BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

C.-W. BORCHARDT

Sur l'ellipsoïde de volume minimum parmi ceux dans lesquels un certain nombre de sections centrales ont des aires données

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 301-312

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__301_1>

MÉLANGES.

SUR L'ELLIPSOÏDE DE VOLUME MINIMUM PARMI CEUX DANS LESQUELS UN CERTAIN NOMBRE DE SECTIONS CENTRALES ONT DES AIRES DONNÉES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT.

(Extrait du *Compte rendu mensuel de l'Académie royale des Sciences de Berlin*, Juin 1872.)

Après avoir résolu, par une méthode algébrique spéciale, le problème, posé par Lagrange, de la détermination du tétraèdre de volume maximum dont les quatre faces ont des aires données, et l'extension de ce problème à un nombre quelconque de dimensions, et avoir publié cette solution dans les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1866, p. 123, je trouvai, dans l'année 1867, que la question algébrique à laquelle conduit le problème de Lagrange est susceptible d'une autre interprétation géométrique, relative à l'ellipsoïde, savoir, la détermination de l'ellipsoïde de moindre volume, étant données les aires de quatre sections centrales faites par des plans donnés de position. Ce résultat et la solution de deux problèmes sur l'ellipsoïde qui se rattachent à celui-là ont fait l'objet d'une Communication, adressée par moi à l'Académie, le 5 décembre 1867 (*voir* les *Comptes rendus mensuels* de 1867, p. 779), sans que j'aie, toutefois, publié les résultats obtenus. Ceux-ci étant restés, de cette manière, inconnus en dehors des limites de l'Aca-

---

([1]) Nous nous permettrons, au nom des abonnés bibliophiles de ce *Journal*, de supplier l'éditeur de ne plus mutiler les marges des livraisons, comme on l'a fait pour la dernière que nous avons reçue. (*Note de la Rédaction.*)

démie, il me semble à propos de rattacher à la Communication que vient de faire mon ami M. Kronecker ([1]), dans laquelle il a également appliqué la solution d'un même problème algébrique, d'une part, au problème du tétraèdre de Lagrange, et, d'autre part, à un problème de maximum et de minimum concernant l'ellipsoïde, une exposition de mes recherches de l'année 1868.

Il ressortira de là que les deux problèmes de maximum et de minimum concernant l'ellipsoïde, dont M. Kronecker s'occupe en ce moment et que j'ai étudiés il y a cinq ans, malgré la diversité des formes géométriques dont ils sont revêtus, ne sont pas cependant essentiellement distincts au point de vue algébrique, puisque, dans les deux problèmes, on donne au déterminant d'une forme quadratique ternaire sa valeur maximum, tandis que dans l'un la forme elle-même, dans l'autre la forme adjointe prend des valeurs données pour des systèmes connus de valeurs des variables, et que, de plus, comme on sait, le déterminant de la forme adjointe est le carré du déterminant de la forme primitive.

« Soient donnés p plans, passant tous par le centre connu d'un ellipsoïde variable d'ailleurs. Supposons que l'on donne la surface de l'ellipse suivant laquelle chacun de ces plans centraux coupe l'ellipsoïde. Il s'agit alors, parmi tous les ellipsoïdes dans lesquels ces p sections centrales ont des aires données, de déterminer celui dont le volume est minimum. »

Le nombre p, qui reste encore indéterminé, doit, bien entendu, être moindre que 6, puisque la détermination d'un ellipsoïde de centre donné ne dépend plus que de six éléments.

En coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3, dont l'origine est au centre de l'ellipsoïde, soit $f = 1$ l'équation de cette surface, où

$$f = \sum a_{gh} x_g x_h; \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

supposons, de plus, les plans des p sections centrales déterminés par les équations

$$u_i = \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

de sorte que les $3p$ quantités α sont données, et que les six coeffi-

([1]) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 256.

cients a_{gh} de la forme ternaire f sont les variables du problème. Alors le problème proposé, au point de vue algébrique, s'énoncera comme il suit :

« Rendre maximum le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

les p déterminants

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1^i \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2^i \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3^i \\ \alpha_1^i & \alpha_2^i & \alpha_3^i & 0 \end{vmatrix}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

ayant les valeurs négatives données $-K_i$. »

Soient A_{gh} les quantités adjointes des a_{gh}, de sorte que

$$A_{gh} = \frac{\partial A}{\partial a_{gh}};$$

le développement de Δ_i donnera

$$-\Delta_i = \sum_{g, h} A_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i,$$

de telle sorte que, en désignant par $F(x_1, x_2, x_3)$ la forme adjointe de f, K_i représentera la valeur de F pour les valeurs $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i$ des variables. On a alors, par différentiation,

$$\left.\begin{aligned} 2\,dA &= \sum a_{gh}\, dA_{gh}, \\ -d\Delta_i &= \sum \alpha_g^i \alpha_h^i\, dA_{gh}. \end{aligned}\right\} \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

Or, les différentielles des p expressions Δ_i s'annulant, puisque chacun des Δ_i doit être égal à une constante donnée $-K_i$, et la différentielle de A s'annulant aussi, puisque A doit être un maximum, on obtient, d'après les règles du Calcul différentiel, les équations du problème, en égalant à zéro la somme

$$2\,dA + \lambda_1\, d\Delta_1 + \ldots + \lambda_p\, d\Delta_p,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ étant des multiplicateurs provisoirement inconnus. En ayant égard aux équations précédentes, il vient

$$0 = \sum (a_{gh} - \lambda_1 \alpha_g^1 \alpha_h^1 - \ldots - \lambda_p \alpha_g^p \alpha_h^p)\, dA_{gh}, \quad (g, h = 1, 2, 3)$$

d'où l'on tire, pour la détermination des coefficients a_{gh},

$$a_{gh} = \lambda_1 \alpha_g^1 \alpha_h^1 + \lambda_2 \alpha_g^2 \alpha_h^2 + \ldots + \lambda_p \alpha_g^p \alpha_h^p.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation de l'ellipsoïde, donnent au premier membre f la forme

$$f = \sum \lambda_i (\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3)^2 = \sum \lambda_i u_i^2. \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

Le premier membre de l'équation $f = 1$ de l'ellipsoïde peut donc s'exprimer linéairement au moyen des carrés des premiers membres des équations des p plans sécants.

Tandis que, d'une part, p ne peut être plus grand que 5, puisque déjà, pour $p = 6$, l'ellipsoïde serait complétement déterminé, on voit, par le résultat que l'on vient d'obtenir, que p ne peut être moindre que 3; car, pour $p = 1$ et $p = 2$, l'équation $f = 1$ ne peut représenter une surface fermée, et le problème de maximum et de minimum proposé perdrait alors sa signification; p ne peut donc avoir que les valeurs 3, 4, 5.

Désignons par (ikl) le déterminant formé avec les coefficients des trois fonctions linéaires u_i, u_k, u_l, et par $(kl)_1$, $(kl)_2$, $(kl)_3$ ses déterminants mineurs pris par rapport à α_1^i, α_2^i, α_3^i; alors des valeurs

$$(1) \qquad a_{gh} = \sum_i \alpha_g^i \alpha_h^i \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

résultent, pour les quantités adjointes A_{gh}, les équations

$$(2) \qquad A_{gh} = \sum (ik)_g (ik)_h \lambda_i \lambda_k,$$

la sommation devant s'étendre aux $\frac{p(p-1)}{2}$ combinaisons i, k des indices $1, \ldots, p$.

Pour le déterminant A des éléments a_{gh}, on a, d'après un théorème connu sur les déterminants, l'expression combinatoire

$$(3) \qquad A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l,$$

la sommation devant s'étendre à toutes les $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$ combinaisons i, k, l des indices $1, \ldots, p$. De plus, les p expressions

$$(4) \qquad K_i = -\Delta_i = \sum A_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

se transforment, à l'aide de l'équation (1), en

$$K_i = \sum_{g,h} \frac{\partial A}{\partial a_{gh}} \frac{\partial a_{gh}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial A}{\partial \lambda_i},$$

et il en résulte les p équations

$$(4)^\star \qquad K_i = \sum_{k,l} (ikl)^2 \lambda_k \lambda_l,$$

où la sommation doit s'étendre aux $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ combinaisons k, l des indices $1, \ldots, p$, à l'exclusion de i.

Par là, le problème de maximum et de minimum est ramené au problème algébrique de déduire des p équations $(4)^\star$ les p multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, c'est-à-dire d'exprimer ces multiplicateurs au moyen des p constantes données K_i et des $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$ déterminants (ikl), ces derniers devenant de simples grandeurs angulaires, si l'on assujettit les quantités α_1^i, α_2^i, α_3^i, pour chaque valeur de i, à la condition que la somme de leurs carrés soit $= 1$, ce qui les délivre du facteur arbitraire qu'elles renfermeraient sans cela. Par la substitution des multiplicateurs obtenus $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans la fonction

$$(5) \qquad f = \sum \lambda_i u_i^2 = \sum \lambda_i (\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3)^2, \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

l'équation $f = 1$ de l'ellipsoïde cherché se trouve enfin déterminée.

Il y a maintenant trois cas, $p = 3, 4, 5$, à considérer séparément.

Cas de trois sections centrales. — Dans ce cas, en vertu de l'équation (5), les trois plans $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ des sections centrales données forment un système de plans conjugués de l'ellipsoïde. Les équations $(4)^*$ donnent les produits deux à deux $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_2$ des multiplicateurs λ_1, λ_2, λ_3, et la résolution des équations $(4)^*$ n'offre aucune difficulté.

Cas de quatre sections centrales. — Dans ce cas, la détermination des quatre multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ et de la valeur maximum A d'après (3) et $(4)^*$ conduit aux équations

$$A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\left(\frac{m_1^2}{\lambda_1} + \frac{m_2^2}{\lambda_2} + \frac{m_3^2}{\lambda_3} + \frac{m_4^2}{\lambda_4}\right),$$

$$K_1 = \quad \lambda_2\lambda_3\lambda_4\left(\qquad \frac{m_2^2}{\lambda_2} + \frac{m_3^2}{\lambda_3} + \frac{m_4^2}{\lambda_4}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

dans lesquelles

$$m_1 = (234), \quad m_2 = -(134), \quad m_3 = (124), \quad m_4 = -(123).$$

Si l'on y pose

$$\frac{\lambda_i}{m_i^2} = v_i, \quad \frac{K_i m_i^2}{(m_1 m_2 m_3 m_4)^2} = c_i, \quad \frac{A}{(m_1 m_2 m_3 m_4)^2} = R_1,$$

on retombe précisément sur les équations (6), (8), § 2, de mon Mémoire publié dans le Recueil de cette Académie pour l'année 1866, p. 132 et 133, lorsqu'on y fait $n = 4$, c'est-à-dire sur le système même des équations établies dans ce Mémoire, équations d'où dépend le problème de Lagrange sur le tétraèdre, et qui conduisent finalement à une équation du quatrième degré.

« Les deux problèmes de la détermination d'*un ellipsoïde de volume minimum, étant données les aires de quatre sections centrales,* et de la détermination d'*un tétraèdre de volume maximum, étant données les aires de ses quatre faces,* sont donc algébriquement identiques, et la solution de l'un est donnée en même temps par la solution de l'autre. »

La solution du problème du tétraèdre ayant été complétement développée dans le Mémoire cité de l'année 1866, je n'ai qu'à renvoyer à cette solution pour le problème actuel.

Cas de cinq sections centrales. — Le système des équations à résoudre (3) et (4)* a, dans ce cas, la forme suivante :

$$(3) \qquad A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l, \qquad (i, k, l = 1, \ldots, 5)$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \dfrac{\partial A}{\partial \lambda_1} = \left\{ \begin{array}{l} (123)^2\lambda_2\lambda_3 + (124)^2\lambda_2\lambda_4 + (125)^2\lambda_2\lambda_5 \\ + (145)^2\lambda_4\lambda_5 + (135)^2\lambda_3\lambda_5 + (134)^2\lambda_3\lambda_4, \end{array} \right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Malgré leur apparente complication, la résolution de ces équations n'exige, comme nous le montrerons plus loin, que deux extractions de racines carrées consécutives.

Le premier membre f de l'équation de l'ellipsoïde ordonné suivant les coordonnées x_1, x_2, x_3, est

$$f = \sum a_{gh} x_g x_h, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

où les coefficients ont pour valeurs, d'après l'équation (1),

$$(1) \qquad a_{gh} = \sum_i \lambda_i \alpha_g^i \alpha_h^i. \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

Entre ces six équations (pour g, $h = 1, 2, 3$), on peut éliminer les cinq multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$. Le résultat de l'élimination étant représenté par

$$(6) \qquad \sum B_{gh} a_{gh} = 0, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

l'équation (6) devra devenir identique, si l'on y substitue aux a_{gh} leurs expressions (1). Les B_{gh} doivent donc satisfaire aux cinq équations

$$(7) \qquad \sum B_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i = 0, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

pour $i = 1, \ldots, 5$. Or ces équations définissent les quantités adjointes des coefficients b_{gh} de la forme ternaire

$$(8) \qquad \varphi = \sum b_{gh} x_g x_h, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

qui, étant égalée à zéro, détermine le cône du second degré tangent aux cinq plans $u_i = 0$; car, pour que le cône $\varphi = 0$ touche les cinq plans $u_i = 0$, il faut que les cinq équations

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \alpha_1^i \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \alpha_2^i \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \alpha_3^i \\ \alpha_1^i & \alpha_2^i & \alpha_3^i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

soient satisfaites pour $i = 1, \ldots, 5$, lesquelles équations, développées suivant les quantités B_{gh} adjointes des b_{gh}, donnent les équations (7). *Les coefficients* B_{gh} *dans les équations* (6) *ne sont donc autre chose que les quantités adjointes des coefficients* b_{gh} *de la forme ternaire* $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, *qui, égalée à zéro, détermine le cône tangent aux cinq sections centrales* $u_i = 0$.

En multipliant l'équation (6) par A, et remplaçant les produits Aa_{gh} par leurs expressions au moyen des quantités adjointes A_{gh}, il vient

$$(6)^\star \quad B_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + \ldots + 2B_{23}(A_{12}A_{13} - A_{11}A_{22}) + \ldots = 0.$$

Entre les six quantités A_{gh} il existe déjà les cinq équations

$$(4) \qquad K_i = \sum_{g,h} \alpha_g^i \alpha_h^i A_{gh},$$

qui définissent les cinq quantités K_i comme fonctions linéaires des A_{gh}. En introduisant arbitrairement une sixième fonction linéaire homogène

$$(9) \qquad U = \sum_{g,h} q_{gh} A_{gh};$$

puis, en exprimant, par la résolution de ces équations, les A_{gh} en fonctions linéaires homogènes de $K_1, \ldots, K_5$, U et portant ces valeurs dans $(6)^\star$, cette équation se changera en une équation du second degré en U. La résolution de cette dernière donnera pour U une fonction linéaire homogène des quantités K_i, augmentée de la racine carrée $\sqrt{R}$ d'une fonction quadratique homogène des K_i; par conséquent, les quantités A_{gh} et leur déterminant A^2, ainsi que les produits Aa_{gh}, $A\lambda_i$, peuvent s'exprimer en fonctions entières de $K_1, \ldots, K_5$ et de $\sqrt{R}$; d'où l'on voit que, pour obtenir A, on a besoin d'une seconde extraction de racine carrée. Ce qui précède peut donc se résumer ainsi :

« La forme ternaire $f(x_1, x_2, x_3)$, qui compose le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde, étant multipliée par son déterminant A, peut s'exprimer au moyen d'un seul radical carré $\sqrt{R}$. Il en est de même du carré du déterminant A. L'expression de f elle-même exige deux extractions consécutives de racines carrées. »

Le développement du calcul qui donne la solution des cinq équations (4)*, et dont on peut apercevoir sans aucune difficulté la marche générale, conduit à des résultats intéressants.

Le radical $\sqrt{R}$, qui se présente dans la résolution de l'équation quadratique, est, comme il est aisé de s'en convaincre, indépendant du choix des coefficients q_{gh} de l'équation (9). Ces coefficients n'entrent que dans la fonction linéaire des K_i, qu'il faut ajouter à $\sqrt{R}$ pour obtenir U; mais, comme cette fonction linéaire des K_i, que je désignerai par U_0, peut elle-même se mettre aussi sous la forme d'une fonction linéaire des A_{gh}, il existe une nouvelle fonction linéaire homogène,

$$T = U - U_0$$

des A_{gh}, indépendante du choix des coefficients q_{gh}, et dont le carré $= R$; en d'autres termes, *les coefficients* q_{gh} *peuvent être particularisés de telle manière que la fonction* U, *définie au moyen de ces coefficients par l'équation* (9), *et que j'appellerai* T, *dépende d'une équation quadratique pure.*

Cette particularisation, abstraction faite d'un facteur arbitraire affectant la fonction T tout entière, ne peut s'effectuer que d'*une seule* manière, savoir, comme il est facile de le démontrer, en posant $q_{gh} = b_{gh}$, et, par suite,

$$T = \sum_{g,h} b_{gh} A_{gh}, \tag{10}$$

les b_{gh} étant toujours les coefficients, définis par (8), de l'équation $\varphi = 0$ du cône tangent.

On peut donner, comme on sait, à l'équation $\varphi = 0$ du cône tangent, différentes formes, dont une particulièrement simple, que l'on obtient en rapportant le cône à trois quelconques des cinq plans $u_i = 0$. La fonction φ, exprimée au moyen de u_1, u_2, u_3, par exemple, prend la forme

$$\varphi = \mu_1^2 u_1^2 + \mu_2^2 u_2^2 + \mu_3^2 u_3^2 - 2\mu_2\mu_3 u_2 u_3 - 2\mu_1\mu_3 u_1 u_3 - 2\mu_1\mu_2 u_1 u_2,$$

où

$$\mu_1 = (234)(235)(145), \quad \mu_2 = (134)(135)(245), \quad \mu_3 = (124)(125)(345).$$

Si l'on conçoit que le facteur arbitraire, contenu dans les coefficients b_{gh} de l'équation (8), soit déterminé de cette manière, alors le déterminant B de cette équation deviendra $= -4\varpi^2$, ϖ désignant le produit de tous les dix déterminants (ikl). Si, de plus, on substitue dans (10) les valeurs des coefficients b_{gh}, et que l'on exprime les A_{gh}, en vertu de l'équation (2), au moyen des λ, on obtiendra pour T l'expression symétrique

$$(10)^* \qquad T = [(123)(124)(125)(345)]^2 \lambda_1\lambda_2 + \ldots,$$

la somme devant s'étendre aux dix termes formés d'après une loi semblable.

La définition de la fonction T, *donnée dans l'équation* (10), *peut se ramener à la formation du déterminant de la forme quadratique ternaire* $f - \rho\varphi$, ou, ce qui revient au même, *à la formation de l'équation du troisième degré en* ρ, *dont dépend la détermination du système d'axes conjugués, commun à l'ellipsoïde* $f = 1$ *et au cône tangent* $\varphi = 0$. En effet, si l'on développe ce déterminant suivant les puissances de ρ, A sera le terme indépendant de ρ; $-$T sera, d'après l'équation (10), le coefficient de ρ; zéro sera, d'après l'équation (6), celui de ρ^2; enfin $-B = 4\varpi^2$ sera le coefficient de ρ^3. L'équation du troisième degré en question sera donc

$$(11) \qquad 0 = A - T\rho + 4\varpi^2\rho^3.$$

Les valeurs des A_{gh}, tirées des six équations (4), (10), étant substituées dans $(6)^*$ et dans le déterminant A^2 des A_{gh}, donnent les équations

$$(12) \qquad T^2 = R = R_{11}K_1^2 + \ldots + R_{12}K_1K_2 + \ldots,$$

$$(13) \qquad 2.3^3\varpi^2 A^2 = -\frac{1}{2}S + R^{\frac{3}{2}},$$

où

$$(14)\qquad S = S_{111}K_1^3 + \ldots + S_{112}K_1^2K_2 + \ldots + S_{123}K_1K_2K_3 + \ldots.$$

Les coefficients $R_{11}, \ldots$ et $S_{111}, \ldots$, qui entrent ici, peuvent, d'après mes calculs de 1867, se représenter comme il suit :

Formons, au moyen des déterminants (ikl), les produits

$$r_{gh} = (ghi)(ghk)(ghl),$$

$ghikl$ désignant une permutation des cinq indices 12345, et composons, au moyen de ces produits, les expressions

$$s_{ik}^{gh} = r_{gi}r_{hk} + r_{gk}r_{hi}.$$

Les r_{gh} sont des fonctions alternées de leurs indices, de sorte que $r_{hg} = -r_{gh}$; les s_{ik}^{gh} sont des fonctions qui restent invariables : 1° quand on échange entre eux leurs indices supérieurs; 2° quand on échange entre eux leurs indices inférieurs; 3° quand on échange à la fois les deux indices supérieurs avec les deux indices inférieurs. Cela posé, les coefficients des équations (4) sont donnés par les formules

$$(12)^*\qquad \begin{cases} R_{11} = \dfrac{1}{2}(r_{23}^2 r_{45}^2 + r_{24}^2 r_{35}^2 + r_{25}^2 r_{34}^2), \\ R_{12} = r_{13}r_{23}r_{45}^2 + r_{14}r_{24}r_{35}^2 + r_{15}r_{25}r_{34}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(14)^*\qquad \begin{cases} S_{111} = s_{45}^{23}s_{35}^{24}s_{34}^{25}, \\ S_{112} = s_{45}^{13}s_{35}^{24}s_{34}^{25} + s_{45}^{25}s_{35}^{14}s_{34}^{25} + s_{45}^{23}s_{35}^{24}s_{34}^{15}, \\ S_{123} = s_{45}^{23}(s_{25}^{14}s_{34}^{15} + s_{24}^{15}s_{35}^{14}) + s_{45}^{13}(s_{15}^{24}s_{34}^{25} + s_{14}^{35}s_{35}^{24}) \\ \qquad\qquad + s_{45}^{12}(s_{25}^{34}s_{14}^{35} + s_{24}^{35}s_{15}^{34}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dans ces formules, il n'entre ainsi que les deux fonctions homogènes R et S des cinq quantités $K_1, \ldots, K_5$, lesquelles sont composées symétriquement avec ces quantités, et dont l'une est du second ordre, l'autre du troisième.

Après le calcul des irrationnelles $\sqrt{R}$ et $\sqrt{-\frac{1}{2}S + R^{\frac{3}{2}}}$, les différents multiplicateurs λ s'obtiennent, comme on l'a vu plus haut, sous forme de fractions, dont le dénominateur commun se compose de la seconde de ces irrationnelles, tandis que les numérateurs sont des fonctions homogènes du second ordre des six quantités $K_1, \ldots, K_5, \sqrt{R}$.

Tout en réservant pour une autre occasion la discussion des valeurs que l'on vient de trouver, je résumerai comme il suit le résultat algébrique obtenu pour le cas de cinq sections centrales :

« Pour résoudre le système d'équations

$$K_1 = \frac{\partial A}{\partial \lambda_1}, \ldots, \quad K_5 = \frac{\partial A}{\partial \lambda_5},$$

où

$$A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l, \qquad (i, k, l = 1, \ldots, 5)$$

$$(ikl) = | \alpha_h^g |, \qquad \begin{pmatrix} g = i, k, l \\ h = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

et dont dépend la détermination de l'ellipsoïde de moindre volume parmi ceux pour lesquels cinq sections centrales ont des aires données, joignons aux cinq fonctions $K_1, \ldots, K_5$, quadratiques et homogènes par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, une sixième fonction

$$T = [(123)(124)(125)(345)]^2 \lambda_1 \lambda_2 + \ldots;$$

le carré de T pourra être représenté sous forme d'une fonction R, quadratique et homogène de $K_1, \ldots, K_5$, en vertu des équations (12), (12)*. A l'aide du radical carré $T = \sqrt{R}$, on pourra ensuite mettre le carré de A, abstraction faite d'un facteur indépendant des K, sous la forme

$$-\frac{1}{2} S + R^{\frac{3}{2}},$$

$-\frac{1}{2} S$ étant une fonction homogène du troisième ordre de $K_1, \ldots, K_5$, donnée par les équations (14), (14)*; enfin chacune des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sera exprimable par une fraction ayant pour dénominateur

$$\sqrt{-\frac{1}{2} S + R^{\frac{3}{2}}},$$

et pour numérateur une fonction quadratique homogène des six quantités $K_1, \ldots, K_5, \sqrt{R}$. »