BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Revue bibliographique

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 5 (1873), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__49_0>

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HERMITE (Ch.), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences. — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. *Première Partie*, contenant le *Calcul différentiel* et les *Premiers Principes du Calcul intégral*. Un fort Volume, imprimé sur vélin, avec figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. — Prix : 14 fr. (1).

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge d'un Livre dont l'auteur est un des géomètres éminents de notre époque, qui a contribué pour une large part aux progrès de la théorie des formes et des fonctions. Le Traité de M. Hermite est conçu au point de vue des idées nouvelles, et met en lumière les progrès les plus récents de l'Analyse; c'est donc un de ces Ouvrages dont il suffit de signaler l'apparition : aussi nous contenterons-nous d'un compte rendu très-sommaire, que nous ferons suivre de la Table des matières.

Une Introduction d'une cinquantaine de pages est consacrée au développement de plusieurs notions importantes sur les fonctions algébriques et sur le rôle des variables imaginaires dans l'étude des fonctions.

Les principes du Calcul différentiel, ainsi que les applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral, sont exposés sous une forme concise; M. Hermite réserve son Ouvrage pour les développements de questions moins connues et renvoie, pour de plus amples détails, aux Traités de M. Bertrand et de M. J.-A. Serret. Signalons cependant la question du contact géométrique, qui est traitée avec une remarquable netteté et une grande généralité.

Le Calcul intégral est la partie la plus importante et la plus difficile du Calcul infinitésimal; c'est là que se trouve l'origine de tant de notions analytiques nouvelles et fécondes acquises de nos jours, de combinaisons analytiques que l'Algèbre ne saurait obtenir, par exemple, celle des séries qui sont convergentes et ne sont pas nécessairement continues.

C'est à cette belle étude, qui, en permettant de concevoir les fonctions dans leur sens le plus général, conduit à une infinité de

(1) La *seconde Partie* contiendra la fin du Calcul intégral.

transcendantes nouvelles et ouvre à l'Analyse un horizon infini, qu'est principalement consacré le Traité de M. Hermite.

La première Partie ne renferme que les premiers principes du Calcul intégral. L'auteur insiste d'abord, et à juste titre, sur le changement de la variable qui ramène l'intégrale proposée à une autre que l'on sait obtenir. En premier lieu, se présente la question d'énumérer et de définir les expressions rationnelles et transcendantes dont l'intégrale peut se réduire, par une substitution, à celle d'une fonction qui est rationnelle par rapport à la nouvelle variable. Cette première partie du Calcul intégral comprend environ 200 pages; là se trouvent exposées les premières notions relatives aux courbes unicursales.

La théorie des courbes unicursales, enrichie des découvertes de Clebsch, de MM. Chasles, Cayley, etc. (*Journal de Borchardt*, t. 63, p. 189, t. 64, p. 210, etc.; *Comptes rendus*, t. LXII, p. 579, etc.), est la traduction géométrique du problème d'Algèbre suivant : « Étant donnée l'équation $F(x,y) = 0$, dont le premier membre est un polynôme entier en $x$ et $y$, reconnaître s'il est possible d'exprimer $x$ et $y$ en fonction rationnelle d'une variable auxiliaire ». On voit par là la liaison intime qui existe entre cette théorie et le problème des quadratures, puisqu'on peut ainsi connaître un changement de variables qui réduit l'intégrale $\int f(x,y)\,dx$, où $y$ est lié à $x$ par l'équation $F(x,y) = 0$, à celle d'une fonction rationnelle. C'est là un des plus importants et des plus beaux résultats de la méthode d'intégration par substitution; et, comme le dit M. Hermite, p. 383, « on voit dans les parties élevées du Calcul intégral toute l'importance de la considération des points doubles, et comment elle devient l'un de ces liens que la science de notre époque, et surtout les beaux travaux de Clebsch, ont révélés entre la Géométrie supérieure et l'Analyse ».

L'intégration des fonctions rationnelles est traitée avec étendue; cette étude renferme des notions importantes d'Analyse, des calculs très-habilement conduits et des résultats d'une grande élégance. Nous signalerons, en particulier, la recherche directe de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{F(x)}{F_1(x)}\,dx$, de façon que l'on n'a plus besoin de connaître les racines de $F_1(x) = 0$, si ce n'est pour former la partie transcendante $\Sigma A \log(x - a)$.

Le procédé de la décomposition en éléments simples est ensuite appliqué à la recherche de l'intégrale des expressions transcendantes

$$f(\sin x, \cos x), \quad e^{\omega x} f(x), \quad e^{\omega x} f(\sin x, \cos x),$$

qui sont les seules fonctions dont on puisse aborder généralement l'intégration, $f$ étant la caractéristique d'une fonction rationnelle. Les développements que M. Hermite fait connaître offrent une analogie complète avec la décomposition des fonctions rationnelles; l'auteur en présente un résumé très-net à la page 381 de son Ouvrage.

La première Partie du Cours de M. Hermite s'arrête aux équations différentielles; en terminant cette analyse succincte, nous devons exprimer le regret de n'avoir encore que cette première Partie.

TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

grale $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$. — Des intégrales définies $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x - a - b\sqrt{-1}}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}$. — Intégration des fonctions algébriques qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme. — De l'intégrale $\int \frac{F(x)}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$. — Des intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$. — Applications. — *Intégration des fonctions transcendantes.* — De l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$. — De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$. — De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)\,dx$. — De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin x, \cos x) f_1(x)\,dx$.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. — Remarques préliminaires. — *Quadrature des courbes planes.* — Courbes du second degré; cycloïde. — Courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre. — *Rectification des courbes.* — Parabole et ellipse. — Des courbes algébriques dont l'arc s'exprime par la fonction elliptique de première espèce. — Des fonctions algébriques dont l'intégrale est réductible aux transcendantes elliptiques. — Volumes des corps limités par des surfaces quelconques. — Quadrature des surfaces courbes quelconques. — Volume et surface des corps de révolution. — *Évaluation approchée des intégrales.*

L. P.

---

DARBOUX (G.), maître de conférences à l'École Normale supérieure. — SUR UNE CLASSE REMARQUABLE DE COURBES ET DE SURFACES ALGÉBRIQUES ET SUR LA THÉORIE DES IMAGINAIRES. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. In-8°. Prix : 6 fr.

PRÉFACE.

L'Ouvrage que je publie aujourd'hui se compose de deux Parties distinctes.

Le texte constitue seulement une nouvelle rédaction d'un Mémoire présenté en 1869 [1] à l'Académie des Sciences, Mémoire dont l'impression a été retardée par bien des circonstances sur lesquelles il est inutile d'insister.

Les Notes contiennent l'examen détaillé de quelques questions qui s'étaient présentées dans mes recherches primitives, et que je

---

(1) *Voir* l'extrait du Mémoire, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 1311, séance du 7 juin 1869.

n'avais pu traiter avec le développement qu'elles me paraissaient mériter.

Le but principal de l'ensemble de ce travail est l'étude d'une classe remarquable de surfaces du quatrième ordre, que je propose d'appeler *cycliques*, et qui admettent une conique double spéciale, le cercle de l'infini. Ces surfaces peuvent se décomposer en un plan, le plan de l'infini, et en une surface du troisième ordre, qui contient le cercle de l'infini. Elles donnent donc, par une transformation homographique, la surface la plus générale du quatrième ordre à conique double, et la surface du troisième ordre. J'ai dû joindre à leur étude, pour la rendre à la fois plus nette et plus complète, celle des courbes qui jouent le même rôle qu'elles dans la Géométrie à deux dimensions. Ces courbes, que j'appelle *cycliques*, sont, soit les courbes planes du quatrième ordre ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle, soit les courbes sphériques qui résultent de l'intersection de la sphère avec une surface du second degré. Quelques propriétés relatives aux imaginaires se présentaient naturellement dans l'étude que j'avais entreprise; il m'a paru qu'il y aurait avantage à les développer avec la généralité qu'elles comportent. Ces explications justifieront, je l'espère, la composition et le plan de mon travail.

La première Partie est consacrée à l'étude de la transformation, par rayons vecteurs réciproques, des foyers et des focales. Depuis 1869, bien des recherches importantes ont été, ou mieux connues, ou publiées sur les différentes méthodes de transformation. J'ai cru devoir conserver néanmoins les développements que j'avais présentés sur ce sujet, parce qu'ils sont élémentaires, et aussi parce qu'ils se rapportent à la plus intéressante de toutes les transformations considérées jusqu'à présent. J'ai ajouté à cette Partie, au moment de l'impression, l'indication d'un moyen nouveau et très-simple de former l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Les théories relatives aux imaginaires expliquent nettement, ce qui n'avait pas été fait jusqu'ici, les solutions singulières de l'équation aux dérivées partielles à laquelle on est conduit.

La deuxième Partie contient une étude détaillée des cycliques planes et sphériques. J'y examine les propriétés générales, la classification des différentes espèces de cycliques, et les propriétés métriques focales, qui sont la généralisation des propositions connues de la théorie des coniques.

Parmi les cycliques, quelques-unes ont la plus grande analogie avec l'ellipse de Cassini; leur théorie est liée par les rapports les plus étroits aux beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques, et, d'autre part, avec quelques propositions générales relatives aux imaginaires en Géométrie. La troisième Partie est donc consacrée à une étude des imaginaires; mais, après avoir démontré les propositions indispensables, je reviens promptement à l'objet spécial de mon travail, pour étendre à toute une classe de courbes planes et sphériques deux des propriétés fondamentales du cercle. On me permettra de signaler aussi un moyen nouveau de démontrer les propriétés métriques focales des coniques, en les déduisant directement de l'une des propositions générales que M. Chasles a prises pour bases de la théorie de ces courbes, dans son beau *Traité des Sections coniques*. Les Notes contiennent des développements nombreux et étendus se rapportant à cette Partie. Elle a d'ailleurs été modifiée en un point pendant l'impression : j'ai beaucoup simplifié la démonstration que j'avais donnée d'abord des théorèmes de Poncelet.

Les deux dernières Parties sont consacrées à l'étude analytique et géométrique des surfaces cyclides, abrégée et rendue plus facile par les développements qui précèdent. Ce qui concerne la génération des cyclides, leur classification et la cyclide à quatre points doubles, qui a été depuis 1869 le sujet des recherches de quelques géomètres, n'a reçu aucune addition dans le texte. J'ai un peu changé la forme de la dernière Partie, consacrée à l'étude géométrique des cyclides et du système triple orthogonal qu'on peut former avec ces surfaces, en ajoutant quelques développements relatifs à une des plus belles conceptions de M. Cayley. Ce géomètre a eu le mérite de donner, le premier, sous une forme nette, grâce aux beaux travaux et aux études antérieures de Möbius et surtout de M. Chasles, les principes qui assujettissent, si je puis m'exprimer ainsi, la Géométrie des relations métriques dans le plan et sur la sphère à celle du rapport anharmonique, appelée quelquefois aussi Géométrie projective. Pour ne pas être accusé de me livrer à des spéculations théoriques sans aucune portée pratique, j'ai montré dans les Notes comment les principes de M. Cayley pouvaient conduire à des théorèmes intéressants, et en particulier à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure qui a été déjà donnée par M. Bonnet. Je généralise d'une manière assez étendue cette méthode de transformation.

Les Notes contiennent des développements relatifs à la Géométrie de M. Cayley, à la transformation par rayons vecteurs réciproques, et à un système de coordonnées qui s'applique à la fois aux points, aux plans et aux sphères. M. Lie, professeur à l'Université de Christiania, a, le premier, considéré la sphère comme un élément de l'espace, et il a su établir les relations les plus intéressantes entre la Géométrie des sphères et celle des lignes droites. Ne voulant développer ici que mes recherches personnelles, je me suis borné, dans les dernières Notes de cet Ouvrage, à l'étude des cyclides, de leurs normales, de leurs sphères tangentes et des courbes remarquables qu'on peut tracer et déterminer sur ces surfaces.

La deuxième et la quatrième Partie sont précédées d'une courte Notice historique. Quelques remarques et rectifications portant sur des travaux dont j'ai eu connaissance après avoir terminé sont placées à la fin des Notes.

Je serais heureux de voir ce travail, dont je sens autant que personne les imperfections, accueilli avec bienveillance par les géomètres. Puisse-t-il amener quelques-uns d'entre eux à des études qui forment un intermédiaire et un lien naturel entre la théorie des quadriques et celle des surfaces de degré supérieur, empruntant ainsi au rang qu'elles occupent une importance et un intérêt qu'on ne saurait méconnaître.

TABLE DES MATIÈRES.

sphériques. — 13. De la génération des cycliques. — 14. Classification des cycliques. — 15. Propriétés générales des cycliques. — 16. Des relations entre les différents modes de génération d'une cyclique. — 17. Des différents modes de génération pour les diverses espèces de cycliques. — 18. Des cartésiennes. — 19. Des propriétés focales des cycliques. — 20. Des cycliques situées sur des cylindres. — 21. Des coniques sphériques. — 22. Des cycliques planes. — 23. Des cartésiennes. — 24. De la transformation par rayons vecteurs réciproques dans les cycliques, et des transformations de ces courbes les unes dans les autres. — 25. Du système orthogonal formé par les cycliques homofocales. — 26. Des cycliques analogues à l'ellipse de Cassini.

III^e Partie. — *Étude de certaines propriétés des imaginaires en Géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini.* — 27. Des points associés dans le plan. — 28. D'une classe générale de courbes. — 29. Du système orthogonal formé avec les courbes précédentes. — 30. Des courbes lieux des points d'où l'on voit plusieurs segments sous des angles dont la somme est nulle. — 31. Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques. — 32. De l'ellipse de Cassini. — 33. Des points associés à la surface de la sphère. — 34. Des courbes sphériques analogues aux courbes planes déjà considérées. — 35. Des courbes sphériques pour lesquelles les pôles de chaque série sont deux à deux diamétralement opposés. Propriétés correspondantes des cônes algébriques, ayant ces courbes pour base. — 36. Des courbes lieux des points desquels on voit plusieurs segments de grand cercle sous des angles dont la somme est nulle. — 37. Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes. — 38. Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents. — 39. Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires.

IV^e Partie. — *Étude analytique des cyclides.* — 40. Introduction. — 41. Propriétés générales des cyclides. — 42. Des sphères doublement tangentes aux cyclides. — 43. Des plans tangents doubles et des focales des cyclides. — 44. Généralités sur les surfaces anallagmatiques. — 45. D'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques. — 46. De la forme générale des cyclides, du nombre de leurs focales et de leurs sections circulaires réelles. — 47. Du système des cyclides homofocales. — 48. Du système de cinq sphères orthogonales. — 49. Des cyclides homofocales. — 50. Du système de coordonnées curvilignes formé avec les cyclides homofocales et orthogonales. — 51. Applications aux cyclides homofocales. — 52. Applications des formules relatives aux cyclides à la surface générale du troisième ordre, et à la surface du quatrième ordre à conique double.

V^e Partie. — *Étude géométrique des cyclides.* — 53. Des focales singulières et des sections circulaires. — 54. Des relations entre les cinq modes de génération des cyclides. — 55. Classification des cyclides. — 56. De la cyclide du troisième degré. — 57. Des podaires ou réciproques des quadriques. — 58. De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques. — 59. Des cyclides ayant pour déférentes les surfaces inscrites dans la sphère. — 60. Des sections planes et sphériques des cyclides. — 61. Du système orthogonal formé par les cyclides homofocales, et des propriétés d'une méthode de transformation déjà définie. — 62. Généralisation des notions de normales, de focales et de lignes de courbure.

Notes et Additions. — I. De l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. — II. Sur une démonstration analytique des théorèmes de Poncelet, et sur un nouveau système de coordonnées dans le plan. — III. Sur la démonstration directe des théorèmes de Géométrie sphérique exposés dans la IIIe Partie. — IV. Sur quelques surfaces remarquables du second degré et sur les cyclides correspondantes. — V. Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la Géométrie de M. Cayley. — VI. Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et la théorie des pôles secondaires des cyclides. — VII. Sur les différentes transformations par lesquelles on peut déduire du tore la cyclide de M. Dupin. — VIII. De la transformation, par rayons vecteurs réciproques, des surfaces anallagmatiques. — IX. Des surfaces qui demeurent invariables quand on les transforme par polaires réciproques, et des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure. — X. Sur un nouveau système de coordonnées et son application à la théorie des cyclides. — XI. Application du système de coordonnées considéré dans la Note précédente à la théorie des cyclides. — XII. Sur le problème des normales aux cyclides. — XIII. Sur les cyclides homofocales et orthogonales et sur leur surface des centres de courbure. — XIV. Sur quelques propriétés de Géométrie infinitésimale relatives aux cyclides. — XV. De différents systèmes de lignes définies par des propriétés différentielles et qu'on peut déterminer sur toutes les cyclides. — XVI. De quelques analogies entre la théorie des cyclides et celle des surfaces du second ordre.

*Remarques et rectifications.*

*Liste des Mémoires se rapportant au sujet traité dans cet Ouvrage et publiés dans ces dernières années.*