Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 116-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__116_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXVII, 1873, 2e semestre (suite).

N° 15. Séance du 13 octobre 1873.

N° 16. Séance du 20 octobre 1873.

BERTRAND (J.). — *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe.*

« Les orbites planétaires sont des courbes fermées; c'est la cause principale de la stabilité de notre système, et cette circonstance importante résulte de la loi d'attraction qui, quelles que soient les circonstances initiales, fait mouvoir chaque corps céleste, qui n'est pas expulsé de notre système, suivant la circonférence d'une ellipse. On n'a pas remarqué jusqu'ici que la loi d'attraction newtonienne est la seule qui remplisse cette condition.

» Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d'attraction *permettent* des orbites fermées; mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.

» On démontre ce théorème de la manière suivante :

» Soit $\varphi(r)$ l'attraction exercée à la distance r sur la molécule considérée, et dirigée vers le centre d'attraction, que nous prendrons pour origine des coordonnées. r et θ désignant les deux coordonnées polaires du mobile, on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\varphi(r) = \frac{h^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

et, en posant $\frac{1}{r} = z$, $r^2\varphi(r) = \psi(z)$,

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{h^2}\psi(z) = 0. \tag{1}$$

Multiplions les deux membres par $2\,dz$ et intégrons; en posant

$$2\int \psi(z)\,dz = \varpi(z), \tag{2}$$

nous aurons

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{h^2}\varpi(z) - h = 0,$$

h étant une constante.

» On en déduit

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{h^2}\varpi(z) - z^2}}.$$

» Si la courbe représentée par l'équation qui lie z à θ est fermée, la valeur de z aura des maxima et des minima pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul, et les rayons vecteurs correspondants, normaux à la trajectoire, seront nécessairement pour elle des axes de symétrie. Or, quand une courbe admet deux axes de symétrie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fermée est que leur angle soit commensurable avec π. Si donc α et β représentent un minimum de z et le maximum qui le suit, la condition demandée est exprimée par l'équation

$$(3) \qquad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}},$$

où m désigne un nombre commensurable. Cette équation doit avoir lieu, quels que soient h et k et, par suite, les limites α et β qui en dépendent.

» On a

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\alpha) - \alpha^2 = 0,$$

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\beta) - \beta^2 = 0;$$

par conséquent

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

$$h = \frac{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \quad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]}}.$$

» La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de α et de β. Le nombre commensurable m doit d'ailleurs être constant; car, s'il changeait d'une orbite à l'autre, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans le nombre et la disposition des axes de symétrie de la trajectoire.

» Supposons α et β infiniment peu différents; soit

$$\beta = \alpha + u,$$

z restant compris entre α et β, nous pouvons poser

$$z = \alpha + y,$$

et y sera, comme u, infiniment petit. Nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)} = \sqrt{u\varpi'(\alpha)}.$$

Dans l'expression placée sous le radical au dénominateur de l'intégrale (4), les infiniment petits du premier ordre se réduisent à zéro, et il en est de même de ceux du second; ce sont ceux du troisième qu'il faut conserver, et l'on a, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\begin{aligned}\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]\\ = [\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)](u^2 y - u y^2).\end{aligned}$$

L'équation (4) devient

$$m\pi = \int_0^u \frac{dy\sqrt{\varpi'(\alpha)}}{\sqrt{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}\sqrt{uy - y^2}},$$

c'est-à-dire, en effectuant l'intégration et supprimant les facteurs communs,

$$m = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}},$$

ou

$$(1 - m^2)\varpi'(\alpha) + m^2\alpha\varpi''(\alpha) = 0.$$

On en déduit

$$\varpi'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varpi(\alpha) = A\frac{\alpha^{2-\frac{1}{m^2}}}{2 - \frac{1}{m^2}} + B,$$

A et B désignant des constantes.

» D'après les relations supposées entre les fonctions ϖ, ψ et φ, il en résulte

$$\psi(z) = \frac{A}{2\,z^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{2}\,r^{\frac{1}{m^2}-3}.$$

Telle est la seule loi d'attraction possible, m y désignant un nombre commensurable quelconque ; mais il n'en résulte pas qu'elle remplisse, quel que soit m, toutes les conditions de l'énoncé. On doit avoir, en effet, pour toutes les valeurs de α et de β,

$$(6)\quad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{\beta^2}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}} + (\beta^2-\alpha^2)\dfrac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2\left(\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}\right)}}.$$

» Supposons d'abord $\frac{1}{m^2} - 2$ négatif ; posons $\alpha = 0$, $\beta = 1$, l'équation devient

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2}} = \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{m^2}-1}\,dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{1}{m^2}}}},$$

et l'équation (6) donne

$$m\pi = m^2\pi, \quad m = 1.$$

La loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}.$$

» Si l'on suppose $\frac{1}{m^2} - 2$ positif, l'équation (6) devient, pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit $m = \frac{1}{2}$, et la loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = A\,r.$$

» Deux lois seulement remplissent donc les conditions demandées, celle de la nature, par laquelle l'orbite fermée n'a qu'un axe de symétrie passant par le centre d'action, et l'attraction proportionnelle à la distance, pour laquelle il y en a deux.

» Notre illustre Correspondant M. Tchebychef, à qui j'ai communiqué la démonstration qui précède, m'a fait judicieusement observer que le théorème, inutile aujourd'hui pour la théorie si parfaite des planètes, pourra être utilement invoqué pour étendre aux étoiles doubles les lois de l'attraction newtonienne. »

FAYE. — *Sur les* Astronomische Mittheilungen *du Dr Rodolphe Wolf.*

FAYE. — *Sur l'explication des taches solaires proposée par le Dr Reye.*

D'AVOUT. — *Recherche d'une méthode facile pour mesurer la capacité des navires.*

La méthode d'approximation que donne l'auteur permet de calculer cette capacité par des formules qui ne contiennent que des mesures faciles à prendre, même sur des navires chargés.

No 17. Séance du 27 octobre 1873.

SECCHI (le P.). — *Réponse à une Note de M. Respighi, sur la grandeur des variations du diamètre solaire.*

No 18. Séance du 3 novembre 1873.

FAYE. — *Analyse et critique d'un « Essai sur la constitution et l'origine du système solaire,* par M. ROCHE ».

En terminant l'analyse du Livre de M. Roche, M. Faye ajoute :

« Le Livre nouveau de M. Roche ne se recommande pas seulement à l'attention de l'Académie par la vieille et légitime autorité scientifique de l'auteur, mais aussi par la nouveauté des résultats et un style assez clair pour rendre aisément accessibles les délicates questions de nos origines. Ce livre manquait dans la littérature astronomique, et M. Roche était probablement le seul auteur suffisamment préparé à l'écrire, grâce à ses travaux antérieurs. »

BERTRAND (J.). — *Action mutuelle des courants voltaïques.*

Il s'agit, dans cette Communication, de la loi nouvelle présentée par M. Helmholtz. Voici d'ailleurs l'historique de la question, que nous citerons textuellement, d'après M. Bertrand :

« Il y a deux ans environ, dans la séance du 23 octobre 1871, j'appelais l'attention de l'Académie sur une formule nouvelle proposée par un savant allemand, M. Helmholtz, et destinée par lui à remplacer la loi d'Ampère sur l'action élémentaire des courants.

» La loi nouvelle, je l'ai démontré, ne correspond à aucune force de grandeur et de direction déterminées s'exerçant entre les deux éléments, et cela seul, suivant moi, devait conduire à la rejeter. Une année plus tard, le 14 octobre 1872, je revenais sur la même question pour examiner la réponse faite par M. Helmholtz à mon objection, et insérée au tome LXXV du *Journal de Mathématiques*, publié à Berlin, par M. Borchardt.

» M. Helmholtz reconnaît sans difficulté qu'aucune force, d'après la loi qu'il propose, ne saurait représenter l'action d'un élément infiniment petit sur un élément infiniment petit; mais il n'y voit aucun argument décisif contre sa théorie : l'action de deux éléments se composera d'une force et d'un couple agissant sur chacun d'eux, et cela, dans son opinion, n'implique aucune contradiction.

» Mais en suivant jusqu'au bout les conséquences des principes admis, en calculant le moment du couple, on trouve que les forces qui le produisent devraient avoir une intensité finie.

» Quelle que soit la ténacité d'un fil, une infinité de forces, de grandeur finie, distribuées sur sa longueur, doivent en procurer la rupture; je l'ai montré avec détail dans la Note du 14 octobre 1872, croyant cette fois avoir établi rigoureusement l'impossibilité de la loi nouvelle.

» On me communique le *Compte rendu de l'Académie de Berlin*, du 6 février 1873. M. Helmholtz, revenant sur la question, n'a rien changé, je le vois, à ses convictions. J'ai traduit son Mémoire, assez court pour figurer aux *Comptes rendus*, et j'espère, après l'y avoir inséré en entier, montrer avec évidence, dans la séance prochaine, les causes précises de son illusion et l'inexactitude de ses formules. »

Suit la traduction du Mémoire ayant pour titre :

Comparaison de la loi d'Ampère et de celle de Neumann sur les forces électrodynamiques. (8 p. des *Comptes rendus*.)

SECCHI (le P.). — *Suite des observations des protubérances so-*

laires, pendant les six dernières rotations de l'astre, du 23 *avril au* 2 *octobre* 1873; *conséquences concernant la théorie des taches.*

MORIN (le général). — *Rapport sur un Mémoire de M.* GRAEFF, *sur l'application des courbes de débits à l'étude du régime des rivières et au calcul des effets produits par un système multiple de réservoirs.*

« Le nouveau travail présenté par M. Graeff se compose de deux parties distinctes : la première est relative aux questions qui concernent le régime des rivières et l'alimentation des canaux; la seconde traite de l'action simultanée d'un système multiple de réservoirs sur le régime d'une rivière. La méthode qu'il suit pour cette discussion est basée sur la représentation graphique des résultats des observations continues qu'il a fait recueillir depuis de longues années. »

Après avoir analysé ce Mémoire, le Rapporteur ajoute :

« La conclusion générale de cet important travail est empreinte de cette prudence que de longues observations inspirent aux ingénieurs expérimentés. »

Elle peut se résumer ainsi qu'il suit :

« L'effet d'un réservoir unique sur une région prochaine en aval est certain et peut être calculé avec un degré suffisant d'exactitude.

» Celui de plusieurs réservoirs, établis sur un même cours d'eau, est encore certain, quoique plus difficile à apprécier avec précision.

» Enfin, lorsqu'il existe à la fois des réservoirs sur le cours d'eau principal et sur des affluents, les incertitudes augmentent tellement, que ce système ne serait admissible que dans des cas tout à fait spéciaux.

» Aussi l'auteur est-il sagement d'avis, avec les ingénieurs les plus habiles, que le système multiple des réservoirs disséminés sur tous les affluents des grands fleuves ne peut être conseillé par la prudence. »

M. le Rapporteur conclut à l'insertion du Mémoire de M. Graeff dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers.*

OUDEMANS. — *Observations relatives à une Communication de M.* Edm. DUBOIS, *sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

N° 19. Séance du 10 novembre 1873.

Bertrand (J.). — *Examen de la loi proposée par M.* Helmholtz, *pour représenter l'action de deux éléments de courant.*

Après avoir rappelé l'origine de la loi proposée par M. Helmholtz, M. Bertrand montre d'abord l'impossibilité de l'hypothèse proposée, et établit ensuite l'inexactitude des formules nouvelles, données par M. Helmholtz, qui ne s'accordent même pas avec l'hypothèse dont il croit les déduire.

Mathieu (Ém.). — *Mémoire sur le Problème des trois Corps.*

On sait qu'on peut ramener la question à l'intégration de huit équations différentielles ayant la forme hamiltonienne; M. Mathieu suppose ces huit équations intégrées, et il se propose seulement de montrer comment on pourra éviter les éliminations, qui seraient probablement fort pénibles, pour exprimer les coordonnées des trois Corps en fonction du temps; il prouve qu'on n'aura plus qu'à faire des quadratures et à intégrer une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Marchand (E.). — *De l'influence exercée par la Lune sur les phénomènes météorologiques.*

N° 20. Séance du 17 novembre 1873.

Faye. — *Réponse aux remarques de M.* Tarry, *sur la théorie des taches solaires.*

Dubois (E.). — *Réponse aux observations de M.* Oudemans, *sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

Reye (Th.). — *Réponse à M.* Faye, *concernant les taches solaires.*

Spottiswoode (W.). — *Sur les plans tangents triples à une surface.*

N° 21. Séance du 24 novembre 1873.

Marié-Davy. — *Observations, à propos d'une Note récente de*

M. Reye, *sur les analogies qui existent entre les taches solaires et les tourbillons de notre atmosphère.*

Parville (H. de). — *Note sur les cyclones terrestres et sur les cyclones solaires.*

Flammarion (C.). — *Orbite apparente et période de révolution de l'étoile double ξ de la Grande Ourse.*

La période de révolution est d'environ soixante ans sept mois.

Moutier (J.). — *Note sur la décharge des conducteurs électrisés.*

JOURNAL de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville (1).

T. XVII; 2e série; 1872 (suite).

Mathieu (E.). — *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique.* (75 p.)

Dans le Mémoire actuel, l'auteur se propose de trouver les intégrales générales des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-a^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

dans des corps de forme quelconque, en les supposant continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Dans un premier paragraphe, il passe en revue diverses expressions qui satisfont aux équations aux différences partielles de la Physique mathématique (20 p.), et donne ensuite le développement en séries de certaines fonctions qui se présentent fréquemment dans ces études. (19 p.)

Voici les propositions principales énoncées par M. Mathieu, en résumant les recherches faites dans ce Mémoire :

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 379.

« 1° Toute fonction qui satisfait à l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\alpha^2 u,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour expression

$$\int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément $d\sigma$, et r la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$.

» Toute fonction qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\alpha^2 u$$

dans l'intérieur d'une ligne s et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, est exprimée par la formule

$$\int \mathrm{N}\rho \, ds, \quad \text{où} \quad \mathrm{N}=\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\log(r \sin^2\omega)\, d\omega,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément ds, et r la distance du point (x, y) à l'élément ds.

» 2° Si une fonction u satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

dans l'intérieur d'une surface σ, et satisfait aux conditions précédentes de continuité, elle est donnée par la formule

$$u=\int \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r+2a\varepsilon\sqrt{t},\, \theta,\, \psi)\, e^{-\varepsilon^2}\, d\varepsilon\, d\sigma,$$

f étant une fonction arbitraire de trois quantités, r la distance du point (x, y, z) intérieur à σ à l'élément $d\sigma$, et θ et ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de cette surface.

» La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

est

$$u = \int \psi(r, t, \upsilon)\, ds,$$

où

$$\psi(r, t, \upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} F(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, \upsilon) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\alpha^2} d\omega,$$

$F(r, \upsilon)$ étant une fonction arbitraire de deux variables, et υ une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s qui limite l'espace dans lequel a lieu l'équation précédente.

» 3° La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dans l'intérieur d'une surface σ est donnée par la formule

$$u = \int \frac{f(r + at, \theta, \psi) + F(r - at, \theta, \psi)}{r}\, d\sigma,$$

f et F étant des fonctions arbitraires de trois variables, et θ, ψ étant deux coordonnées qui servent à déterminer un point de la surface σ.

» Si une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y, et du temps t satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dans l'intérieur d'une courbe s, cette fonction est de la forme

$$u = \int \psi(r, t, \upsilon)\, dr,$$

avec

$$\psi(r, t, \upsilon) = \int_0^{\pi} F(r\cos\omega + at, \upsilon) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

en désignant par $F(r, \upsilon)$ une fonction arbitraire de deux variables, et par υ une coordonnée propre à déterminer un point de contour. »

Funérailles de M. Duhamel. — *Discours de M.* Jamin, membre de l'Institut, au nom de la Section de Physique (4 p.)

Funérailles de M. E. Laugier.

Discours de M. Faye, président de l'Académie des Sciences, au nom de l'Académie. (3 p.)

Discours de M. Delaunay, membre de l'Institut, au nom du Bureau des Longitudes. (4 p.)

Discours de M. Jurien de la Gravière, membre de l'Institut, au nom de la Marine. (2 p.)

Marie (M.). — *Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville.* (11 p.)

Il s'agit, dans cette Note, de diverses remarques sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire de la suite des points d'un lieu plan pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel.

Funérailles de M. Delaunay. — *Discours de M.* Faye, président de l'Académie des Sciences, au nom de l'Académie. (3 p.)

Jordan (C.). — *Recherches sur les substitutions.* (17 p.)

L'auteur s'est proposé de résoudre la question suivante :

Déterminer à quelles conditions doivent satisfaire les deux entiers m et k pour qu'il existe des groupes $k+12$ fois transitifs, de degré $m+k$ et d'ordre $(m+k)(m+k-1)\ldots m(m-1)$;

Et il démontre que :

1° *Le nombre m doit être premier ou puissance d'un nombre premier;*

2° *Le nombre k ne peut surpasser l'unité.*

Les seuls groupes qui fassent exception à cette dernière règle sont les groupes symétriques ou alternés, et les groupes de onze et douze lettres de M. Mathieu. Ce dernier groupe n'est donc pas, comme le groupe trois fois transitif de six lettres, le premier anneau d'une série. Il reste unique de son espèce.

« Si p est un nombre premier >3, il existera trois groupes primitifs de la classe p, lorsque $p+1$ est une puissance de 2, un seul dans le cas contraire. »

Jordan (C.). — *Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions.* (35 p.)

La question que M. Jordan se propose de résoudre est la suivante :

« Déterminer le nombre des solutions de la congruence du second degré à m inconnues

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots \equiv c \,(\text{mod. M}). \text{ »}$$

Le problème se ramène immédiatement au cas où le module M est une puissance d'un nombre premier. Le principe de la méthode développée par l'auteur repose sur la propriété des congruences du second degré de pouvoir se réduire par un changement de variables à des formes plus simples dites *canoniques*.

MANNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand.* (3 p.)

Il s'agit de la relation établie par M. Bertrand entre les positions de deux normales à une surface, menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un même point (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343).

MANNHEIM (A.). — *Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes* (12 p.)

M. Bertrand avait donné le premier la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332). M. Mannheim se propose d'étudier la surface gauche engendrée par les normales principales de deux courbes, en faisant intervenir les propriétés des *pinceaux de droites* et des *normalies* qu'il a données dans son Mémoire, inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 109 (1). Après avoir transformé la question, M. Mannheim démontre très-simplement les relations énoncées par M. Bertrand, dont MM. P. Serret et Curtis avaient déjà donné des démonstrations géométriques (*Théorie nouvelle, géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 109, et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. I, p. 223); il signale ensuite plusieurs propriétés intéressantes et nouvelles de la surface gauche en question.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 382.

Mathieu (É.). — *Sur la publication d'un cours de Physique mathématique, professé à Paris en 1867 et 1868* (1). (4 p.)

Laurent (H.). — *Sur un théorème de Poisson.* (4 p.)

Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ étant les intégrales d'un problème de Dynamique dont les variables sont $q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$, M. Laurent généralise le théorème de Poisson, en démontrant que les expressions de la forme

$$\sum_{ij} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho)}{D(q_i, q_j, p_i, p_j)}, \quad \sum_{ijk} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)}{D(q_i, q_j, q_k, p_i, p_j, p_k)}, \ldots$$

restent constantes pendant toute la durée du mouvement; les notations, sous les signes sommatoires, désignent les déterminants fonctionnels.

Graindorge (J.). — *Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* (7 p.)

T. XVIII; 2e série; 1873.

Dieu. — *Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement.* (24 p.)

M. Dieu établit d'abord les équations générales du mouvement pour le cas d'une courbe quelconque, et énonce, en passant, cette proposition :

« La moitié de la différentielle de la force vive est égale à la différence entre les travaux élémentaires dus à la force appliquée et au frottement de la courbe fixe sur le mobile. »

Il applique ensuite ses formules générales, et discute, avec beaucoup de soin, les circonstances intéressantes du mouvement pour les cas suivants :

1. La courbe fixe est une droite indéfinie; la force P est quelconque.

2. La courbe fixe est une circonférence située dans un plan vertical; la force P est le poids du mobile.

3. La courbe fixe est une parabole dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force P est le poids du mobile.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 231.

4. La courbe fixe est une cycloïde dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force est le poids du mobile.

5. La courbe fixe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical; la force P est le poids du mobile.

Mathieu (É.). — *Sur la fonction cinq fois transitive de vingt-quatre quantités.* (22 p.)

Dans un Mémoire *Sur les fonctions de plusieurs quantités*, publié dans le tome VI (2e série; 1861) du *Journal de Mathématiques*, M. Mathieu avait annoncé qu'il possédait une fonction cinq fois transitive de vingt-quatre quantités, en se contentant d'en indiquer le nombre des valeurs distinctes; il se propose, dans la Note actuelle, de montrer comment il était parvenu à la découvrir.

Après avoir donné quelques indications sur son procédé de recherche, il l'applique à la détermination des fonctions transitives de 7, 11 et 23 lettres; il en conclut les fonctions transitives de 8, 12 et 24 lettres.

L'auteur termine son Mémoire en remarquant que les fonctions transitives de 7, 11 et 23 quantités, et celles de 8, 12 et 24, sont dues à ce que les nombres premiers 7, 11 et 23 sont des doubles de nombres premiers augmentés d'une unité; et qu'une fonction transitive, dont le nombre des lettres est à la fois un nombre premier et le double d'un nombre premier augmenté d'une unité, est au moins deux fois transitive.

Boussinesq (J.). — *Addition au Mémoire sur la théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc.* (6 p.)

Cette Note a pour objet une démonstration nouvelle, sans l'hypothèse restrictive qui avait d'abord été adoptée, de la formule fondamentale (14) du Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII (1872).

Marie (M.). — *Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor.* (15 p.)

Marie (M.). — *Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des positions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir* *le développement de cette fonction suivant la série de Taylor.* (33 p.)

M. Marie appelle *point critique* d'un lieu $f(x, y) = 0$ le point réel ou imaginaire qui a pour coordonnées la valeur de x à laquelle correspond une *valeur critique* de y, et cette valeur de y; parmi les m points du lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, qui correspondent à une valeur critique de x, il appelle *critique* celui dont l'ordonnée est infinie ou dont l'ordonnée a ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre.

Après avoir ainsi précisé la nature des points critiques, l'auteur indique la marche qu'on devra suivre pour les déterminer : c'est là l'objet du premier Mémoire. Le second Mémoire est consacré à la détermination du périmètre de la région de convergence; après avoir établi plusieurs théorèmes, et montré comment ces théorèmes permettent de se rendre compte de la forme que doit affecter, dans chaque cas, la limite de la région de convergence et de la manière dont cette limite change, l'auteur applique sa méthode aux deux équations

$$xy = \frac{c^2}{4}, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Bourget (J.). — *Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice.* (28 p.)

Il serait difficile d'analyser en détail les calculs de cet élégant Mémoire; nous n'avons rien de mieux à faire que d'en citer textuellement l'*Introduction,* qui précise nettement l'état de la question et fait bien connaître la nature de la solution que présente M. Bourget.

« La fonction perturbatrice est

$$R = \frac{rr' \cos\delta}{r'^3} - \frac{1}{\rho},$$

en nommant

r, r' les distances au Soleil des deux planètes m et m',
δ la distance apparente des deux planètes vues du Soleil,
ρ leur distance vraie.

» Il est facile de calculer les perturbations de la planète m, produites par m', quand on a développé R suivant les puissances des exponentielles imaginaires E^{iT}, $E^{iT'}$, E désignant la base des logarithmes népériens, et i le symbole $\sqrt{-1}$. On sait que chacun des termes de cette série, uni à son conjugué, fournit, au moyen d'un système d'équations différentielles simultanées, une inégalité du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice.

» Le développement de R est un problème difficile, non pas en lui-même, mais par la longueur des calculs qui s'y rapportent. On cherche habituellement à exprimer le coefficient du terme général $E^{(n'T'+nT)i}$, que nous désignerons par $A_{n,n'}$, en séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons des deux planètes, quantités petites dans le plus grand nombre des cas. Pour obtenir ce résultat, on suit le plus souvent la méthode donnée par Laplace dans la *Mécanique céleste;* mais, comme les calculs y sont superposés, on ne peut point par cette voie obtenir un terme isolé du développement; de plus, la moindre erreur dans les longs calculs que l'on est obligé de faire quand on veut aller jusqu'à un ordre élevé entraîne à d'autres erreurs, qu'il est impossible de corriger sans reprendre en entier tout le travail.

» On comprend donc l'importance d'une méthode qui permettrait de trouver, sous forme algébrique, un coefficient déterminé $A_{n,n'}$, par une série d'opérations simples, faciles à répéter, et ne dépendant d'aucune autre.

» Cette méthode a été indiquée pour la première fois par Cauchy [1]. J'ai présenté moi-même deux Mémoires à l'Institut, dans lesquels j'apportais quelques perfectionnements aux calculs de l'illustre géomètre [2]. M. Puiseux, de son côté, a publié dans le *Journal de M. Liouville* deux articles sur le même sujet [3]. C'est en lisant son travail qu'il m'a semblé possible de simplifier encore notablement la solution du problème du développement de R, par l'introduction des transcendantes de Bessel. J'ai déjà montré, dans deux autres Mémoires, que ces transcendantes fournissent une solution très-élégante du problème de Kepler et d'autres problèmes analogues [4], et qu'elles permettent de calculer par interpolation les coefficients des divers termes de la fonction perturbatrice [5].

(1) *Comptes rendus de l'Académie*, t. XI.
(2) *Comptes rendus de l'Académie*, 1856, mars, juillet.
(3) *Journal de Liouville*, 1860.
(4) *Journal de Liouville*, 1861.
(5) *Annales de l'Observatoire*, t. VII.

» En résumé, j'arrive à une expression très-simple du terme général de la fonction perturbatrice; mais les quantités petites, suivant lesquelles s'ordonnent les développements en séries, ne sont pas les quantités habituelles. L'excentricité e est remplacée par $\eta = \text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$, ψ étant donné par $e = \sin\psi$; l'excentricité entre aussi dans les transcendantes de Bessel définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du, \quad \text{où} \quad x = \mathrm{E}^{u\sqrt{-1}} = \mathrm{E}^{ui},$$

et l'on sait que chaque transcendante est de l'ordre marqué par la valeur absolue de son indice j. Enfin l'inclinaison mutuelle des orbites y entre par la quantité $\upsilon = \sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}$, qui est du second ordre. Les séries de notre développement procèdent donc suivant les puissance de η, η' υ, et suivant les facteurs $(o, n)_j$, $(o, n')_{j'}$. La symétrie des résultats nous semble faire compensation à l'accroissement du nombre des lettres ordonnatrices.

» Nous remarquerons aussi que nous évitons l'emploi des transcendantes $b_s^{(i)}$ de Laplace; chaque terme de $\mathrm{A}_{n,n'}$ se présente sous forme de série ordonnée suivant les puissances de $\alpha = \frac{a}{a'}$.

» Pour arriver à l'expression explicite d'un coefficient correspondant à un argument donné, ou encore pour trouver tous les termes d'un ordre donné, il suffit de résoudre en nombre entiers et positifs certaines équations de la forme

$$x + y + z + t + u + v = n.$$

La simplicité et la régularité de cette opération permettent d'éviter toute erreur dans le résultat final. »

Graindorge (J.). — *Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles.* (10 p.)

Voici quelques-uns des résultats donnés par M. Graindorge :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48}(3\pi - 2\varphi),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2},$$

$$\int_0^1 l(1 - 2x\cos\varphi + x^2)\frac{dx}{x} = \varphi\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi^2 \quad .$$

Besge. — *Sur une équation différentielle.* (3 p.)

L'équation différentielle

$$(1) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py^2,$$

où p est une fonction donnée de la variable indépendante x, se ramène à la forme

$$(2) \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p,$$

en posant $y = e^{\int 2\sigma dx}$; c'est la forme à laquelle se ramènerait l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dx} = pu,$$

en posant $u = e^{\int \sigma dx}$.

Liouville (J.). — *Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques.* (3 p.)

Liouville (E.). — *Sur la statistique judiciaire.* (18 p.)

Bienaymé. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1870). (10 p.)

Bienaymé. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1871). (6 p.)

Puiseux (V.). — *Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie, par M. Maximilien Marie, et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor. »* (5 p.)

Il s'agit des deux Mémoires cités ci-dessus. Le Rapport de M. Puiseux a été inséré *in extenso* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. V, p. 126; 1873.

Marie (M.). — *Note au sujet du Rapport précédent.* (17 p.)

Après avoir rappelé la suite de ses recherches et résumé la théorie de la série de Taylor, M. Marie présente plusieurs observations relatives au Rapport précédent.

Chasles. — *Détermination immédiate, par le principe de cor-*

respondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie. (10 p.)

Chasles. — *Note relative à la question précédente* (¹). (8 p.)

Darboux (G.). — *Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré.* (16 p.)

La méthode suivie par M. Darboux met en évidence, sans faire appel à la théorie des invariants, les éléments essentiels qui figurent dans les différentes solutions. L'auteur fait dépendre la résolution d'une équation biquadratique de la détermination des points communs à deux coniques; c'est-à-dire qu'il considère d'abord un système de deux fonctions du second degré, homogènes, à trois variables, et qu'il en fait le point de départ de son analyse pour établir les relations préliminaires qui doivent le conduire aux différents modes de résolution de l'équation du quatrième degré. Il retrouve ainsi, d'abord la belle méthode de M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 52), puis celle de M. Cayley. M. Darboux donne ensuite l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de trois radicaux qui contiennent les carrés des racines de l'équation résolvante; c'est un résultat nouveau. Il déduit de là les formules de M. Aronhold, puis le résultat important obtenu par M. Hermite dans sa méthode de résolution de l'équation du troisième degré par les fonctions elliptiques.

Darboux (G.). — *Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues.* (5 p.)

La question consiste à déterminer en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de x, y, s, satisfaisant à l'équation proposée et débarrassées de tout signe d'intégration. M. Darboux retrouve, par un procédé simple, les formules qu'Euler avait données pour l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

Il résout ensuite la question pour les équations

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

(¹) Voir *Bulletin*, 1873, t. IV, p. 78; t. V, p. 122.

Levy (M.). — *Sur une théorie rationnelle des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement.* (60 p.)

Dans le premier paragraphe de son Mémoire, M. Levy définit l'objet de son travail et résume les résultats obtenus ; nous le citerons textuellement :

« Les formules ou règles géométriques, d'après lesquelles les Ingénieurs français calculent l'épaisseur des grands murs de soutènement, sont dues au colonel Audoy (*Mémorial de l'Officier du Génie,* n° 11), au général Poncelet (*id.,* n° 13), et à M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques,* t. IX, 1844). Elles sont toutes fondées sur cette double hypothèse, due à Coulomb, que dans un massif de terre dont l'équilibre se rompt les surfaces de glissement ou de *rupture des terres* sont planes, et détachent du massif des prismes exerçant sur les murs qui les soutiennent des pressions maxima.

» En soumettant ces hypothèses à l'analyse, j'ai reconnu que, sauf dans deux cas très-particuliers, elles sont mathématiquement incompatibles. Malgré cela, on éprouve une certaine hésitation à les rejeter à cause de l'autorité des noms qui s'y attachent, et parce qu'elles sont extrêmement ingénieuses, et aussi parce qu'il semble au premier abord qu'on ne saurait les abandonner sans les remplacer par d'autres hypothèses plus ou moins douteuses et sujettes à leur tour à être condamnées par une analyse mathématique trop rigoureuse. Il n'en est heureusement pas ainsi ; on peut étudier les surfaces de glissement des terres en toute rigueur et sans aucune idée préconçue quant à leur forme ou leur nature. Posée dans ces termes, la question cesse d'appartenir à la Mécanique empirique pour entrer dans le domaine de la Mécanique rationnelle et de la Géométrie. Elle acquiert ainsi un véritable intérêt scientifique, tout en conduisant, dans les cas ordinaires de la pratique, à des formules et à des constructions géométriques notablement plus simples que celles dont les Ingénieurs ont l'habitude de se servir.

» C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail. En le faisant, je n'abandonne pas ce que je regarde comme véritablement fondamental et fécond dans la pensée de Coulomb : l'idée même d'étudier la poussée des terres au moyen des surfaces de rupture qui s'y produiraient si leur équilibre venait à être brusquement rompu, cette idée, je la conserve tout entière, mais en la dégageant des hypothèses dont elle est jusqu'ici demeurée enveloppée.

» Je commence par étudier la répartition des pressions dans un massif de terre terminé par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales, quelle que soit la forme de la section droite du prisme ou du cylindre.

» J'examine ensuite plus particulièrement le cas pratique d'un massif limité par un talus plan indéfini d'une inclinaison quelconque, et je détermine les pressions exercées sur un mur de soutènement plan dans un semblable massif.

» Je montre combien mes formules sont simples par rapport à celles que donnent les hypothèses de Coulomb. Enfin je termine en établissant l'impossibilité mathématique que présentent en général ces hypothèses.

» Mon travail est suivi d'une Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions que subit un mur de soutènement. »

Voici maintenant les titres des divers paragraphes contenus dans le Mémoire de M. Maurice Levy :

II. Propriétés générales des terres en équilibre.

III. Équilibre d'un massif de terre terminé par un talus plan indéfini.

IV. Stabilité des murs de soutènement.

V. Impossibilité de la théorie de Coulomb telle qu'elle ~~a été~~ appliquée jusqu'ici.

VI. Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions exercées sur un mur de soutènement.

Une première rédaction de ce Mémoire a été présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 3 juin 1867 : son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été ordonnée par l'Académie le 7 février 1870.

Serret (J.-A.). — *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (4 p.)

Nous donnons plus loin (p. 140) une analyse de cette Note.

Boussinesq (J.). — *Recherches sur les principes de la Mécanique,* *sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits.* (56 p.)

Ce long Mémoire est divisé en neuf paragraphes, dont les titres suivent :

I. Points matériels, vitesses et accélérations.

II. Principes des forces vives et autres lois générales de la Mécanique.

III. Attraction newtonienne et actions moléculaires.

IV. Énergie actuelle et énergie potentielle.

V. Énergie physique ou moléculaire, et énergie chimique ou atomique.

VI. Éther, lumière et chaleur, température.

VII. Principe fondamental de la Thermodynamique.

VIII. Action moléculaire dans un corps isotrope; solidité et fluidité.

IX. Essai sur la théorie moléculaire des gaz.

Boussinesq (J.). — *Note complémentaire au Mémoire précédent.* — *Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au* § VI. (30 p.)

Boussinesq (J.). — *Note sur la théorie des tourbillons liquides.* (2 p.)

Villarceau (Y.). — *Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre.* (42 p.)

M. Villarceau a publié, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XII, p. 65, 1867) un premier théorème sur les attractions locales, qui établit une relation entre les effets de ces attractions sur les longitudes et les azimuts.

Depuis, M. Villarceau a fait connaître deux autres théorèmes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 28 décembre 1868, 2 octobre 1871, 7 août 1873), où figurent les latitudes combinées soit avec les longitudes, soit avec les azimuts, soit avec les deux éléments réunis. Ce sont les Mémoires où se trouvent ces théorèmes et leur application qui sont reproduits ici.

Le premier Mémoire donne le second théorème sur les attractions locales, et en présente l'application à une première détermination de la vraie figure de la Terre, fondée sur la comparaison des nivellements géométriques et géodésiques.

Le second Mémoire contient le troisième théorème et son application à une seconde détermination de la vraie figure de la Terre, obtenue sans le concours des nivellements proprement dits. On arrive à cette détermination en calculant la distance Δ d'un point M' de la surface de niveau cherchée au point M où la normale en M' à cette surface de niveau rencontre la surface de l'ellipsoïde de comparaison.

Dans un troisième Mémoire, l'auteur présente sous une nouvelle forme l'application de son troisième théorème à la détermination de la figure de la Terre. M. Villarceau fait ainsi connaître trois méthodes différentes pour aborder cette importante question de la figure de la Terre; il les compare avec soin et discute leurs avantages et leurs inconvénients respectifs.

Serret (J.-A.). — *Sur les fonctions entières suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (15 p.)

Nous réunissons ici l'analyse de ce Mémoire avec celle de la Note indiquée plus haut (p. 138).

ANALYSE DES DEUX ARTICLES PUBLIÉS PAR M. J.-A. SERRET :

1° *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (septembre 1873.)

2° *Sur les fonctions entières irréductibles suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (décembre 1873.)

I.

C'est à Galois que nous devons les premières des notions que nous possédons sur les congruences irréductibles d'un degré quelconque. M. Serret a constitué plus tard une théorie complète de ces congruences; ses recherches sur ce sujet important ont été publiées, pour la première fois, dans le tome XXXV du *Recueil des Mémoires de l'Académie des Sciences*, et l'auteur les a reproduites dans la troisième édition de son *Algèbre supérieure*.

M. Serret a fait connaître, dans le travail étendu dont nous venons de parler, les propriétés fondamentales des congruences irréductibles, c'est-à-dire des congruences obtenues en égalant à zéro, suivant un module premier p, les fonctions entières irréductibles prises suivant le même module. Il a donné en même temps l'expression du nombre total des fonctions entières irréductibles d'un degré quelconque, et il a établi à l'égard de ces fonctions une classification analogue à celle qui concerne les simples nombres entiers, dans la théorie ordinaire des nombres.

Parmi les problèmes qui se présentent dans la théorie dont il s'agit ici, l'un des plus importants est celui qui a pour objet *la formation d'une fonction entière d'un degré quelconque donné* ν, *irréductible suivant un module premier* p. Toutes les applications de la théorie reposent effectivement sur l'emploi d'une *racine imaginaire* d'une congruence irréductible.

La règle générale pour obtenir une telle congruence irréductible de degré ν consiste à diviser la fonction $x^{p^\nu} - x$, suivant le module p, par le produit des facteurs communs à cette fonction et aux fonctions $x^{p^\mu} - x$, où μ désigne les diviseurs de ν. Le quotient obtenu est décomposable en facteurs irréductibles, tous du degré ν, et l'on peut *théoriquement* déterminer ces facteurs par la méthode des coefficients indéterminés.

Cette règle est presque impraticable en raison de la longueur des calculs qu'elle exige, même dans les cas les plus simples. Aussi M. Serret s'est-il préoccupé, dans ses premières recherches, des moyens de former directement, pour chaque degré et pour chaque module, une fonction entière irréductible; une telle fonction de degré ν étant connue, la théorie indique le mode de formation de toutes les autres fonctions irréductibles du même degré. M. Serret a réussi à résoudre le problème qu'il s'était proposé dans deux cas, savoir : 1° lorsque le degré ν ne renferme aucun facteur premier différent de ceux qui divisent $p - 1$; 2° lorsque le degré ν est précisément égal au module p. Tel était encore l'état de la question, au moment où M. Serret a publié ses récentes recherches.

Dans son nouveau travail M. Serret s'occupe exclusivement des fonctions entières irréductibles suivant le module premier p, dont le degré est égal à p ou à une puissance quelconque de p. Son analyse repose sur la considération de la fonction

$$X_\mu \equiv x^{p^\mu} - \frac{\mu}{1} x^{p^{\mu-1}} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{p^{\mu-2}} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^{p^{\mu-3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} x^p + (-1)^\mu x \pmod{p},$$

où μ désigne un indice quelconque ; cette fonction satisfait à la congruence

$$X_{\mu+1} \equiv X_\mu^p - X_\mu \pmod{p}.$$

Nous nous bornerons à indiquer succinctement les résultats auxquels l'auteur est parvenu.

II.

Dans son premier article, M. Serret s'occupe de la recherche des fonctions entières du degré p, irréductibles suivant le module p. Désignant par V le produit de toutes ces fonctions, on a

$$V \equiv (X_1^{p-1} - 1)(X_2^{p-1} - 1)\ldots(X_{p-1}^{p-1} - 1) \pmod{p},$$

ce qui conduit naturellement à distinguer en différents *genres* les polynômes dont il s'agit. M. Serret nomme fonctions du $\lambda^{\text{ième}}$ genre celles dont le produit est égal à $X_\lambda^{p-1} - 1$, c'est-à-dire égal ou congru à

$$(X_\lambda - 1)(X_\lambda - 2)\ldots(X_\lambda - \overline{p-1}).$$

En particulier les fonctions entières du premier genre ont pour expression générale

$$x^p - x - g,$$

g désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$. M. Serret avait déjà considéré ces fonctions du premier genre dans ses premières recherches.

L'auteur nous fait connaître une propriété importante qui sert à caractériser les fonctions d'un même genre quelconque.

Si l'on prend ici, pour *base* des imaginaires, une racine i de la congruence irréductible

$$i^p - i - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

on a ce théorème :

Les racines des congruences obtenues en égalant à zéro les fonctions entières irréductibles suivant le module p, du degré p et du $\lambda^{\text{ième}}$ genre, sont exprimables par des fonctions entières de i dont le degré est précisément égal à λ.

C'est en se fondant sur cette propriété que M. Serret a obtenu l'expression générale des fonctions irréductibles d'un genre quelconque. Voici le théorème auquel il est parvenu :

Si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ désignent des nombres entiers indéterminés et que, pour abréger l'écriture, on fasse $a_k + a_{k-1} = a'_k$, les indices étant pris suivant le module p, de manière que a_p et a_0 représentent le même nombre, l'expression générale des fonctions entières $\mathrm{F}(x)$ de degré p, irréductibles suivant le module p, sera

$$\mathrm{F}(x) = -\begin{vmatrix} a_0 - x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a'_0 - x & a_1 & \ldots & a_{p-4} & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x & \ldots & a_{p-5} & a_{p-4} & a_{p-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a'_4 & a'_5 & \ldots & a'_0 - x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a'_3 & a'_4 & \ldots & a'_{p-1} & a'_0 - x & a_1 \\ a_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots & a'_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x \end{vmatrix}.$$

Si l'on ne veut comprendre dans cette formule que les fonctions du $\lambda^{\text{ième}}$ genre, on fera

$$a_{\lambda+1} = 0, \quad a_{\lambda+2} = 0, \ldots, \quad a_{p-1} = 0,$$

et aussi

$$a_{\lambda-1} = 0;$$

puis on donnera aux autres indéterminées les valeurs 0, 1, 2,..., $p-1$, *en exceptant toutefois la valeur zéro pour l'indéterminée* a_λ. *On obtiendra de la sorte les* $(p-1)p^{\lambda-1}$ *fonctions du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre.*

En particulier, on a :

1° pour $\lambda = 1$, $F(x) = x^p - x - a_1$,

2° pour $\lambda = 2$, $F(x) = (x-a_0)\left[(x-a_0)^{\frac{p-1}{2}} - a_2^{\frac{p-1}{2}}\right]^2 - a_2$.

Enfin, dans le $(p-1)^{\text{ième}}$ genre, M. Serret remarque les fonctions

$$F(x) = (x - a'_0)^p + a_{p-1}[(x-a'_0)^{p-1} - 1],$$

qui répondent au cas où les indéterminées $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ sont nulles, et qui ont cette propriété, que les racines de la congruence

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

sont des fonctions rationnelles fractionnaires et linéaires de l'une quelconque d'entre elles.

III.

Dans son second article, M. Serret considère les fonctions entières irréductibles dont le degré est une puissance quelconque du module p, et il fait connaître le mode de formation de ces fonctions.

Désignant par V_n le produit de toutes les fonctions entières de degré p^n, irréductibles suivant le module premier p, M. Serret trouve cette expression

$$V_n \equiv (X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+1}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+2}^{p-1} - 1)\ldots(X_{p^n-1}^{p-} - 1) \pmod{p},$$

et, procédant comme dans le cas de $n = 1$, il répartit en divers genres les facteurs irréductibles de V_n. Il nomme *fonctions irréductibles du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre* celles dont le produit est congru à $X_{p^{n-1}+\lambda-1}^{p-1} - 1$, fonction qui se décompose immédiatement en $p-1$ facteurs $X_{p^{n-1}+\lambda-1} - g$, g ayant les valeurs 1, 2, ..., $p-1$. Le nombre λ, qui marque le genre, peut prendre les valeurs

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad (p-1)p^{n-1},$$

et le dernier genre, celui qui répond à $\lambda = (p-1)p^{n-1}$, est dit par l'auteur le *genre principal.*

Cela posé, et avant d'entrer dans le fond du sujet, M. Serret établit le théorème suivant :

Soit $F(x)$ *une fonction entière du degré* p^n, *irréductible suivant le module premier* p. *Si cette fonction appartient au* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre supposé non principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *ou* $F(X_1)$ *sera réductible, et elle se décomposera en* p *facteurs du degré* p^n, *irréductibles suivant le module* p *et appartenant au* $(\lambda+1)^{\text{ième}}$ *genre. Mais, si la fonction* $F(x)$ *de degré* p^n *appartient au genre principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *sera elle-même irréductible suivant le module* p, *et elle appartiendra au premier genre des fonctions de degré* p^{n+1}.

Abordant ensuite le problème qu'il s'est proposé, l'auteur établit en premier lieu une règle générale pour former les fonctions entières, irréductibles du degré p^n et du premier genre. Nous nous bornerons ici à indiquer cette règle, dont la démonstration exige un certain développement.

Soit P_μ *une fonction entière et à coefficients entiers de* μ *quantités* $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, *qui ne renferme aucune puissance de ces quantités au delà de la* $(p-1)^{\text{ième}}$, *et dans laquelle le terme* $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ *figure avec un coefficient différent de zéro;* P_μ *se réduit à un simple nombre entier lorsque* $\mu = 0$. *Si l'on représente par*

$$F_n(X_1) \equiv 0 \pmod{p}$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *entre les congruences*

$$i_1^p - i_1 \equiv P_0,\quad i_2^p - i_2 \equiv P_1,\quad \ldots,\quad i_{n-1}^p - i_{n-1} \equiv P_{n-2} \pmod{p},$$

et

$$X_1 \equiv P_{n-1} \pmod{p},$$

$F_n(X_1)$ *ou, ce qui revient au même,* $F_n(x^p - x)$ *sera l'expression générale des fonctions entières de degré* p^n *et du premier genre, irréductibles suivant le module* p.

Il faut remarquer que l'on peut, sans diminuer la généralité du résultat, attribuer telles valeurs que l'on veut aux coefficients des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$; la seule restriction à observer est que le coefficient de $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ dans P_μ ne soit pas nul.

Il n'y a donc pas, dans $F_n(X_1)$, d'autres arbitraires que celles qui figurent dans P_{n-1}. Le nombre de celles-ci est p^{n-1}; mais M. Serret prouve que, pour l'élimination qu'il a en vue, on peut faire disparaître $n-1$ d'entre elles, en sorte qu'il n'existe en réalité que $p^{n-1} - n + 1$ coefficients indéterminés. Ces coefficients peuvent recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, à l'exception de l'un d'eux, qui ne peut être nul; il s'ensuit que le nombre des fonctions $F_n(X_1)$ est $(p-1)p^{p^{n-1}-n}$, ce qui résulte *a priori* de l'expression de V_n donnée plus haut.

Si l'on ne veut chercher qu'une seule fonction entière irréductible du degré p^n, le plus simple sera en général de réduire P_{n-1} au seul terme qui doit y figurer nécessairement, ou à ce terme augmenté d'une constante

Par exemple, dans le cas de $n = 2$, on posera

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1} \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1 entre ces deux congruences est

$$X_1^p + X_1^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

en conséquence, $X_1^p + X_1^{p-1} - 1$ ou $(x^p - x)^p + (x^p - x)^{p-1} - 1$ est une fonction irréductible du degré p^2 et du premier genre.

M. Serret fait encore l'application de sa règle au cas de $n = 3$. Il pose

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad i_2^p - i_2 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1}, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} i_2^{p-1} - 1 \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1, i_2 est

$$(X_1 + 1)^3 X_1 P^{p-2} - (X_1 + 1)^2 X_1 Q - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = X_1(X_1+1)(X_1^p + X_1^{p-1} - 1),$$

$$Q = X_1^{p-3} + \frac{4}{2}X_1^{p-5}P + \ldots + \frac{(\mu+2)(\mu+3)\ldots 2\mu}{2.3\ldots\mu}X_1^{p-2\mu-1}P^{\mu-1} + \ldots$$

$$+ \frac{\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-1)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}}P^{\frac{p-3}{2}}.$$

Le premier membre de la congruence précédente est une fonction entière irréductible du degré p^3 et du premier genre.

Après avoir traité avec détail le cas des fonctions entières irréductibles de degré p^n et du premier genre, M. Serret s'occupe des fonctions des divers genres. Le produit des fonctions d'un même genre quelconque peut être représenté par

$$X_\mu^{p-1} - 1,$$

l'indice μ ayant l'une quelconque des valeurs

$$p^{n-1},\quad p^{n-1}+1,\quad p^{n-1}+2,\ldots,\quad p^n - 1.$$

Voici la règle obtenue par M. Serret pour former les diviseurs irréductibles de la fonction $X_\mu^{p-1} - 1$.

L'indice μ étant mis sous la forme

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots + \alpha_{n-1}p^{n-1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des entiers positifs ou nuls et inférieurs à p, désignons par ξ_0 un entier arbitraire, et posons généralement

$$\xi_{k+1} = a_0^{(k)} - a_1^{(k)}i_{k+1} + a_2^{(k)}i_{k+1}^2 + \ldots + a_{\alpha_k-1}^{(k)}i_{k+1}^{\alpha_k-1} + i_{k+1}^{\alpha_k},$$

où $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots$ sont des fonctions entières de $i_1, i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ au plus, et se réduisent à des entiers dans le cas de $k=0$; la quantité ξ_{k+1} doit elle-même être réduite à l'unité dans le cas de $\alpha_k = 0$. Soit aussi P_k une fonction entière de i_1, $i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ par rapport à chacune de ces quantités, et qui n'est assujettie qu'à la seule condition que le terme

$i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_k^{p-1}$ *y figure avec le coefficient* $(-1)^k$. *Si l'on désigne par*

$$f_\mu(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *entre les congruences*

$$x \equiv \xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \quad (\text{mod. } p),$$

et

$$i_1^p - i_1 \equiv 1,\ i_2^p - i_2 \equiv P_1,\ i_3^p - i_3 \equiv P_2,\ \ldots,\ i_n^p - i_n \equiv P_{n-1} \ (\text{mod. } p),$$

$f_\mu(x)$ *sera l'expression générale des diviseurs irréductibles de* $X_\mu^{p-1} - 1$, *c'est-à-dire l'expression générale des fonctions entières irréductibles du degré* p^n *et d'un genre quelconque.*

PAMIĘTNIK TOWARZYSTWA NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU (¹).

La *Société des Sciences exactes,* fondée en 1860 par les Polonais résidant à Paris, et réorganisée en 1870, a pour but principal de recueillir et d'utiliser pour le pays les travaux scientifiques des Polonais dispersés à l'étranger. Elle publie tous les ans, depuis sa réorganisation, un Recueil de Mémoires originaux, écrits en polonais, et ayant pour objet les sciences mathématiques, physiques et naturelles, ainsi que leurs applications. Elle édite, en outre, séparément les Ouvrages ou Traités qui, à cause de leur étendue, ne pourraient entrer dans le cadre du Recueil. Nous indiquerons à la fin de cet article les titres des Ouvrages publiés jusqu'au commencement de l'année 1873.

Cette grande activité, déployée en si peu de temps, et dont les

(¹) *Mémoires de la Société des Sciences exactes, à Paris.* — Paris, librairie du Luxembourg, rue de Tournon, 16. Imprimerie de Rouge frères, Dunon et Fresné, rue du Four-Saint-Germain, 43. — Il paraît chaque année un volume grand in-4°.

Pour faciliter la lecture des noms propres, nous indiquerons quelques règles de la prononciation polonaise. Les lettres *a, b, d, e, f, i, k, l, m, n, o, p, r, t, x, z* se prononcent comme en français; *ch, g, h, j, u, w* comme en allemand; *c* = *ts* = *z* all.; *s* = *ç* fr., toujours dur; *ą* = *an* ou *on* nasal; *ę* = *in* dans *fin; é* se prononce très-fermé; *ó*, très-ouvert; *ń* = *gn* fr. dans *signe; cz* = *tch* fr.; *sz* = *ch* dans *chose; rz* = *ż* = *j* fr.; *ć, ł, ś, ź* ont une prononciation spéciale aux langues slaves. L'accent tonique est généralement sur la pénultième.

effets ont été ressentis de la manière la plus heureuse dans les anciennes provinces polonaises, où elle a contribué à stimuler le mouvement scientifique et à révéler les hommes de talent, est due en grande partie à la généreuse initiative du Président actuel de la Société, M. le comte Działyński, qui a bien voulu prendre à sa charge les frais considérables de ces publications. A. Potocki.

T. I; 1871.

Gosiewski (W.). — *Sur l'élasticité des corps solides homogènes.* (56 p.)

La théorie mathématique de l'élasticité, dont les bases ont été posées par les plus célèbres géomètres de notre temps, et qui est appelée, dans un avenir plus ou moins lointain, à expliquer tous les phénomènes de la Physique, est envisagée ici à un point de vue un peu différent de celui qu'on a adopté jusqu'à ce jour, et traitée par une méthode nouvelle.

Les définitions de l'homogénéité et des forces élastiques, ainsi que l'équation des moments, qui sert de point de départ à la recherche des lois fondamentales de l'élasticité, sont établies avec une clarté et une précision qui facilitent beaucoup l'intelligence des résultats qui en découlent. Nous ne les reproduirons pas ici pour ne pas trop allonger notre article, et nous nous bornerons à donner la définition des corps homogènes des divers ordres.

Les corps homogènes du *premier ordre* sont ceux dans lesquels les déformations élémentaires, ainsi que les forces élastiques, sont des fonctions des dérivées du premier ordre $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ seulement des accroissements u, v, w des coordonnées x, y, z de l'élément, dues à sa déformation, les dérivées d'ordres supérieurs n'y entrant pas. Si ces déformations dépendent, en outre, des dérivées secondes $\frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)^2}$, les corps seront dits homogènes *du second ordre*, et ainsi de suite. En général, un corps sera homogène du $n^{\text{ième}}$ *ordre* lorsque les déformations et les forces élastiques auront des expressions de la forme

$$F\left[\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}, \frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)^2}, \ldots, \frac{d^n(u, v, w)}{d(x, y, z)^n}\right].$$

Le présent travail a surtout en vue les corps homogènes du premier ordre; quelques pages seulement sont consacrées à l'étude de ceux d'ordre supérieur.

La plus grande partie des résultats de la théorie est obtenue par la considération des déformations, abstraction faite des forces qui les produisent. Les neuf dérivées représentées par le symbole $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, et dont dépendent les déformations, étant considérées comme des paramètres, conduisent à un *ellipsoïde de déformation*, analogue à l'ellipsoïde d'élasticité, et à une *droite de déformation*. En combinant entre eux ces paramètres, on parvient à des ellipsoïdes et à des droites d'ordre supérieur, dont la considération peut conduire à l'explication de certains phénomènes dans les corps élastiques.

La considération du travail mécanique élémentaire fournit aussi des résultats remarquables, parmi lesquels nous citerons en passant celui-ci, que les dérivées partielles de la pression P, par rapport aux quantités $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, expriment les forces élastiques correspondantes.

Dans le cas des corps homogènes triaxiques du premier ordre, les équations fondamentales de cette théorie conduisent aux équations qui expliquent les lois de la propagation de la lumière dans les cristaux biréfringents, et à celles qui représentent la loi de la propagation de la chaleur dans les corps solides, telles qu'elles ont été établies par Lamé dans sa *Théorie analytique de la Chaleur*, par la considération de la conductibilité. Ce dernier résultat est surtout important : il établit une liaison entre l'élasticité des corps et leur conductibilité pour la chaleur.

Dans le cas des corps homogènes du troisième ordre, on obtient de même les équations qui expliquent la dispersion de la lumière et la rotation du plan de polarisation. Dans ce dernier cas, en désignant par α l'angle de torsion, on a

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 b(z - z_0)}{al^2},$$

résultat conforme aux lois expérimentales de Biot, savoir : que l'angle de torsion est proportionnel à l'épaisseur $z - z_0$ du corps, et en raison inverse du carré de la longueur d'onde l.

En tenant compte des infiniment petits d'ordre supérieur dans l'expression de la vitesse de propagation des rayons lumineux, on parvient à ce résultat, que la rotation du plan de polarisation est toujours accompagnée de la dispersion; seulement cette dernière est extrêmement petite.

Gosiewski (W.). — *Des fonctions simultanées de même espèce.* (32 p.)

Soient u, v, w trois fonctions simultanées et de même espèce des quatre variables x, y, z, t, dont les trois premières sont aussi de même espèce. Supposons que u, v, w représentent les déformations d'un élément élastique, dont les coordonnées soient x, y, z, et que t soit le temps. Les fonctions de cette nature jouent un grand rôle dans la théorie de l'élasticité.

Si l'on excepte quelques mots qui leur sont consacrés dans les *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, de Lamé, nous ne connaissons aucune étude spéciale sur ces fonctions. Le présent travail a pour objet l'étude des propriétés géométriques et analytiques de ces fonctions et de leurs dérivées partielles. La considération de ces dérivées et de leurs combinaisons comme paramètres d'ellipsoïdes et de droites de divers ordres, dont il a été déjà question plus haut, permet d'établir plusieurs théorèmes curieux, applicables aux lois des mouvements intérieurs des corps élastiques, mais dont le détail nous entraînerait hors des limites imposées à cet article. Nous nous bornerons à faire remarquer que, en considérant trois variables seulement, on est conduit au théorème général que voici :

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *n fonctions continues simultanées et de même espèce de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Pour que toutes les dérivées* $\dfrac{d(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *de ces fonctions aient des valeurs finies et déterminées, il faut que les fonctions données soient les dérivées partielles d'une même fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *finie et déterminée.*

Après avoir établi les propriétés des dérivées $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, l'auteur étudie les propriétés de leurs fonctions, lesquelles, dans le cas où

x, y, z sont de même espèce, peuvent toujours être ramenées à des fonctions de six paramètres de l'ellipsoïde correspondant, et il examine en particulier les polynômes homogènes entiers du deuxième et du troisième degré par rapport à ces paramètres.

Dans le cas des coefficients indépendants de u, v, w, un polynôme de cette classe (du deuxième degré) exprime le travail élémentaire des forces élastiques dans les corps homogènes dont la nature ne varie pas avec leur mouvement intérieur.

En considérant le travail mécanique élémentaire comme exprimé par un polynôme dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de u, v, w, la théorie de l'élasticité se trouvera étendue aux corps qui changent de nature sous l'action des forces intérieures, et l'étude appropriée de ces polynômes pourra servir de point de départ aux recherches mathématico-chimiques, et permettra peut-être de vérifier si la cause des phénomènes chimiques est la même que celle de beaucoup d'autres phénomènes de la nature, c'est-à-dire le mouvement.

Żmurko (W.). — *Démonstration du théorème de Hesse, relatif aux déterminants fonctionnels.* (4 p.)

Żmurko (W.). — *Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (8 p.)

Ce Mémoire a été publié, en allemand, dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne,* pour l'année 1866.

Franke (J.-N.). — *Relations projectives des projections des systèmes géométriques.* (8 p.)

Trzaska (W.). — *Quelques propriétés des fonctions d'une variable imaginaire.* (3 p.)

L'auteur donne deux démonstrations, l'une géométrique et l'autre analytique, du théorème suivant, énoncé sans démonstration par M. Dewulf, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. I, p. 156; 1862 :

« Soient $w = u + iv$ une fonction monodrome et monogène; une courbe fermée $f(x, y) = 0$ dans le plan horizontal des indices de z; un cylindre vertical qui a $f(x, y) = 0$ pour base; deux plans verticaux P et P′ rectangulaires. Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$, et que l'indice de z parcoure $f(x, y) = 0$. Sur chaque génératrice (x, y) du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspondantes, nous obtiendrons ainsi deux courbes U et V. L'aire de la projection de U ou de V sur le plan P est égale à l'aire de la projection de V ou de U sur le plan P'. »

Il établit, en outre, les deux propositions suivantes :

1° Les aires de U et de V ayant une projection commune sur le plan de $f(x, y) = 0$ sont égales.

2° Les projections sur P des aires de U et de V ayant une projection commune sur le plan de $f(x, y) = 0$ sont respectivement égales aux projections correspondantes des aires de V et de U sur P'.

Trzaska (W.). — *Une application des déterminants fonctionnels.* (9 p.)

Étant données n fonctions de m variables indépendantes, il est souvent utile de chercher s'il existe entre ces fonctions des relations indépendantes des variables. Ce problème, dont la solution ordinaire consiste dans l'élimination, peut être résolu à l'aide du théorème suivant :

« Pour que les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des m variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_m$ satisfassent à p relations indépendantes de ces variables, il faut et il suffit qu'il y ait $n - p$ fonctions, telles que leur déterminant fonctionnel de degré $n - p$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p})}{d(z_1, \ldots, z_{n-p})},$$

par rapport à $n - p$ des variables z_k, soit différent de zéro, et que les $p(m - n + p)$ déterminants fonctionnels du degré $n - p + 1$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p}, u_i)}{d(z_1, \ldots, z_{n-p}, z_k)}, \quad (n - p + 1 \leqq i \leqq n), \quad (n - p + 1 \leqq k \leqq n),$$

soient identiquement nuls pour toutes les valeurs des variables z_k. Ce théorème n'a lieu que pour $m > n - p > 0$. »

M. Trzaska donne deux démonstrations de ce théorème.

Trzaska (W.). — *Tracer sur une sphère un cercle tangent à trois cercles donnés sur cette sphère.* (10 p.)

Plusieurs Géomètres, entre autres Gergonne [1], ont donné des

---

[1] *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, VII et XIII.

solutions géométriques de ce problème. Le présent Mémoire expose une méthode analytique, fondée sur la considération de la relation connue qui existe entre les cosinus des arcs de grand cercle a_{rs} (r, $s = 1, 2, 3, 4$), représentant les distances mutuelles de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 situés sur une sphère, savoir :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix},$$

laquelle conduit aux huit solutions de ce problème.

L'auteur applique, en outre, cette méthode à la résolution d'autres problèmes du même genre, par exemple : « Tracer une circonférence inscrite ou circonscrite à un triangle sphérique », et il démontre le théorème général suivant :

« Considérons n points $A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_s, \ldots, A_n$ ($n > 4$), situés d'une manière quelconque dans l'espace, et soit a_{rs} la distance de deux de ces points A_r, A_s. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ distances a_{rs} satisfont toujours à la relation

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}. »$$

En combinant n points r à r, on obtient $\sum_{r=5}^{r=n} z_{nr}$ relations semblables, z_{nr} représentant le nombre de combinaisons de n objets pris r à r.

Sujet de concours *proposé par la Société des Sciences exactes :* Appréciation des travaux mathématiques de Hoene Wroński.

T. II; 1872.

Gosiewski (W.). — *Quelques remarques concernant le nombre des valeurs différentes que peut prendre une fonction par suite de la permutation des variables dont elle dépend.* (25 p.)

Désignons par $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$ l'opération de la permutation de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\nu$ ($\alpha, \beta, \ldots, \nu$ étant les nombres $1, 2, \ldots, m$, groupés dans un ordre quelconque).

Soit un arrangement P_1 de m quantités, et une permutation $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ conduisant à l'arrangement P_2. En appliquant à ce dernier la même opération, on obtient l'arrangement P_3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un arrangement P_l, qui reproduise, par la même opération, l'arrangement primitif P_1. Les arrangements tels que $P_1, P_2, \ldots, P_l$ jouissent de cette propriété, que l'une quelconque des opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \left(\frac{P_1}{P_3}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$, appliquée à l'un quelconque de ces arrangements, les reproduit tous dans un ordre différent. Les arrangements $P_1, \ldots, P_l$ seront dits *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, et les opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$ seront les permutations *déterminées* par $P_1, P_2, \ldots, P_l$.

Les arrangements inséparables jouissent donc de la propriété que l'application de l'une quelconque des permutations qu'ils déterminent ne change ni leur nombre ni leur nature; mais, étant donnés l arrangements jouissant de cette propriété, on ne peut pas toujours affirmer réciproquement qu'ils soient inséparables. Il peut arriver, au contraire, que, parmi les permutations déterminées, il s'en trouve un certain nombre ($< l$), avec lesquelles on pourra reproduire tous les arrangements. Ces permutations ont cette propriété, que les arrangements inséparables par rapport à chacune d'elles ont un arrangement commun. Ces arrangements sont dits *invariables* par rapport aux permutations qu'ils déterminent.

Cela posé, on peut établir les théorèmes suivants :

1° *Une fonction de m variables indépendantes, qui ne change pas de valeur par suite de la permutation* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$, *a une seule valeur pour tous les arrangements de* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$.

2° Théorème de Lagrange. — *Le nombre des valeurs différentes d'une fonction de m variables indépendantes est un diviseur du nombre m!.*

3° *Les valeurs égales d'une fonction* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *correspondent aux arrangements invariables par rapport aux permutations qu'ils déterminent.*

Tels sont les principaux résultats de ce travail. Nous passons sous silence plusieurs théorèmes relatifs aux permutations définies plus haut.

Trzaska (W.). — *Remarques sur les fonctions complexes à plusieurs caractéristiques.* (12 p.)

Une fonction complexe d'une seule variable à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque valeur de la variable, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de n périodes *distinctes,* c'est-à-dire de périodes telles qu'aucune d'elles ne puisse s'obtenir par l'addition ou la multiplication des autres. M. Trzaska donne une démonstration géométrique de ce théorème, d'abord pour $n = 2$, puis pour $n = 3$.

Trzaska (W.). — *Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions complexes à n caractéristiques.* (7 p.)

Une fonction complexe de m variables indépendantes à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque système de valeurs des variables, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de mn périodes distinctes.

Dans ce théorème, ainsi que dans le précédent, on admet que les quantités à n caractéristiques satisfont aux lois de l'addition algébrique.

Kucharzewski (F.). — *Sur l'Astronomie en Pologne. Matériaux pour servir à l'histoire de cette science.* (106 p.)

T. III; 1873.

Folkierski (W.). — *Sur les équations simultanées aux dérivées partielles.* (30 p.)

Ce travail se divise en deux Parties. La première a pour objet les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur de plus d'une unité au nombre des équations. En appliquant les méthodes de Jacobi à ce problème considéré à un point de vue général, l'auteur démontre quelques théorèmes qui permettent de le résoudre dans tous les cas où cette solution peut être ramenée aux équations différentielles ordinaires. Les résultats s'accordent avec ceux que Clebsch a obtenus ([1]) par une voie un peu différente. Dans la seconde Partie, les résultats obtenus pour le cas des équations du premier ordre sont appliqués à celui des équations du second ordre, que l'auteur traite par la méthode d'Ampère.

Kluger (W.). — *La turbine de Fourneyron. Théorie rigoureuse et théorie approchée de cette machine.* (36 p.)

Kucharzewski (F.). — *Exposition et analyse des travaux de M.* Maurice Levy, *sur la théorie du mouvement rectiligne des liquides, et son application au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.* (46 p.)

Doliński (F.). — *Sur l'atomicité des noyaux avec un aperçu sur les nouvelles théories chimiques.* (95 p.)

Gosiewski (W.). — *Contribution à la théorie des forces vives.* (7 p.)

L'auteur donne une nouvelle expression de la somme des forces vives d'un système de points matériels, expression qui renferme un théorème de Coriolis ([2]), et donne en outre la somme des forces vives correspondant à la *déformation* du système.

En faisant des applications de cette dernière expression, qui est

$$\frac{\Sigma mm'\left(\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}\right)^2}{\Sigma m}$$

(R étant la distance des deux points matériels m, m'), l'auteur obtient les deux propositions suivantes :

1° La force vive due à l'allongement ou au raccourcissement d'un fil élastique extensible est égale au douzième de la masse du fil multipliée par la vitesse d'allongement ou de raccourcissement.

([1]) *Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.* (*Borchardt's Journal*, Bd. 65; 1865.) — M. Folkierski annonce que son travail est antérieur à la publication de celui de Clebsch.

([2]) *Voir* Sturm, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, t. II, p. 356.

2° Une particule infiniment petite de matière continue peut être considérée comme un système de quatre points matériels.

Martynowski (A.). — *Théorie de la pression des liquides sur des parois planes ou courbes.* 1re Partie : Parois planes. (135 p.)

A. P.

Liste des Ouvrages scientifiques polonais édités par M. le comte Działyński, président de la *Société des Sciences exactes, à Paris,* jusqu'au 19 février 1873.

Niewęgłowski (G.-H.), professeur d'Analyse à l'École supérieure Polonaise, examinateur au Lycée Saint-Louis, à Paris. — *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych.* (Arithmétique, avec la théorie des approximations numériques.). In-8, 352 pages.

— *Geometryi część I. Geometrya płaska.* (Géométrie, 1re Partie. Géométrie plane). 2e édition. 1868, in-8, 436 pages, figures dans le texte.

— *Geometryi część I i II.* (Géométrie, 1re et 2e Partie). Cours complet, 2e édition, contenant la Géométrie des anciens et les méthodes de la Géométrie moderne. 1868, in-8, VIII-778 pages.

— *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* (Trigonométrie rectiligne et sphérique, avec la théorie des quantités imaginaires et des notes). 1870, in-8, XV-407 pages.

— *Mechanika rozumowa.* (Mécanique rationnelle, en 2 tomes). Tome Ier, Statique. 1873, in-8, 512 pages, figures. Prix : 10 fr.

Folkierski (Wł.), ingénieur civil, licencié ès sciences, professeur de Mécanique à l'École supérieure Polonaise. — *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami.* (Éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, avec des applications). Tome I : Calcul différentiel, avec une Note de M. Trzaska, sur les déterminants, 1870, in-8, XLIII-1087 pages, 136 figures dans le texte. — Tome II : Calcul intégral, 1re Partie, intégration des différentielles, etc. 1873, in-8, XVI-752 pages, 76 figures.

Kucharzewski (F.) et Kluger (W.), ingénieurs civils, anciens élèves de l'École des Ponts et Chaussées. — *Wykład Hydrauliki.* (Traité d'Hydraulique). 1873, LVI-1018 pages, 110 figures dans le texte. Prix : 20 fr.

GOSIEWSKI (W.), professeur de Physique mathématique, à Lemberg. — *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* (molekularnéj). (Traité de Mécanique moléculaire.) Tome I^er^, 1^re^ livraison. 1873, in-8, 176 pages. Prix : 4 fr.

SĄGAJŁO (A.), professeur de Mathématiques. — *Wykład zupełny Algebry.* (Traité complet d'Algèbre, en quatre volumes). Tome I^er^, Éléments d'Algèbre. 1873, in-8, 632 pages, figures. Prix : 5 fr. 50 c.

ŻEBRAWSKI (D^r^ Theofil), membre de l'Académie des Sciences de Cracovie. — *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań.* (Bibliographie de la littérature polonaise relative aux Sciences mathématiques et physiques et à leurs applications). Cracovie, 1873, in-8, 617 pages, 4 planches. Prix : 3 thalers.