P. MANSION

Notice sur les travaux de Jules Plücker

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 313-319

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__313_0>

NOTICE SUR LES TRAVAUX DE JULES PLÜCKER;

Par M. P. MANSION.

Au commencement de ce siècle, l'Allemagne ne possédait guère que deux géomètres, Gauss et Pfaff, tandis qu'en France une pléiade de savants illustres travaillaient avec ardeur aux progrès des Mathématiques. A partir de 1826, il n'en est plus ainsi. Les travaux et les leçons de Jacobi et de Dirichlet suscitent de nombreuses et belles recherches d'Analyse, tandis que Möbius, Steiner et Plücker étendent les limites de la Géométrie. Nous résumons ici la Notice consacrée par M. Clebsch à la mémoire du dernier de ces savants (1).

1. Jules Plücker, né à Elberfeld, le 16 juin 1801, fit ses études au gymnase de Düsseldorf, aux Universités de Bonn, de Heidelberg et de Berlin, et à Paris. Il fut successivement privat-docent (1826) et professeur extraordinaire (1828-1833) à l'Université de Bonn, au gymnase Frédéric-Guillaume, à Berlin (1833), professeur ordinaire à Halle (1834) et à Bonn (1836). Il enseigna à la fois les Mathématiques et la Physique dans cette dernière ville. Jusqu'en 1840, tous ses efforts furent consacrés à la Géométrie; il publia sa *Géométrie de l'espace,* en 1846, et, à partir de cette époque jusqu'en 1864, il s'occupa exclusivement de Physique. Dans les dernières années de sa vie, il revint aux Mathématiques pour créer la nouvelle Géométrie, fondée sur la considération de la ligne droite comme élément de l'espace. Il mourut le 22 mai 1868.

Les recherches de Physique de Plücker, comme ses recherches géométriques, montrent bien la tendance d'esprit de cet homme éminent. Il aimait mieux étudier sans cesse de nouvelles séries de phénomènes physiques et mathématiques, étendre les limites des deux sciences qu'il cultivait avec tant d'ardeur, que de scruter minutieusement un petit nombre de faits et de problèmes. De là la nature

(1) *Voir* le travail de M. Clebsch : *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (*Mém. de Göttingue,* t. XVI). Nous avons traduit ce Mémoire en français, et il a été inséré dans le *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche* de M. le prince B. Boncompagni, t. V, p. 183-212. Le Mémoire original et la traduction se vendent aussi séparément.

qualitative de ses recherches de Physique, de là aussi la multiplicité des aperçus et des points de vue nouveaux que renferment ses Ouvrages et surtout ses Mémoires de Géométrie. Plutôt porté à produire qu'à analyser, Plücker négligea souvent l'étude des publications contemporaines, et refit des découvertes que d'autres avaient déjà publiées. Le contraire arriva souvent aussi.

Plücker a rendu un grand service à cette partie de la Géométrie, que nous appelons maintenant *Géométrie projective*, et qu'il a tant contribué à créer, en mettant ses découvertes sous une forme analytique, quelque imparfaite qu'elle puisse paraître à notre génération, habituée à l'élégance des méthodes modernes. L'Analyse permit en effet à Plücker d'introduire dans ses recherches deux idées fondamentales, dont la méthode synthétique ne s'est rendue maîtresse que plus tard : d'abord l'idée des courbes et des surfaces générales, élucidée plus tard par Grassmann, puis les imaginaires que v. Staudt a rendues plus tard encore accessibles à la Géométrie pure.

2. Carnot et Monge, le dernier surtout, ont été les précurseurs de la Géométrie moderne, dont Poncelet semble avoir été le vrai créateur, en introduisant dans la Science la méthode projective et un grand nombre d'idées importantes, dont Gergonne se fit l'ardent promoteur. Plücker, en étudiant les Mémoires de ce dernier, découvrit, en même temps que Bobillier, la *méthode des notations abrégées*, qui permet de composer *a priori* l'équation d'une figure, et d'y lire ensuite les propriétés de celle-ci. Plücker fit de belles applications de cette méthode à la théorie des courbes du troisième ordre.

Les propriétés du pôle et de la polaire relativement aux coniques ayant permis à Poncelet d'établir le principe de *dualité*, principe qui s'étendait de lui-même à l'espace, Gergonne donna à la théorie des courbes et des surfaces la forme dualistique qui caractérise actuellement la Géométrie, mais en enlevant au principe de Poncelet sa vraie base, la théorie des pôles et des polaires. Plücker, en étudiant à fond cette théorie de la corrélation, la fit reposer sur la notion des coordonnées de la droite ou du plan. La relation de la forme

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad ux + vy + wz + 1 = 0,$$

qui existe entre les coordonnées de la droite ou du plan (u et v, ou u, v et w), et celle du point (x et y, ou x, y et z) étant symétrique par rapport à ces deux sortes de quantités, le principe de dualité devient évident, et la notion de classe imaginée par Gergonne trouve son interprétation naturelle dans l'équation tangentielle d'une courbe ou d'une surface. Plücker vit parfaitement d'ailleurs que l'on pouvait imaginer des corrélations d'ordre supérieur.

Au fond, le principe de dualité est démontré de la même manière, mais sous une forme moins saisissante, dans l'admirable livre de Möbius, sur le *Calcul barycentrique,* où il manque, il est vrai, l'idée des coordonnées des plans et des droites, mais qui contient bien des idées fondamentales de la Géométrie moderne (le rapport anharmonique, les coordonnées homogènes, les diverses sortes de corrélations, les courbes et les surfaces à coordonnées rationnelles en fonction d'un paramètre). On ne connut l'importance de cet Ouvrage de Möbius que plus tard, quand les idées fondamentales en furent exposées sous une forme plus systématique par Steiner, et surtout par Chasles (*Aperçu historique*), qui y était arrivé par suite de ses propres études. Plücker étudia très-peu les corrélations d'ordre supérieur, signalées déjà par Poncelet et étudiées plus tard par Magnus, Steiner, Möbius, et surtout par Cremona.

Plücker introduisit aussi dans la Science les *coordonnées homogènes,* qui devaient servir à Hesse pour relier la Géométrie à l'Algèbre moderne; mais il faut remarquer que les coordonnées barycentriques de Möbius sont au fond la même chose que les coordonnées homogènes. A Plücker revient l'honneur d'avoir vu toute l'importance de celles-ci, pour donner une forme définitive aux équations des tangentes et des points-contacts et à la théorie générale des polaires, grâce aux propriétés des fonctions homogènes.

3. Cramer et Euler avaient remarqué, au siècle passé, qu'il suffit qu'un certain nombre des points d'intersection de deux courbes soit connu pour que les autres soient déterminés. Il s'écoula beaucoup de temps avant que l'on vît la portée de cette remarque. Lamé, le premier, donna à ce sujet ce théorème que, par les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n, $C_n = 0$ et $C'_n = 0$, en passent une infinité $C_n + \lambda C'_n = 0$ de même ordre, et Gergonne fit connaître un principe plus général encore. Plücker découvrit quel

nombre k de ces n^2 points devait être donné pour que les $n^2 - k$ autres fussent déterminés, puis, en même temps que Jacobi, résolut une question analogue pour les courbes d'ordre m et n, et plusieurs problèmes généraux. Cayley a examiné à fond cette question au point de vue algébrique, et Clebsch a fait voir que les résultats auxquels on est arrivé dans cette voie ne sont qu'une autre forme du théorème d'Abel sur l'addition des fonctions abéliennes. En particulier, si $n = 3$, le nombre k, indiqué plus haut, est égal à 8; toutes les cubiques qui ont huit points communs en ont un neuvième, proposition d'où Plücker a déduit le théorème de Pascal, en considérant la conique et la droite de Pascal comme une cubique rencontrée en huit points par les deux cubiques que forment les six côtés de l'hexagone inscrit dans cette conique.

Poncelet, le premier, a découvert l'influence des points singuliers sur la classe des lignes courbes. Plücker, en s'occupant de recherches plus générales sur ce sujet, a découvert, en partie par des calculs directs, en partie au moyen du principe de dualité, les célèbres formules qui portent son nom, et qui donnent le nombre des points doubles et des tangentes doubles, des points de rebroussement et des tangentes d'inflexion dans les courbes planes. Jacobi et auparavant Cayley ont démontré directement les formules relatives aux tangentes doubles et aux tangentes d'inflexion. Cayley a étendu ces formules aux *courbes gauches;* Riemann et Clebsch ont introduit dans toute cette théorie la notion de *genre;* Cayley, celle de l'équivalence des singularités supérieures avec les singularités simples; enfin ce dernier géomètre, M. Salmon et M. Zeuthen ont travaillé à la théorie des points singuliers des surfaces.

4. Plücker a consacré une grande partie de ses Ouvrages à la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre. Il démontra que les courbes ont neuf points sur une seconde courbe de même ordre, qu'il y en a trois qui sont réels, qu'il y a douze lignes d'inflexion, etc. Möbius a simplifié cette théorie, Hesse l'a complétée et étendue aux courbes quelconques. Il a aussi étudié, ainsi que Sylvester, Cayley, Salmon et Clebsch, les équations du troisième degré résolubles, qui donnent les points d'inflexion des cubiques. Plücker a trouvé bien des théorèmes curieux sur ces courbes, entre autres le théorème relatif à la conique surosculatrice. Disons, en

passant, que sa classification des cubiques, tout ingénieuse qu'elle soit, est moins simple que celle de Salmon, dont le germe se trouve dans Möbius. Quant aux courbes du quatrième ordre, Plücker en a donné deux classifications, fondées, l'une sur la nature de leurs branches infinies, l'autre, plus importante, sur leurs singularités. Il a montré que ces courbes ont vingt-huit tangentes doubles, parfois toutes réelles; mais il s'est trompé sur leur position relative, que Steiner et surtout Hesse ont fait connaître d'une manière exacte.

L'Ouvrage qui contient ces recherches (la *Théorie des courbes algébriques*) appelle l'attention des géomètres sur la *Méthode du dénombrement des constantes,* dont l'idée fondamentale est à peu près celle-ci : un système d'équations, correspondant à un problème *déterminé,* est résoluble quand le nombre des équations est égal au nombre des inconnues.

Signalons encore, parmi les sujets traités par Plücker dans sa première période d'activité géométrique : 1° la théorie générale des foyers, auparavant effleurée par Poncelet, et étudiée ensuite par Kummer, Salmon, Hart, Chasles et Cayley; 2° la théorie du contact des surfaces; 3° la Géométrie sur les surfaces du second ordre, où il fut le précurseur de Chasles; 4° enfin les propriétés de la *surface des ondes,* sujet repris et étendu par Kummer et Klein.

5. La *Géométrie linéaire* est la dernière création de Plücker, et celle peut-être qui a ouvert aux mathématiciens le champ le plus étendu d'explorations et de découvertes.

Les idées fondamentales de cette Géométrie se retrouvent dans trois cycles de recherches antérieures. On n'y trouve pas explicitement, mais implicitement, l'idée des complexes et des congruences (ensemble des droites dont les paramètres satisfont à une ou à deux équations). Dans le premier cycle, qui est purement géométrique, il faut signaler, relativement à des complexes du premier ordre, des Mémoires de Möbius, de Magnus, de Chasles et de Sylvester; relativement à des complexes du second ordre, des recherches de Binet et de Chasles, complétées récemment par Reye, Lie et Müller; enfin, au point de vue général, un grand travail de Cayley, où, d'ailleurs, apparaît déjà la trace des idées de Plücker. Le second cycle de recherches sur la Géométrie linéaire appartient à la Mécanique. Poinsot, Chasles, Möbius, Sylvester, Cayley, principalement dans l'étude des systèmes de forces qui peuvent remplacer un système donné, ont trouvé des théorèmes qui ne s'exposent simplement que dans la nouvelle Géométrie linéaire. La théorie des systèmes de rayons est encore plus rapprochée de la Géométrie plückérienne que les recherches précédentes. Monge, Möbius et Sturm, et, plus récemment, Hamilton, Kummer et Abel Transon ont étudié des systèmes de rayons (*congruences* de Plücker).

Plücker a donné, dans sa *Géométrie de l'espace* (1846), l'idée fondamentale de la Géométrie linéaire; mais il ne put faire fructifier cette idée que quand il l'eut associée à celle de complexe. Dans sa nouvelle conception, la ligne droite, la surface réglée, la congruence et le complexe sont comme les étages successifs d'une nouvelle Géométrie. Plücker a très-bien signalé cette conséquence de l'existence de quatre variables dans l'équation du complexe : la Géométrie linéaire est une sorte de Géométrie à quatre dimensions. En général, disait-il, même dans le plan, on peut construire une Géométrie à autant de dimensions que l'on veut, c'est-à-dire, pour parler plus clairement, on peut y étudier une figure fondamentale dans l'équation de laquelle entrent autant de paramètres variables que l'on veut. L'Ouvrage de Plücker et ses Mémoires sur la Géométrie linéaire sont consacrés surtout à l'étude des complexes du second ordre. Ces derniers travaux du géomètre de Bonn ne sont pas à la hauteur de la Science, au point de vue de la forme analytique; mais les idées qui en constituent le fond, par leur fécondité et leur portée, ont déjà eu une grande influence sur le développement de la Science, comme on peut le voir dans les écrits de Klein, de Lie et de Clebsch. L'importance des travaux antérieurs de Plücker a parfois été méconnue ou même niée. Dieu ne pouvait lui préparer une plus belle compensation à cette injustice de ses contemporains qu'en lui permettant de créer, au soir de sa vie, une nouvelle branche de la Science, dont la haute importance est incontestable.

6. Le Mémoire de Clebsch, dont nous faisons ici l'analyse, contient une Notice de M. le professeur Hittorf sur les travaux de Physique de Plücker. Ne pouvant la résumer ici, nous nous contenterons de dire que l'on doit à cet homme éminent l'étude du ma-

gnétisme et du diamagnétisme des cristaux, et celle de l'action de la décharge électrique sur les gaz raréfiés. Avant Bunsen et Kirchhoff, il annonça que les raies du spectre sont caractéristiques pour chaque substance, et qu'elles peuvent être utilisées dans l'analyse chimique; il découvrit aussi, avec M. Hittorf, que l'écartement des raies du spectre se produisait sous l'influence d'une chaleur intense, résultat de la plus haute importance pour l'étude de l'atmosphère solaire. Plücker avait, en Physique comme en Géométrie, un esprit essentiellement généralisateur; les recherches originales lui plaisaient par-dessus tout, de sorte que, dans ce domaine aussi, il ne fit pas souvent une attention suffisante aux travaux de ses contemporains. Il ne pouvait se résoudre à l'étude pénible des résultats obtenus par d'autres physiciens. Quand un pareil examen se présenta naturellement, il préféra retourner à ses recherches géométriques. Les mathématiciens s'en consoleront aisément, puisque c'est à cette circonstance que nous devons une partie de la science, à laquelle restera, il faut l'espérer, le nom de *Géométrie plückérienne*.

P. Mansion.