

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

HERMITE

Sur une équation transcendante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4
(1873), p. 61-64

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__61_0

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE;

PAR M. HERMITE.

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle de la formule suivante :

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l},$$

les quantités a, b, \dots, l étant toutes réelles, et les coefficients A, B, \dots, L réels et positifs; je dis en premier lieu que l'équation

$$\log \alpha \frac{1+x}{1-x} - f(x) = 0,$$

où α est une constante positive, possède $n+1$ racines réelles, n désignant le nombre des quantités a, b, \dots, l , comprises entre -1 et $+1$. Soit, en effet, pour un instant,

$$F(x) = \log \alpha \frac{1+x}{1-x} - f(x),$$

et désignons par g et h deux termes consécutifs de la série

$$a, b, c, \dots, l,$$

en supposant les termes rangés par ordre croissant de grandeur, de sorte que la fonction rationnelle $f(x)$ soit finie et continue lorsque la variable est comprise entre les limites g et h .

Cela étant, la fonction $\log \alpha \frac{1+x}{1-x}$, et, par suite, $F(x)$ sera elle-même réelle et continue entre ces limites, si on les suppose inférieures en valeur absolue à l'unité; or, ayant pour ε infiniment petit et positif

$$F(g + \varepsilon) = -\frac{G}{\varepsilon}, \quad F(h - \varepsilon) = +\frac{H}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire deux résultats de signes contraires, nous en concluons

pour l'équation proposée l'existence d'une racine réelle comprise entre g et h . J'ajoute qu'il n'y en a qu'une; car, en prenant la dérivée de $F(x)$, on obtient cette expression positive pour toutes les valeurs de x entre -1 et $+1$, savoir

$$F'(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \dots + \frac{L}{(x-l)^2},$$

de sorte que $F(x)$ va continuellement en croissant depuis $-\frac{G}{\varepsilon}$ jusqu'à $+\frac{H}{\varepsilon}$, et ne s'annule par conséquent qu'une seule fois. En désignant donc par n le nombre des quantités a, b, \dots, l , qui sont comprises entre -1 et $+1$, nous prouvons ainsi que l'équation proposée possède $n-1$ racines réelles; mais ayant

$$F(-1 + \varepsilon) = \log \alpha \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon},$$

quantité infiniment grande et négative, on voit de plus qu'il existe encore une racine comprise entre -1 et le terme le plus voisin de la suite a, b, \dots, l ; enfin une dernière racine se trouve pareillement entre le terme le plus voisin de l'unité et l'unité, attendu que l'expression

$$F(1 - \varepsilon) = \log \alpha \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

est infiniment grande et positive.

En second lieu, je dis que l'équation proposée ne peut admettre aucune racine imaginaire dont le module soit inférieur à l'unité. Soit, en effet, $x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$ une telle racine; on trouvera d'abord

$$f(\alpha + \beta \sqrt{-1}) = \frac{A(\alpha - a)}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B(\alpha - b)}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \dots \\ - \beta \sqrt{-1} \left[\frac{A}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \dots \right].$$

Pour calculer ensuite la valeur, que l'on sait être unique et entièrement déterminée, de l'expression $\log \frac{1+x}{1-x}$, lorsque, conformément à la supposition faite, le module de $x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$ est infé-

rieur à l'unité, j'emploierai la relation, aisée à vérifier,

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z}.$$

Or on en déduit, en faisant, pour un moment,

$$\frac{1}{\rho} = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z} &= \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\rho(\alpha - \beta\sqrt{-1}) - z} \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{(\rho\alpha - z)dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2} + \rho\beta\sqrt{-1} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

et l'on voit ainsi que le coefficient de $\beta\sqrt{-1}$ est la quantité essentiellement positive

$$\rho \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2}.$$

Ayant donc, pour ce même coefficient dans l'expression de

$$-f(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

une quantité qui est également positive, à savoir

$$\frac{A}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \dots,$$

nous reconnaissons que la partie imaginaire de $F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne peut jamais s'évanouir, de sorte que notre équation n'admet, comme nous voulions l'établir, que des racines réelles.

La relation précédemment employée, à savoir

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z},$$

donne lieu à cette remarque que, en posant

$$\frac{1+x}{1-x} = a,$$

d'où

$$\log a = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{a-1}{a+1} - z},$$

celle des valeurs en nombre infini du logarithme qui se trouve ainsi représentée par l'intégrale définie est l'intégrale $\int_1^a \frac{dz}{z}$, en supposant que la variable z décrive la ligne droite joignant les deux points qui ont pour affixes 1 et a .