BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 161-166

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__161_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TAIT (P.-G.), M. A., professor of Natural Philosophy in the University of Edinburgh. — AN ELEMENTARY TREATISE ON QUATERNIONS. Second edition, enlarged. — Oxford, Clarendon Press; 1873. 1 vol. in-8°, XX-296 p.

KELLAND (P.), M. A, F. R. S, & TAIT (P.-G.), M. A., professors in the Department of Mathematics in the University of Edinburgh. — INTRODUCTION TO QUATERNIONS, WITH NUMEROUS EXAMPLES. — London, Macmillan & Co.; 1873. — 1 vol. petit in-8°, XI-227 p.

La méthode des quaternions constitue un procédé d'Analyse géométrique, inventé, comme on sait, par sir William-Rowan Hamilton, qui en a exposé pour la première fois la théorie complète dans ses *Lectures on Quaternions* (1). Cette découverte ne semble pas avoir attiré l'attention d'un grand nombre de géomètres sur le continent; les seuls travaux que nous connaissions sur ce sujet, en dehors des travaux anglais, sont des expositions sommaires de la théorie, dues à MM. Bellavitis (1858), Allégret (1862), Hankel (1867).

Cependant cette méthode, comme les autres méthodes géométriques, a ses avantages aussi bien que ses inconvénients, suivant la nature de la question que l'on veut traiter, et il en est de son usage comme de celui de tous les systèmes de coordonnées, rectilignes ou curvilignes, ponctuelles ou tangentielles, etc.

Ce qui distingue toutefois ce mode de détermination des autres, c'est que, opérant sur des éléments plus complexes, il donne lieu a des opérations moins simples, qui ne présentent pas les mêmes propriétés générales que les opérations de l'Algèbre ordinaire. De là la nécessité d'introduire certaines modifications dans les règles du calcul, notamment dans tout ce qui se rapporte à la multiplication et aux opérations qui en dépendent. La nouvelle Algèbre ainsi constituée exige, dans la pratique, de plus grandes précautions et une attention plus soutenue. En revanche, elle admet de nouveaux symboles d'opérations dont l'usage permet de traiter certains problèmes importants avec une merveilleuse facilité. D'ailleurs, au point de

(1) Dublin, 1853; 1 vol. in-8°, 64-LXXII-736 p.

vue de l'Analyse pure, elle pourra dans la suite ouvrir des voies encore inexplorées, et qui conduiront peut-être à de nouveaux problèmes, ou à des solutions plus simples de problèmes déjà posés.

C'en était assez déjà pour que les compatriotes de Hamilton n'aient pas cru devoir laisser dans l'oubli une méthode aussi féconde, et dont on ne saurait trop admirer les ingénieux procédés. L'édition des *Lectures* se trouvant épuisée, Hamilton employa les dernières années de sa vie à la rédaction d'un second Traité aussi étendu que le premier (1); la mort le surprit (2) pendant le cours de l'impression, qui a été achevée par les soins de son fils.

Hamilton, comme la plupart des grands inventeurs, s'était peu préoccupé, surtout dans son premier Ouvrage, de se mettre à la portée des intelligences ordinaires. Ses deux Livres sont de véritables encyclopédies mathématiques, dans lesquelles il traite par sa méthode, sans s'assujettir à un plan nettement accusé, les questions les plus diverses, à mesure que le développement de sa théorie lui en fournit l'occasion. Aussi bien peu de géomètres, même sur le sol britannique, ont eu le courage de pousser jusqu'au bout l'exploration de ces riches mines scientifiques. Quelques-uns cependant, ayant pu profiter des leçons et des encouragements du maître, se sont approprié la méthode, et l'emploient avec un succès croissant dans les recherches les plus compliquées de la Physique mathématique.

Parmi ces disciples zélés, il faut citer en première ligne M. Tait, ancien fellow de St.-Peter's College, à Cambridge, et aujourd'hui professeur de Physique à l'Université d'Édimbourg. C'est à lui qu'on doit le premier Traité classique, à la fois complet et élémentaire, qui ait été composé sur cette branche des Mathématiques. La première édition de son Livre, dont les matériaux étaient prêts depuis longtemps, mais dont la publication fut retardée par suite du désir qu'Hamilton avait exprimé de faire paraître auparavant ses *Elements*, porte la date de 1867. L'accueil empressé que cet Ouvrage a reçu, tant en Angleterre qu'en Amérique, est une preuve incontestable du talent de l'auteur et de la bonté de la méthode. L'année dernière, M. Tait a dû procéder à une seconde édition, et il en a

---

(1) *Elements of Quaternions*. London, 1866; 1 vol. in-8°, LXVI-762 p.

(2) 2 septembre 1865.

profité pour apporter à son Livre plusieurs améliorations, en faisant disparaître quelques erreurs typographiques, et donnant un plus grand développement aux deux derniers Chapitres.

Donnons un aperçu rapide du contenu de cet excellent Traité.

Dans le Chapitre I, l'auteur établit les premières bases du nouveau calcul, en définissant l'addition et la soustraction des droites dirigées ou *vecteurs,* qui déterminent les translations d'un système parallèlement à lui-même; ces opérations correspondent à la composition et à la décomposition des translations.

Il considère ensuite, dans le Chapitre II, l'opération qui change à la fois la grandeur et la direction d'un vecteur, et que l'on assimile à la multiplication du vecteur par un symbole appelé *biradiale.* L'expression analytique de ce symbole a reçu le nom de *quaternion,* parce qu'elle résulte de l'addition de quatre termes, rapportés à quatre unités irréductibles entre elles. L'auteur expose les règles de calcul algébrique relatives à la multiplication et à la division des quaternions, comprenant, comme cas particuliers, les règles relatives aux vecteurs.

Le Chapitre III contient diverses transformations de formules, avec leur interprétation géométrique. On voit, par les exemples traités, la correspondance qui existe entre chaque opération de calcul et un mouvement d'une figure, de sorte que chaque équation fait image, et parle, pour ainsi dire, aux yeux.

Le Chapitre IV a pour objet la différentiation des fonctions de quaternions, opération qui n'a plus la même simplicité que dans le cas des quantités complexes ordinaires. L'auteur y définit le symbole différentiel ∇, une des plus ingénieuses découvertes d'Hamilton, et dont l'emploi a permis d'étendre aux quaternions l'opération de l'intégration, tant simple que multiple. Si $F(\rho)$ est une fonction du vecteur $\rho = ix + jy + kz$, dont la valeur soit toujours égale d'un nombre réel, ce symbole ∇ représente l'opération

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

i, j, k étant les trois unités imaginaires, correspondant à trois directions orthogonales fixes. Le vecteur exprimé par $\nabla F(\rho)$ est la normale à la surface au point (x, y, z), et la différentielle $dF(\rho)$

peut se mettre sous la forme $S[\nabla F(\rho)\, d\rho]$, le signe S désignant la partie réelle ou *scalaire* d'un quaternion.

Dans le cas des fonctions implicites, la détermination de la différentielle exige la résolution d'une équation du premier degré, problème qui, dans l'Algèbre des quaternions, est loin d'être aussi facile que dans l'Algèbre ordinaire. Cette résolution fait le sujet du Chapitre V. L'auteur expose d'abord la belle méthode créée par Hamilton pour la solution générale de la question. Cette méthode est fondée sur les propriétés des fonctions linéaires d'un vecteur, désignées par le symbole φ, et qui jouent un rôle capital dans presque toutes les applications. Ces propriétés découlent de la considération d'une équation du troisième degré à coefficients réels, à laquelle satisfait identiquement ce symbole, et que Hamilton apprend à former. De cette équation, on déduit immédiatement l'inversion de la fonction φ, et par suite la résolution de l'équation $\varphi(\rho) = \gamma$. A la fin du Chapitre, M. Tait montre comment on peut, dans les cas les plus simples et les plus usuels, abréger les calculs, en substituant à la méthode générale des méthodes particulières et directes.

Après avoir ainsi exposé les principales règles du calcul des quaternions, l'auteur passe aux applications. Dans le Chapitre VI, il traite de la droite et du plan, et déjà l'on peut juger de la rapidité et de l'élégance des solutions que peut fournir la méthode d'Hamilton.

Les Chapitres VII et VIII sont consacrés à l'étude de la sphère et du cône de révolution, et à celle des surfaces à centre du second ordre. La théorie de la courbure des lignes et des surfaces est développée dans le Chapitre IX.

Le Chapitre X est intitulé *Cinématique*. L'étude du mouvement curviligne est fondée sur la considération de la courbe qu'Hamilton a nommée *hodographe,* et dont le vecteur est la dérivée par rapport au temps du vecteur de la trajectoire. L'auteur en fait diverses applications aux mouvements planétaires et à la théorie de certaines courbes engendrées par le mouvement d'une figure. Il donne ensuite les formules relatives aux rotations d'un système rigide. Il définit la dilatation homogène (*homogeneous strain*), c'est-à-dire celle dont l'effet transforme des éléments semblables entre eux et d'autres éléments semblables aussi entre eux. Une pareille dilatation s'exprime immédiatement à l'aide de la fonction φ, des propriétés de laquelle elle donne une représentation physique. M. Tait traite encore de la combinaison des dilatations avec les rotations, et des propriétés des moments d'inertie.

Le Chapitre XI et dernier, le plus intéressant du Livre, a pour titre : *Applications physiques.* Voici le sommaire des diverses sections : Équilibre et mouvement d'un système rigide. Mouvement du pendule simple; pendule de Foucault. Surfaces réfléchissantes. Théorie de la double réfraction de Fresnel, surface des ondes, etc. Électrodynamique. Applications physiques de l'opérateur ∇ : déplacement des groupes de points; intégrales doubles et triples; calcul des variations, etc.

Chaque Chapitre est terminé par un recueil de questions, proposées au lecteur comme exercices.

Malgré son titre de *Traité élémentaire,* il ne faudrait pas croire que le Livre de M. Tait fût d'une lecture courante. Tel n'a pas été d'ailleurs le but de l'auteur, et, dans l'intérêt même des étudiants, il n'a pas voulu leur frayer un *chemin royal,* bon pour ceux qui ne visent qu'à atteindre le plus vite possible un but déterminé, mais impropre à donner cette souplesse d'esprit et cette largeur de vues, que l'on ne peut acquérir que par un labeur personnel. Il avoue cependant que la difficulté des premiers Chapitres pourrait bien rebuter quelques commençants, et c'est en faveur des travailleurs moins intrépides qu'il a collaboré, avec son collègue M. Kelland, à la rédaction du Livre vraiment élémentaire que nous annonçons en second lieu.

Le plan général de cet Abrégé ne diffère guère de celui des premiers Chapitres du précédent Ouvrage. Seulement toutes les parties qui exigent l'emploi des calculs transcendants sont omises. Voici les titres des Chapitres :

I. Introduction.
II. Addition et soustraction des vecteurs.
III. Multiplication et division des vecteurs.
IV. La ligne droite et le plan.
V. Le cercle et la sphère.
VI. L'ellipse.
VII. La parabole et l'hyperbole.
VIII. Les surfaces à centre du second ordre.

IX. Formules, avec leurs applications.

X. Équations du premier degré entre des vecteurs.

Comme dans le *Elementary Treatise,* les divers Chapitres de l'Abrégé sont suivis d'un recueil de questions à résoudre. Les solutions détaillées des plus difficiles et des plus intéressantes sont données dans un *Appendice* placé à la fin du volume. J. H.