $F(dx)$, qui, lorsque la fonction U n'est pas égale à une constante, est définie par l'équation

$$(4) \qquad F(dx) = \left[\frac{p(U+H)}{p-1}\right]^{p-1} pf(dx),$$

et lorsque U est égale à une constante ou à zéro, par l'équation

$$(5) \qquad F(dx) = pf(dx).$$

Si, à l'aide de cette forme, on écrit l'intégrale

$$(6) \qquad R = \int_{t_0}^{t} [F(x')]^{\frac{1}{p}} dt,$$

et que l'on propose de faire évanouir la première variation de cette intégrale, les valeurs initiales $x_a^{(0)}$ et les valeurs finales x_a restant invariables, il en résulte le système d'équations différentielles

$$(7) \qquad \frac{d\dfrac{\partial [F(x')]^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial [F(x')]^{\frac{1}{p}}}{\partial x_a} = 0,$$

qui est étroitement lié au système (2).

La quantité t n'entre que pour la forme dans l'intégrale R, ainsi que dans le système d'équations différentielles (7), en sorte que, de ces n équations, $n-1$ ont pour conséquence la n^{ieme}. D'après cela, l'intégration est complétement déterminée par la condition que, comme dans (14), I, on ait, pour $x_{c_1} = x_{c_1}^{(0)}$, les équations

$$x_a = x_a^{(0)}, \quad \frac{dx_a}{dx_{c_1}} = \frac{x_a'^{(0)}}{x_{c_1}'^{(0)}}. \tag{8}$$

On a déjà remarqué ci-dessus que, si U est égal à une constante, la variable t peut être éliminée du système (2), de manière qu'il en résulte un système équivalent au système (7). Il s'agissait alors du système (11), I, et du problème de la variation de l'intégrale (8), I. Si U n'est pas égal à une constante, l'élimination de la variable t dans le système (2) s'effectuera au moyen de l'intégrale (3), et produira pareillement, dans ce cas, le système (7). De l'intégration prescrite des équations (7) résulte donc l'intégration prescrite des équations (2), dès que la dépendance entre la variable t et x_{c_1} sera exprimée, pour U constant, par l'équation

$$t - t_0 = \int_{x_{c_1}^{(0)}}^{x_{c_1}} \sqrt[p]{\frac{f\left(\dfrac{dx}{dx_{c_1}}\right)}{f_0(x'^{(0)})}}\, dx_{c_1}, \tag{9}$$

et, pour U non constant, par l'équation

$$t - t_0 = \int_{x_{c_1}^{(0)}}^{x_{c_1}} \sqrt[p]{\frac{(p-1)f\left(\dfrac{dx}{dx_{c_1}}\right)}{\mathrm{U}+\mathrm{H}}}\, dx_{c_1}. \tag{9*}$$

Si la valeur de l'intégrale R est considérée comme fonction des systèmes $x_a^{(0)}$ et x_a, la différentielle exacte de R a alors pour expression

$$\delta\mathrm{R} = \sum_a \frac{\partial[\mathrm{F}(x')]^{\frac{1}{p}}}{\partial x_a'}\,\delta x_a - \sum_a \frac{\partial[\mathrm{F}_0(x'^{(0)})]^{\frac{1}{p}}}{\partial x_a'^{(0)}}\,\delta x_a^{(0)}. \tag{10}$$

En supposant les équations (2) intégrées, R aura, pour U non constant, la forme

$$\mathrm{R} = \int_{t_0}^{t} pf(x')\,dt, \tag{6*}$$

et, pour U constant, la forme

$$(6^{**})\qquad R = [pf_0(x'^{(0)})]^{\frac{1}{p}}(t - t_0).$$

Dans les hypothèses effectivement admises de la Mécanique, on a $p = 2$, et l'expression (6) de R se change dans *l'intégrale de la moindre action;* le problème de la variation de l'intégrale R, dans *le principe de la moindre action;* l'équation (3), dans *l'intégrale de la force vive;* l'expression ($6^{\star}$) de R, dans celle que Hamilton appelle d'abord *la force vive accumulée,* et ensuite, en tant que fonction des $x_a^{(0)}$ et des x_a, *la fonction caractéristique du problème mécanique;* la forme $F(dx)$, pour U non constant, dans la forme

$$(4^{\star})\qquad F(dx) = 2(U + H)2.f(dx),$$

et, pour U constant, dans la forme

$$(5^{\star})\qquad F(dx) = 2f(dx).$$

D'après cela, à tout problème de Mécanique de l'espèce actuelle correspond une forme quadratique de n différentielles, et l'étude du problème de Mécanique peut être employée pour éclaircir la théorie de la forme correspondante.

Pour une valeur quelconque de p, l'intégration du système (7) donne une expression des valeurs de x_a, au moyen du système des valeurs initiales $x_b^{(0)}$ de la quantité R et des $n - 1$ rapports $\frac{x_c'^{(0)}}{x_{c_1}'^{(0)}}$. Supposons les n valeurs initiales constantes, et considérons les x_a comme des fonctions des n autres quantités indiquées, ou plutôt comme des fonctions de R et de $n - 1$ fonctions, indépendantes entre elles, $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$, des $n - 1$ rapports $\frac{x_c'^{(0)}}{x_{c_1}'^{(0)}}$. Les expressions

$$(11)\qquad u_b = \frac{R}{[F_0(x'^{(0)})]^{\frac{1}{p}}}\,x_b'^{(0)},$$

formées, d'après la règle de la formule ($18^{\star}$), I, au moyen de R et de ces $n - 1$ rapports, seront les *variables normales* de la forme $F(dx)$, définie par (4) et (5), et l'équation (10), multipliée par le facteur R^{p-1}, jouera, relativement à la forme $F(dx)$, le rôle que jouait l'équation (5), II, pour la forme $pf(dx)$. Relativement au nouveau système de variables, on a le théorème suivant : *Si l'on transforme la forme* $F(dx)$ *par l'introduction de nouvelles variables* R, Φ_2, $\Phi_3, \ldots, \Phi_n$, *il en résulte, comme propriété fondamentale de la nouvelle forme, que, dans cette forme, le coefficient de* dR^p *est égal à l'unité, et les coefficients des* $n-1$ *combinaisons* $dR^{p-1}\,d\Phi_2, \ldots, dR^{p-1}\,d\Phi_n$ *égaux à zéro.* Cette propriété correspond à la propriété, que nous avons signalée, de la différence (6), II, lorsqu'on y remet $pf(dx)$ à la place de $F(dx)$. Les variables Φ_2, $\Phi_3, \ldots, \Phi_n$ étant, en vertu de leur définition, de telle nature qu'on intègre le système (7) en les égalant à des constantes, le théorème suivant constitue une réciproque de celui que nous venons d'énoncer : *Si la forme* $F(dx)$ *se change, par l'introduction d'un système de nouvelles variables,* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *en une forme* $g(dy)$, *dans laquelle le coefficient de* dy_1^p *soit égal à l'unité, et les coefficients des* $n-1$ *combinaisons* $dy_1^{p-1}\,dy_2, \ldots, dy_1^{p-1}\,dy_n$ *égaux à zéro, le système d'équations différentielles* (7) *s'intégrera en égalant à des constantes les* $n-1$ *fonctions* $y_2, \ldots, y_n$. Dans la même hypothèse, tant que $\frac{dy_1}{dt}$ sera positif, la quantité R sera exprimée par l'équation

$$R = y_1 - y_1^{(0)}. \tag{12}$$

L'équation (10) conduit à poser ce problème : *Déterminer une fonction* P *des* n *variables* x_a, *dont la différentielle exacte satisfasse à la condition*

$$\partial P = \sum_a \frac{\partial [F(\xi)]^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}\,\partial x_a. \tag{13}$$

Comme les n quantités ξ_a, qui entrent dans $F(dx)$ à la place des différentielles dx_a, n'y figurent que par leurs $n-1$ rapports, l'élimination de ces rapports *conduit à une équation aux différentielles partielles de la fonction* P. La fonction R est une *intégrale complète* de la condition (13), renfermant les n constantes arbitraires $x_a^{(0)}$. *Si l'on a une intégrale complète quelconque* P *de la condition* (13), *avec les constantes arbitraires* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *et que les fonctions*

$$P, \quad \Phi_2 = \frac{\partial P}{\partial c_2}, \ldots, \quad \Phi_n = \frac{\partial P}{\partial c_n} \tag{13*}$$

soient indépendantes entre elles, l'introduction de ces fonctions comme nouvelles variables dans la forme $F(dx)$ *donnera une forme douée des mêmes propriétés que celle qui provenait tout à l'heure de l'introduction du système*

$$R, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \ldots, \quad \Phi_n.$$

Ainsi le système (7) est intégré par les $n-1$ équations

$$\frac{\partial P}{\partial c_r} = \left(\frac{\partial P}{\partial c_r}\right)_0, \tag{14}$$

et l'on a, tant que $\frac{dP}{dt}$ est positif, l'équation

$$R = P - P^{(0)}. \tag{15}$$

Dans l'intégration dont il s'agit, les dérivées partielles $\frac{\partial x_a}{\partial P}$ se changent dans les dérivées ordinaires $\frac{dx_a}{dP}$, et l'on a, pour les rapports $\frac{dx_c}{dx_{c_1}}$, les $n-1$ équations

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial x_c}}{\dfrac{\partial P}{\partial x_{c_1}}} = \frac{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_c}}{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_{c_1}}}. \tag{16}$$

Par conséquent, *l'intégration complète du système* (7) *mentionnée plus haut* se déduit de l'intégrale P, en posant les $n-1$ équations

$$\frac{\left(\dfrac{\partial P}{\partial x_c}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial P}{\partial x_{c_1}}\right)_0} = \frac{\dfrac{\partial F_0(x'^{(0)})}{\partial x'^{(0)}_c}}{\dfrac{\partial F_0(x'^{(0)})}{\partial x^{(0)}_{c_1}}}, \tag{17}$$

et éliminant les $n-1$ quantités $c_2, \ldots, c_n$. Par l'intégration complète de (7) on obtient, d'après ce qui précède, une intégration complète de (2), et l'on déduit ainsi, à l'exemple de Jacobi, d'une intégrale complète de la condition (13), une intégrale complète du système (2).

Dans le cas *où les coefficients de la forme* $F(dx)$ *sont constants,* on intégrera le système d'équations différentielles (7), en égalant les rapports $\frac{dx_c}{dx_{c_1}}$ à leurs valeurs initiales constantes, et l'on en tire les équations

$$\frac{x_c - x_c^{(0)}}{x_{c_1} - x_{c_1}^{(0)}} = \frac{x_c'^{(0)}}{x_{c_1}'^{(0)}}.$$

Le même résultat, si l'on connaît une intégrale P de la condition (13), correspondant à la forme $f(dx)$, peut s'exprimer par ce théorème que *les équations*

$$(18) \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right)_0,$$

dont $n-1$ *entraînent la* $n^{ième}$ *comme conséquence, forment un système de* $n-1$ *intégrales du système* (7), *équivalent au système des* $n-1$ *intégrales* (14).

La forme des équations (16) et (17) conduit à la considération générale suivante. Soit R une fonction des variables x_a; prenons un système fixe de valeurs x_a, satisfaisant à l'équation $R = A =$ const., mais arbitraire; imaginons, au contraire, que les quantités dx_a soient variables, et proposons-nous de faire évanouir la dérivée complète de l'expression $[F(dx)]^{\frac{1}{p}}$, par rapport aux quantités dx_a, tandis que l'expression $dR = \sum_a \frac{\partial R}{\partial x_a} dx_a$ prendra une valeur positive : les rapports des quantités dx_a seront déterminés par les équations

$$\frac{\frac{\partial R}{\partial x_c}}{\frac{\partial R}{\partial x_{c_1}}} = \frac{\frac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_c}}{\frac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_{c_1}}},$$

et le signe de la seule quantité dx_{c_1}, resté jusqu'ici arbitraire, sera défini par la condition $dR > 0$. Alors les quantités dx_a désigneront l'élément initial d'une *variété du premier ordre*, qui part du système de valeurs x_a *appartenant à la variété du* $(n-1)^{ième}$ *ordre* $R = A$, et l'on pourra employer cette expression, que *la variété du premier ordre* dx_a *est normale à la variété du* $(n-1)^{ième}$ *ordre* $R = A$ *par rapport à la forme* $F(dx)$. Dans le cas présent où $F(dx)$ est défini par les équations (4) et (5), on pourra généralement remplacer, dans cet énoncé, la forme $F(dx)$, abstraction faite d'un facteur fini, par la forme $pf(dx)$. Si l'expression $[pf(dx)]^{\frac{1}{p}}$ se change dans l'élément linéaire de l'espace pour la Géométrie euclidienne, l'expression que nous venons d'introduire coïncidera avec l'expression généralement en usage. Entre les quantités δx_a d'une *variété* du premier ordre, *contenue dans la variété du* $(n-1)^{ième}$ *ordre* $R = A$, et les quantités dx_a d'une *variété* du premier ordre, *normale à* $R = A$ *par rapport à la forme* $F(dx)$, on a l'équation

$$\sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a} \delta x_a = 0.$$

C'est seulement dans le cas où la forme $F(dx)$ est *quadratique* que cette équation n'est pas altérée par l'échange des dx_a avec les δx_a, et alors on peut dire que *l'une des variétés du premier ordre est normale ou orthogonale,* par rapport à la forme $F(dx)$, *à l'autre variété du premier ordre.*

Toute intégration, suivant les règles données, du système d'équations différentielles (7) fournit, pour les variables x_a, une variété du premier ordre, qui part du système $x_a^{(0)}$, et dont l'élément initial est déterminé par les $n-1$ rapports $\frac{x_c'^{(0)}}{x_{c_1}'^{(0)}}$. Dans les intégrations qui se déduisent, comme nous l'avons fait voir, d'une intégrale complète P de la condition (13), on peut, à l'aide de la notion que nous venons d'introduire, *réunir les données initiales en groupes,* et établir *la première* des propositions suivantes : *Si l'on prend toutes celles des variétés du premier ordre, intégrant le système* (7), *dans lesquelles les systèmes initiaux* $x_a^{(0)}$ *satisfont à la variété du* $(n-1)^{ième}$ *ordre définie par l'équation*

$$P^{(0)} = A = \text{const.},$$

et dont les éléments initiaux sont normaux à cette variété $P^{(0)} = A$ *par rapport à la forme* $pf(dx)$, *et si l'on prolonge toutes ces variétés du premier ordre, dans le sens dans lequel croît la fonction* P, *assez loin pour que, pour le système final résultant* x_a, *la fonction* P *prenne la valeur constante* B, *les éléments finaux des variétés correspondantes seront normaux, par* *rapport à la forme $pf(dx)$, à la variété du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre*

$$P = B,$$

et l'intégrale R *correspondante a pour valeur constante* $B - A$. Cette proposition fait voir comment la fonction R se distingue entre les intégrales complètes de la condition (13), par ceci que **la** *variété* du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $R = A$, pour une valeur de la constante A tendant vers zéro, se concentre dans *le système unique de valeurs* $x_a = x_a^{(0)}$.

Au point de vue le plus général, *on peut déterminer une intégrale* P *de la condition* (13), *telle que l'équation* $P^{(0)} = A$ *détermine pour les variables* $x_a^{(0)}$ *la même variété du* $(n-1)^{\text{ième}}$ *ordre qu'une équation donnée* $R^{(0)} = A$, *et formuler pour cette intégrale* P *l'énoncé correspondant.* Cette *deuxième proposition* est encore un résultat essentiel de notre étude.

Si le nombre $p = 2$, et qu'on transforme alors la forme $F(dx)$, représentée par ($4^\star$) et ($5^\star$), au moyen d'un système de nouvelles variables ($13^\star$), déduit d'une intégrale complète P de la condition (13), la nouvelle forme sera, d'après ce qui précède, la somme de dP^2 et d'une autre forme ne contenant que les différentielles $d\Phi_r$, les lettres $r, s, \ldots$ désignant les nombres $2, 3, \ldots, n$. Si l'on représente la forme $f(dx)$ comme dans (29), I, on a, pour U non constant,

$$(19) \qquad 2(U+H)\sum_{a,b} a_{a,b}\,dx_a\,dx_b = dP^2 + \sum_{r,s} m_{r,s}\,d\Phi_r\,d\Phi_s,$$

tandis que, pour U constant, il faut faire, dans cette équation,

$$(20) \qquad 2(U+H) = 1.$$

Pour dénoter les éléments adjoints de la nouvelle forme, soit

$$(21) \qquad |m_{r,s}| = M, \qquad \frac{\partial M}{\partial m_{r,s}} = M_{r,s};$$

de plus, au lieu de l'expression $\frac{A_{a,b}}{\Delta}$, relative à la forme $2f(dx)$, on a pour la forme $F(dx)$ l'expression $\frac{A_{a,b}}{2(U+H)\Delta}$. D'après cela, en passant des formes quadratiques actuelles aux *formes adjointes* correspondantes, on conclut de (19) les *relations de transformation*

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\frac{A_{ab}}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial x_a}\frac{\partial P}{\partial x_b}=1,\\ &\frac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\frac{A_{ab}}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial x_a}\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_b}=0,\\ &\frac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_a}\frac{\partial \Phi_s}{\partial x_b}=\frac{M_{r,s}}{M}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces relations est *l'équation aux différentielles partielles d'Hamilton pour la fonction* P, laquelle se tire, dans les circonstances actuelles, de la relation (13). Le premier membre de cette équation coïncide avec *le premier paramètre différentiel de la fonction* P, *par rapport à la forme* F (dx). Pour $n=2$, on reconnaît dans l'équation (19) l'expression donnée par Gauss pour le carré de l'élément linéaire sur une surface, expression que nous avons mise en évidence dans (17), II. En outre, les deux premières équations (22) se changent dans les deux équations aux différentielles partielles, données par Gauss (*loc. cit.*, art. 22) pour la longueur r et l'angle Φ définis plus haut. La signification d'une intégrale P de la première équation aux différentielles partielles est indiquée dans cette proposition de l'art. 16 du même Mémoire : *Si, sur une surface courbe, on trace une ligne quelconque, de chacun des points de laquelle partent, à angle droit et du même côté, une infinité de lignes de plus courte distance, de longueurs égales entre elles, la courbe qui joint leurs extrémités coupe toutes ces lignes à angle droit.*

Comme on le conclut de la *deuxième proposition* établie plus haut, le théorème de Gauss que nous venons de rappeler peut se changer en un théorème général de la Mécanique usuelle, dans lequel, au lieu de la longueur des lignes de plus courte distance, entrera la valeur R, qui est égale à *l'intégrale de la moindre action;* mais ce théorème subsiste encore, lorsqu'on prend, pour la mesure de la force vive d'un point matériel, l'expression plus générale développée ci-dessus, et qu'en même temps, à la place de la conception hamiltonienne du problème de Mécanique, on introduit le problème de la variation de l'intégrale représentée par Θ; car alors le théorème coïncide avec notre *deuxième proposition elle-même.*

(*A suivre.*)