

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

## Revue bibliographique

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 5  
(1873), p. 7-15

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1873\\_\\_5\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__7_0)

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**BULLETIN**  
DES  
**SCIENCES MATHÉMATIQUES**  
ET  
**ASTRONOMIQUES.**

---

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.**

THOMSON (sir William), Fellow of St. Peter's College, Cambridge, and Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. — REPRINT OF PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM. — London, Macmillan & Co., 1872. — In-8°, 592 p., avec planches et figures dans le texte. Prix : 24 fr. 25.

M. Thomson a eu l'heureuse idée de réimprimer ses nombreux Mémoires, dont quelques-uns sont d'une date récente, et qui sont disséminés dans une douzaine de Recueils scientifiques. Si la multiplicité des publications consacrées aux sciences offre aux auteurs des moyens précieux de faire connaître leurs travaux, il faut avouer qu'elle présente aussi des inconvénients très-grands, et les personnes qui désirent se tenir au courant ont fort à faire aujourd'hui, et manquent le plus souvent de guide et des indications nécessaires. Il serait à désirer qu'on pût constituer dans les grandes villes, et à Paris en particulier, des salles de lecture où l'on mettrait à la disposition des personnes studieuses les nombreuses publications qu'elles ne peuvent se procurer personnellement, et qu'on ne leur communique d'ailleurs, dans les bibliothèques des établissements publics, que bien longtemps après la réception, quand les volumes sont reliés. Quoi qu'il en soit, nous devons savoir gré à M. Thomson de l'attention qu'il a eue pour les savants, en réunissant tous ses Mémoires, et nous allons donner la liste de ceux que contient le Volume que nous avons sous les yeux.

*Bull. des Sciences mathém. et astron.*, t. V. (Juillet 1873.)

I. On the uniform Motion of Heat in homogeneous solid bodies, and its connexion with the mathematical Theory of Electricity.

II. On the mathematical Theory of Electricity in Equilibrium.

III. On the electrostatical Capacity of a Leyden Phial and of a telegraph wire insulated in the axis of a cylindrical conducting sheath.

IV and V. On the mathematical Theory of Electricity in Equilibrium (*2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> Partie*).

VI. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors.

VII. On the attractions of conducting and non-conducting electrified bodies.

VIII. Demonstration of a fundamental proposition in the mechanical Theory of Electricity.

IX. Note on induced Magnetism in a plate.

X. Sur une propriété de la couche électrique en équilibre à la surface d'un corps conducteur, par M. Liouville. Note sur ce Mémoire.

XI. On certain definite integrals suggested by problems in the Theory of Electricity.

XII. Propositions in the Theory of Attraction.

XIII. Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations.

XIV. Electrical images.

XV. Determination of the distribution of Electricity on a circular segment of plane or spherical conducting surface, under any given influence.

XVI. Atmospheric Electricity.

XVII. Sound produced by the discharge of a condenser.

XVIII. Measurement of the electrostatic force produced by a Daniell's battery.

XIX. Measurement of the electromotive force required to produce a spark in air between parallel metal plates at different distances.

XX. Report on electrometers and electrostatic measurements.

XXI. Atmospheric Electricity.

XXII. New proof of contact Electricity.

XXIII. Electrophoric apparatus and illustrations of Voltaic Theory.

- XXIV. On mathematical Theory of Magnetism.
- XXV. On the potential of a closed galvanic circuit of any form.
- XXVI. On the mechanical values of distribution of matter and of magnets.
- XXVII. Hydro-kinetic analogy.
- XXVIII. Inverse Problems.
- XXIX. On the electric Currents by which the phænomena of terrestrial magnetism may be produced.
- XXX. On the Theory of magnetic Induction in crystalline and non-crystalline substances.
- XXXI. Magnetic permeability and analogues in electrostatic Induction, conduction of heat and fluid motion.
- XXXII. Diagrams of lines of force, to illustrate magnetic permeability.
- XXXIII. On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phænomena presented by diamagnetic substances.
- XXXIV. Remarks on the forces experienced by inductively magnetised ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances.
- XXXV. Abstract of two Communications.
- XXXVI. Remarques sur les oscillations d'aiguilles non cristallisées de faible pouvoir inductif paramagnétique et diamagnétique, etc.
- XXXVII. Elementary demonstration of propositions in the Theory of magnetic force.
- XXXVIII. Correspondence with Professor Tyndall.
- XXXIX. Inductive susceptibility of a polar Magnet.
- XL. General Problem of magnetic Induction.
- XLI. Hydrokinetic analogy for the magnetic influence of an ideal extreme diamagnetic.
- XLII. General hydrokinetic analogy for induced magnetism.
- Plusieurs de ces Mémoires sont enrichis de Notes et d'Additions. Le Volume est suivi d'un Index, qui facilite les recherches. Le travail nouveau que vient de s'imposer M. Thomson n'empêchera pas, nous l'espérons, cet éminent géomètre de nous donner, avec M. Tait, le second Volume, si impatiemment attendu, du beau *Traité de Philosophie naturelle*, dont la publication a été commencée par ces auteurs.

G. D.

CREMONA (L.), professore nel R. Istituto Tecnico superiore di Milano. — **ELEMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA.** Ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia. — Roma-Torino-Milano-Firenze, G.-B. Paravia e Comp.; 1873. — Vol. I, texte et atlas; 2 fasc. gr. in-8°. — Prix : 3 fr. 50 c. (4 fr. pour la France, port compris).

La Science qui porte les différents noms de *Géométrie supérieure*, de *Géométrie moderne*, de *Géométrie projective*, etc., n'est pas une branche spéciale de la Géométrie qui ait égard seulement à certaines classes de figures; mais elle comprend toute la Géométrie. En effet, ce qui lui est particulier, c'est qu'elle s'occupe des propriétés projectives; or toute propriété géométrique non projective n'est qu'un cas particulier d'une propriété projective : donc les théorèmes qui indiquent des propriétés non projectives peuvent être regardés comme des corollaires de ceux qui indiquent des propriétés projectives, ce que fait la Géométrie projective.

Cette Science s'est organisée de plusieurs manières très-différentes entre elles. On sait que Poncelet, pour trouver les propositions générales qui indiquent les propriétés projectives des figures, commençait par étudier les figures particulières, et qu'il généralisait ensuite, au moyen de projections centrales, les résultats obtenus; il déduisait les propriétés des coniques, des figures homologiques, etc., de celles des cercles, des figures homothétiques, etc. Gergonne, dont le but principal était d'établir *a priori* le principe de dualité, conçut plus tard l'idée d'une déduction plus directe d'une partie essentielle des propriétés projectives, savoir : des propriétés descriptives. Comme ces propriétés ne dépendent que de la situation des parties des figures, et non pas de leurs grandeurs, il croyait aussi que leur démonstration pouvait être indépendante de toute relation métrique, et il proposa de construire une Géométrie avec les seules propriétés descriptives (*Géométrie de situation*). En commençant lui-même cette construction, il la mena assez loin pour montrer que son idée était réalisable <sup>(1)</sup>; qu'il fallait seulement abandonner la séparation des Géométries à deux et à trois

---

(<sup>1</sup>) *Essai sur un nouveau mode de démonstration des propriétés de l'étendue*, par M. BOBILLIER (*Annales de Mathématiques*, t. XVIII, 1827-1828, p. 320-339 et p. 350-367).

*Considérations philosophiques sur les propriétés de l'étendue qui ne dépendent pas des relations métriques*, par M. GERGONNE (*Annales de Mathématiques*, t. XVI, 1825-1826, p. 209-232).

dimensions, et profiter ainsi, dans les recherches sur la Géométrie plane, des opérations dans l'espace.

En continuant la réalisation de ce plan de Gergonne, on peut former un système où l'on parvient, quant à la situation, immédiatement aux propriétés projectives et générales, sans commencer par des cas particuliers. Mais comme cette continuation se faisait attendre, le même but fut atteint plus tôt, par d'autres voies, dans les systèmes analytiques de Möbius et de Plücker, dont nous n'avons pas à nous occuper ici, et dans les systèmes géométriques <sup>(1)</sup> de Steiner et de Chasles, qui comprennent toutes les propriétés projectives, tant descriptives que métriques. On sait que la base de ces systèmes, qui, malgré l'indépendance des travaux de ces deux grands géomètres, se rencontrent sur les points les plus essentiels, est, à côté des propriétés descriptives fondamentales du point, de la droite et du plan, *le rapport anharmonique*, grâce auquel on peut démontrer les propriétés projectives planes, sans avoir recours à des considérations stéréométriques. Seulement, en 1847, v. Staudt, professeur à Erlangen, publia un système de *Géométrie de situation* <sup>(2)</sup>, en prenant pour point de départ les mêmes principes, tout à fait élémentaires, que Gergonne.

Nous n'avons pas à nous occuper ici de l'importance scientifique et de la beauté de chacun de ces systèmes, mais à examiner lequel d'entre eux est le plus propre à initier les jeunes gens à la Géométrie projective : celui de Poncelet, celui de Chasles et de Steiner, ou celui de v. Staudt ? La réponse sera sans doute différente dans différentes conditions ; mais ici il s'agit particulièrement d'un cours destiné à donner aux élèves ingénieurs des Écoles techniques une base théorique de leurs études plus pratiques, et notamment à les préparer à l'étude de la *Statique graphique*. Alors la *Géométrie de situation* a de grands avantages. A ces jeunes gens qui cultivent en même temps la Géométrie descriptive ou qui ont étudié cette

<sup>(1)</sup> STEINER : *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten*, 1832. — *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften*. Publié, d'après les leçons et les manuscrits de Steiner, par H. Schröter, 1867.

CHASLES : *Aperçu historique, etc.*, dont une partie avait été présentée à l'Académie de Bruxelles, en 1830, et qui parut en 1836. — *Traité de Géométrie supérieure*, 1852. — *Traité des Sections coniques*, 1865.

<sup>(2)</sup> *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847 ; suivie par *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856-1860.

science, et qui s'exercent à dessiner, les figures et les conceptions stéréométriques doivent être assez familières pour leur faire comprendre sans difficulté les démonstrations descriptives, et, réciproquement, ils ont besoin, pour leurs études et pour leurs futurs travaux, de se familiariser encore plus avec ces conceptions. Aussi le fondateur de la Statique graphique, M. Culmann, renvoie-t-il, dans son excellent Traité, à la *Géométrie de situation* de v. Staudt, et M. Reye, dans ses excellentes Leçons <sup>(1)</sup> de Géométrie projective faites aux élèves ingénieurs à Zürich, se sert-il aussi de démonstrations purement descriptives.

Toutefois, dans l'instruction, on ne doit pas pousser trop loin une abstraction, et nous ne croyons pas qu'il soit utile, dans le cas qui nous occupe, de se refuser absolument l'usage de relations métriques. Dans la Géométrie de situation, on définit les séries homographiques ou projectives de la manière suivante : Deux séries (avec  $\infty^1$  éléments) sont projectives, si leurs éléments se correspondent un à un, et si à quatre éléments harmoniques de l'une correspondent quatre éléments harmoniques de l'autre. Cette définition ne renferme pas en elle une détermination de l'élément de l'une qui correspond à un élément arbitraire de l'autre. Or on sait que cette détermination est exprimée d'une manière assez simple par l'égalité des rapports anharmoniques de quatre éléments de l'une et des éléments correspondants de l'autre. Nous croyons donc qu'il est bon, même dans un cours qui a pour base principale l'étude des propriétés descriptives, d'introduire la notion du rapport anharmonique, sitôt qu'il s'agit de construction de séries (ou de *formes*) projectives. Cette notion rend la conception de ces séries plus claire et facilite l'étude des propriétés descriptives, en même temps qu'elle donne aussi le moyen d'étudier les propriétés métriques des figures <sup>(2)</sup>.

La voie à laquelle nous avons donné ici la préférence est celle que suit, dans le Livre que nous avons à analyser, l'illustre géomètre italien, qui n'aspire pas à faire des découvertes, mais qui s'est chargé de la tâche utile, mais assez difficile, d'élaborer un Cours. Dans les premiers paragraphes [§ 1, *Définitions*; § 2, *Projection centrale*; § 3, *Homologie*; § 4, *Figures homologues de*

(1) *Die Geometrie der Lage*, Hannover, 1866.

(2) Pour cette dernière raison, M. Reye parle aussi dans des *Appendices* du rapport anharmonique.

trois dimensions; § 5, *Formes (séries) géométriques*; § 6, *Principe de dualité*; § 7, *Formes projectives*; § 8, *Formes harmoniques*], on fait abstraction de toute question de la grandeur de l'étendue, et toutes les démonstrations se font avec des propriétés descriptives. Mais, dans le § 9, l'auteur introduit *les rapports anharmoniques*, et en montre les principales propriétés, pour en faire usage dans ce qui suit (§ 10, *Construction des formes projectives*; § 11, *Cas particuliers et exercices*; § 12, *Involution*, etc.). Fidèle à son point de départ, l'auteur préfère toutefois, même après avoir introduit les rapports anharmoniques, les démonstrations descriptives et constructives, lorsqu'elles ne sont pas plus compliquées que celles où l'on se sert de simples opérations algébriques. C'est pour cette raison que la détermination des *éléments communs* de deux séries projectives et celles des *éléments doubles* d'une série de couples en involution (§ 18), et *les problèmes du second degré* (§ 19) ne sont exposés qu'après la déduction des propriétés principales des coniques (§ 13, *Formes projectives dans le cercle*; § 14, *Formes projectives dans les coniques*; § 15, *Constructions et exercices*; § 16, *Corollaires des théorèmes de Pascal et de Brianchon*; § 17, *Théorème de Desargues*).

On voit par les titres de ces derniers paragraphes que l'auteur suit, quant à l'introduction des coniques, un peu la même voie que Poncelet, en déduisant quelques-unes des propriétés des coniques de celles du cercle. Toutefois, il se borne à établir par cette voie les théorèmes fondamentaux sur la projectivité des faisceaux qui projettent de points fixes d'une conique un point mobile, et sur celle des divisions faites sur des tangentes fixes par une tangente mobile, et enfin sur celle de ces deux différentes espèces de formes entre elles; ces théorèmes font ensuite la base de la théorie suivante. En définissant une conique comme le lieu ou l'enveloppe déterminée par une de ces propriétés, on pourrait éviter cette déduction de théorèmes généraux de leurs cas particuliers; mais alors on aurait besoin de plusieurs démonstrations (que les centres des faisceaux qui engendrent la conique peuvent être des points quelconques de la courbe, etc.).

Les paragraphes suivants contiennent : § 20, *Pôles et polaires*; § 21, *Centre et diamètres*; § 22, *Figures polaires réciproques*; § 23, *Corollaires et constructions*. — Nous devons faire remarquer



que M. Cremona ne fait pas usage, dans ces démonstrations, d'éléments imaginaires.

Le second volume contiendra les *Propriétés focales des coniques*, la *Théorie des cônes et des figures sphériques*, et les principes de la Géométrie analytique.

Voilà un résumé du plan du travail de M. Cremona. Quant à l'exécution de ce plan, on ne peut trop louer l'excellente exposition, l'heureux choix des dénominations, la clarté du style et des explications, et la description intuitive des figures, avantages qu'on doit apprécier, sachant combien il est difficile souvent de ne pas donner à la description d'une figure qui fait saillir presque immédiatement une vérité géométrique une étendue qui dérobe à la démonstration descriptive toute son élégance.

Nous devons rappeler encore que M. Cremona fait suivre les théorèmes de nombreuses applications, soit de corollaires, soit de constructions. En exécutant avec soin ces constructions, l'élève ingénieur, en même temps qu'il acquiert la connaissance de la Géométrie projective, se familiarise avec les constructions graphiques qui lui seront si utiles plus tard.

Il va sans dire que l'excellent Livre de M. Cremona, tout en étant destiné spécialement aux Instituts techniques, sera aussi extrêmement propre à répandre ailleurs le goût de la Géométrie projective et la connaissance de cette science. Nous voudrions donc bien, par cette analyse, augmenter le nombre de ses lecteurs. En même temps, nous devons relever deux fautes qui s'y sont glissées. Comme la première, qui se trouve à l'énoncé du théorème 17, ne repose que sur un échange, nous nous permettons de la corriger, en substituant à cet énoncé celui qui suit : « Si aux droites  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... et aux points  $ab$ ,  $ac$ , ...,  $bc$ , ... d'une figure correspondent respectivement les droites  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , ... et les points  $a'b'$ ,  $a'd'$ , ...,  $b'c'$ , ... d'une autre figure située dans le même plan que la première, et si les droites joignant les points correspondants  $ab$  et  $a'b'$ ,  $ac$  et  $a'd'$ , ...,  $bc$  et  $b'c'$ , ... passent par un point fixe  $O$ , alors les droites correspondantes  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$ ,  $c$  et  $c'$ , ... se rencontrent en des points d'une droite fixe. »

La seconde de ces fautes <sup>(1)</sup> se trouve dans les démonstrations de

---

(1) Nous croyons savoir que l'indication de ces deux fautes, reconnues par l'auteur

l'article 114, (*a*) et (*b*). En effet, selon ces démonstrations, il serait possible de substituer au cercle une courbe tout à fait arbitraire. Il y a donc, dans la démonstration, une lacune qu'il ne serait pas difficile de remplir; mais, comme les théorèmes dont il s'agit sont importants, l'auteur, sans doute, s'en chargera lui-même, en donnant dans le second Volume une correction de ces deux démonstrations. Z.