Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 113-116

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__113_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BOOTH (J.), F. R. S., vicar of Stone. — A TREATISE ON SOME NEW GEOMETRICAL METHODS, containing essays on Tangential Coordinates, Pedal Coordinates, Reciprocal Polars, the Trigonometry of the Parabola, the geometrical origin of Logarithms, the geometrical properties of Elliptic Integrals, and other kindred subjects. — London, Longmans & Co.; 1873. In-8° en 2 vol.; t. I, 368 p.

Parmi les découvertes importantes, il en est qui apparaissent comme des conséquences naturelles des notions antérieurement acquises. Elles appartiennent quelquefois à plusieurs géomètres; elles sont publiées presque en même temps dans différents Mémoires; quelquefois aussi un savant les signale avant tous les autres; mais, comme elles constituent le développement nécessaire des progrès déjà acquis, nous comprenons qu'elles devaient nécessairement prendre place dans la Science par le seul effet des études communes des géomètres sur les idées fécondes introduites auparavant.

La découverte des coordonnées tangentielles est un des exemples les plus remarquables peut-être qu'on puisse citer à l'appui des remarques qui précèdent. La belle théorie des polaires réciproques créée par Brianchon et Poncelet, l'étude des relations entre les courbes et les polaires réciproques, combinées avec les notions dues à Descartes sur les systèmes de coordonnées, avaient conduit les géomètres à considérer les courbes sous un double point de vue. A l'ancienne génération des lieux géométriques par le mouvement d'un point était venue se joindre la notion corrélative de la génération des courbes par le déplacement d'une droite.

L'idée de définir les courbes par les propriétés de leurs tangentes ne pouvait tarder à apparaître; elle fut proposée presque en même temps par Plücker et par M. Chasles. Pourtant le Mémoire de Plücker est antérieur.

Dans ce travail, publié en 1829 [1], Plücker considère les coordonnées tangentielles sous la forme analytique qui leur a été conservée par presque tous les géomètres.

Étant donnée une droite par l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 6, p. 167.

u, v, w sont appelés par Plücker les coordonnées homogènes de la ligne droite, et toute équation homogène entre ces quantités représente une courbe au même titre que les équations en coordonnées ordinaires. Plücker divise toutes les équations en coordonnées tangentielles d'après leur degré, qui constitue la classe de la courbe, et il commence une étude détaillée de son système de coordonnées. Il discute le point ou lieu de première classe; puis il étudie les lieux de seconde classe, dont il donne plusieurs belles propriétés, et l'on peut dire qu'il a bien compris toute l'importance du nouvel instrument analytique qu'il avait déduit, de son propre aveu, de la méthode des polaires réciproques. A la fin de son travail, il annonce ensuite de nouvelles recherches, devant paraître dans les *Analytisch-geometrischen Entwicklungen,* qui étaient alors sous presse et qui ont en effet paru en 1828 et 1831.

En même temps que Plücker, M. Chasles s'occupait aussi des systèmes de coordonnées propres à représenter une courbe par ses tangentes ou une surface par ses plans tangents. Ayant appris par la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quetelet la publication de Plücker, il s'empressa d'écrire, le 10 décembre 1829, à M. Quetelet une lettre dont nous reproduisons quelques passages :

« M'étant aussi occupé d'un nouveau système de coordonnées, propre à un grand nombre de questions auxquelles les systèmes usités ne s'appliquent pas, je m'empresse de vous en faire connaître très-rapidement le principe, pour donner date à mon travail dans le cas où je me serais rencontré avec M. Plücker.

» Vous vous rappellerez peut-être, Monsieur, que, dans ma lettre du 11 juin dernier, j'avais l'honneur de vous dire que je terminais un travail par un essai sur une méthode propre à la démonstration directe d'un grand nombre de propositions déjà connues, par divers modes de transformation.

» J'ai eu occasion aussi d'annoncer cet écrit à M. Hachette dans une lettre du 5 juillet. « Je me suis occupé, disais-je, d'un nouveau » mode d'application de l'Algèbre à la Géométrie, qui se prête à la » démonstration de propriétés toutes nouvelles des figures, qu'il me » paraîtrait difficile de traiter par les systèmes de coordonnées en » usage. Voici quelques-unes de ces propriétés.... »

Après ces remarques, l'illustre géomètre définit son système de coordonnées. « Par trois points fixes A, B, C, je mène trois axes parallèles entre eux. Un plan quelconque rencontre ces axes en trois points, dont les distances aux points A, B, C sont les coordonnées x, y, z du plan. Une équation $F(x, y, z)$ entre ces coordonnées donne lieu à une infinité de plans, et représente par conséquent la surface enveloppe de ces plans. »

Pour les personnes au courant de ces questions, il ne peut y avoir de doute : le système de M. Chasles était tout aussi général que celui de Plücker; M. Chasles, comme Plücker, avait, dès le début, envisagé la question avec tout le degré de généralité qu'elle a comporté jusqu'à l'introduction des coordonnées tétraédriques.

Après avoir fait des applications de ce premier système, et au nombre de ces applications s'en trouve une très-belle sur le centre des moyennes distances des points de contact des plans tangents parallèles à une direction donnée, M. Chasles en indique un second, équivalant à la notion la plus générale des coordonnées tangentielles tétraédriques, et enfin, dans une Note supplémentaire, il indique encore de nouveaux théorèmes, conséquences de ses méthodes.

M. Booth, de son côté, eut connaissance de la lettre de M. Chasles; ses réflexions et ses études sur la méthode des polaires réciproques le conduisirent à édifier un ouvrage entier sur les nouveaux systèmes de coordonnées, qui parut en mars 1840, et fut accueilli avec faveur par les géomètres. C'est le premier volume de la seconde édition que l'auteur présente aujourd'hui au public mathématicien. Nous allons analyser rapidement le contenu de ce premier volume.

Les deux premiers Chapitres traitent du point, de la ligne droite dans le plan et des sections coniques. Les Chapitres III et IV traitent de différentes applications des principes et de la parabole. Les Chapitres V et VI sont consacrés à la ligne droite, au point et au plan dans l'espace. Les Chapitres VII, VIII et IX traitent des surfaces du second ordre, et en particulier des paraboloïdes. Le Chapitre X a pour objet l'application de l'Algèbre à la théorie des polaires réciproques.

Le Chapitre XI traite des surfaces concycliques, c'est-à-dire des polaires réciproques des surfaces homofocales, et le Chapitre suivant de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.

Les développements donnés jusqu'ici peuvent être considérés comme la partie classique, élémentaire de l'Ouvrage. L'Auteur applique ensuite la méthode des coordonnées tangentielles à la recherche des propriétés des courbes transcendantes et autres courbes d'un ordre supérieur au second. Citons les épicycloïdes et hypocycloïdes, les courbes parallèles, les développées, les pédales ou podaires, et toutes les questions qui se rattachent à ces courbes, rayons de courbure, rectification des courbes planes, etc.

Le Chapitre XXIV et les suivants traitent de la théorie géométrique des polaires réciproques, de son application au développement d'une nouvelle méthode pour dériver les propriétés d'une surface du second ordre, à trois axes inégaux, de celles d'une sphère, et à l'examen de plusieurs théorèmes et problèmes réellement intéressants : propriétés des surfaces de révolution, surfaces concycliques, etc.

Avec le Chapitre XXIX l'Auteur aborde les relations métriques. La théorie de la logocyclique, la trigonométrie de la parabole, et l'origine géométrique des logarithmes, qui forment la matière des Chapitres XXX à XXXIII, donnent lieu à des propositions très-variées. Le premier volume se termine par un Chapitre consacré aux surfaces homofocales.

Tel est, rapidement indiqué, le contenu de cette première Partie de l'Ouvrage. On sent, en le lisant, que l'auteur a travaillé longtemps et avec soin les questions sur lesquelles il écrit. A toutes les pages l'Ouvrage porte une empreinte personnelle, qui le distingue d'une foule d'autres Traités sur le même sujet : nous le recommandons volontiers et aux professeurs et aux élèves.

G. D.