BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Bulletin bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 7-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

D'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut. — GÉODÉSIE D'ÉTHIOPIE, ou Triangulation d'une partie de la haute Éthiopie, exécutée selon des méthodes nouvelles. Vérifiée et rédigée par R. RADAU. Paris; 1873. Gauthier-Villars. — In-4°, 534 p., avec 11 cartes et 10 planches. — Prix : 30 fr.

D'ABBADIE (Antoine). — OBSERVATIONS RELATIVES A LA PHYSIQUE DU GLOBE, faites au Brésil et en Éthiopie. Rédigées par R. RADAU. — Paris, Gauthier-Villars. — In-4°, 204 p., avec 1 planche. — Prix : 15 fr.

Les deux voyages en Abyssinie dont M. d'Abbadie publie aujourd'hui les résultats ont eu lieu de 1837 à 1839 et de 1839 à 1849; ils comprennent un espace de douze ans, pendant lequel l'infatigable explorateur a recueilli d'immenses matériaux d'observation en se débattant au milieu de difficultés de tout genre. En 1836, il avait déjà fait un court voyage au Brésil, afin d'y observer les variations diurnes de l'aiguille aimantée. L'impression de la *Géodésie d'Éthiopie* ne put être commencée qu'en 1859; elle avait été précédée de la publication d'un *Résumé géodésique des positions déterminées en Éthiopie,* brochure de 36 pages, où l'on trouve déjà les coordonnées de 831 points. Ce délai de vingt-quatre ans, apporté à la publication complète des observations, des calculs et des cartes que renferment les deux Ouvrages de M. d'Abbadie, prouve assez qu'il s'agit ici d'une œuvre de longue haleine, qui n'a pu être menée à bonne fin qu'au prix de grands et sérieux efforts, et qui, enfin achevée, fait honneur à la Science française.

La *Géodésie d'Éthiopie* renferme la description des instruments emportés par le voyageur; les observations elles-mêmes dans la mesure où la reproduction en paraissait utile, et, dans les autres cas, les résultats du calcul; l'exposé des méthodes d'observation et des procédés de réduction employés; l'histoire détaillée de la construction des cartes; la liste des positions géodésiques, avec onze cartes topographiques et dix planches de profils de montagnes; l'itinéraire complet, d'après les manuscrits de voyage. Les instruments étaient des chronomètres, des sextants et des cercles à réflexion, enfin des théodolites, ou lunettes à deux cercles qui permettent de relever l'azimut et l'apozénith (distance zénithale) des objets terrestres. C'est sur l'emploi du théodolite que reposent les méthodes dont l'ensemble constitue ce que M. d'Abbadie nomme la *Géodésie expéditive,* méthodes ingénieuses et fécondes dont son Ouvrage est, pour ainsi dire, un long exemple.

Les opérations de la Géodésie ordinaire exigent des instruments lourds et très-précis, des signaux artificiels, installés en des points choisis à l'avance, et un personnel nombreux; elles nécessitent la mesure d'une base, la mesure des trois angles de chaque triangle, sans compter les observations astronomiques qui font connaître directement les latitudes et les longitudes des stations principales, et les nivellements qui déterminent les différences des hauteurs. Évidemment on ne peut songer à exécuter de pareils travaux en pays sauvage, avec les ressources restreintes dont dispose un voyageur isolé, trop heureux si la défiance toujours en éveil des indigènes ne l'empêche pas de profiter des occasions que lui procurent les hasards de la route. Aussi la plupart des voyageurs se bornent-ils à dresser une carte du pays qu'ils ont exploré, en mettant à profit des levés à vue ou des relèvements à la boussole, contrôlés par quelques observations de latitudes ou de latitudes et par l'estimation des temps de parcours. Les itinéraires dressés à l'aide de pareilles données sont en général très-défectueux, surtout lorsqu'il s'agit d'une contrée où le minerai de fer abonde, comme en Éthiopie, car alors l'usage de la boussole expose à des mécomptes sérieux; on peut s'en convaincre en parcourant les pages 255-259 de la *Géodésie d'Ethiopie,* où M. d'Abbadie a réuni les déclinaisons de l'aiguille aimantée qui résultent de ses relèvements.

Un simple coup d'œil jeté ensuite sur la longue série des *Tours d'horizon* (p. 150-215) et des *Azimuts ordonnés* (p. 216-255), sur la *Liste des positions* (p. 423-448) et sur la *Carte des principaux triangles,* suffit pour faire apprécier le pas immense qui a été fait. La Géodésie expéditive, telle que l'a imaginée M. d'Abbadie et qu'il l'a pratiquée pendant douze ans avec une étonnante persévérance, constitue, à n'en pas douter, un progrès qui fait époque dans l'histoire des voyages scientifiques. Elle est fondée sur le relèvement systématique des *signaux naturels,* c'est-à-dire de tous les objets saillants et faciles à identifier qui se dessinent à l'horizon. Le voyageur improvise des stations sur chaque éminence de terrain où il lui est permis de s'arrêter, ou bien dans les haltes dictées par les volontés de la caravane. Il y installe son théodolite sur une pierre ou sur un pied portatif, et il commence son *tour d'horizon,* en relevant avec soin le gisement et la hauteur angulaire des signaux qui s'offrent à son choix : pics de montagnes, toits d'édifices, cimes d'arbres, bosquets sacrés, angles de précipices, bords d'un lac ou d'une île. En même temps, s'il le peut, il prend la hauteur et l'azimut du Soleil, afin d'*orienter* son tour d'horizon, c'est-à-dire afin de pouvoir rapporter au méridien les angles azimutaux observés. L'observation du Soleil, combinée avec celle d'un bon signal, qui est nécessaire pour orienter un tour d'horizon, doit être faite le matin ou le soir : il y a un grand avantage à la faire des *deux* côtés du méridien, à deux moments de la journée où le Soleil se trouve à la même distance du zénith; c'est là le principe de la *méthode des azimuts correspondants,* généralisation ingénieuse de la méthode bien connue des hauteurs correspondantes, et qui sert à trouver en même temps la direction du méridien et l'instant de midi vrai (p. 143 et 478). Les tours d'horizon, accompagnés de croquis des signaux, qui permettent d'en constater plus facilement l'identité, forment la base d'une sorte de triangulation naturelle du pays, et fournissent le moyen de déterminer la situation relative d'une foule de points. Des latitudes et des longitudes observées chaque fois qu'on en trouve l'occasion, des altitudes mesurées par le moyen du baromètre ou de l'hypsomètre (thermomètre à eau bouillante), des distances déduites du temps de propagation du son, de petites bases mesurées au pas ou à la chaîne complètent les matériaux qui permettront plus tard de fixer les trois coordonnées de chaque point de la carte. Il va sans dire qu'il ne faudra pas négliger les renseignements supplémentaires, tels que relèvements à la boussole, esquisses de la route, estimation des distances, temps de parcours d'une station à l'autre, enfin les mille indications qui pourront faciliter le remplissage de la carte, une fois que les positions des points de repère y auront été marquées d'une manière définitive.

La grande affaire, dans une triangulation, c'est de mesurer sur le terrain une base de quelques kilomètres, qui donne la dimension absolue des côtés des triangles. La Géodésie expéditive se procure une base, en déterminant, aussi exactement que possible, les latitudes de deux points, situés à peu près sous le même méridien, et le gisement réciproque de ces deux points. C'est ainsi que M. d'Abbadie a utilisé, comme base de la carte du Tigray, la distance d'environ 93 kilomètres qui sépare les deux stations Digsa et Saloda, et qui correspond à une différence de latitude de 48 minutes, avec un azimut de 22 degrés.

Par ces divers moyens, M. d'Abbadie a réussi à porter une chaîne continue de triangles des bords de la mer Rouge aux confins du pays de Kaffa, c'est-à-dire depuis le seizième jusqu'au sixième degré de latitude au nord de l'équateur. Il est évident, par la nature même de ces observations, qui n'ont pu être faites d'après un plan arrêté à l'avance, qu'il ne faut pas s'attendre à trouver partout une liaison très-rigoureuse entre les différentes parties du canevas géodésique. On s'est efforcé de faire concourir à la fixation de chaque point toutes les données dont on disposait, en attribuant à chacune de ces données une influence proportionnelle au degré de confiance qu'elle inspirait. Appliquer à de tels matériaux les procédés de calcul de la Géodésie de précision, c'est-à-dire la méthode des moindres carrés avec son cortége d'équations et de coefficients péniblement préparés, c'est toujours perdre son temps et méconnaître les principes mêmes du Calcul des probabilités. On trouve dans la *Geodésie d'Éthiopie* une méthode plus simple, plus directe, adaptée à la nature variée et souvent précaire des observations qu'un voyageur peut recueillir au hasard de la route et selon les facilités qui résultent de sa situation. Cette méthode, exposée aux pages 314-321, sous le titre de *Méthode de compensation,* part d'un système provisoire de positions que l'on perfectionne peu à peu par des tâtonnements qui ont pour but d'équilibrer en quelque sorte l'influence des diverses données (latitudes, longitudes, altitudes absolues ou différences de niveau, azimuts, apozéniths, distances), et de resserrer ainsi graduellement les mailles du réseau trigonométrique. Dans ce dessein, on construit de petites cartes spéciales pour chaque point du réseau, où, autour de la position provisoire, on trace le parallèle de la latitude observée, les trajectoires des azimuts observés et les autres lignes droites ou courbes qui représentent à l'œil des conditions à remplir (un arc de cercle représenterait une distance estimée). Il convient d'adopter pour ces constructions la projection de Mercator, où les azimuts sont des lignes droites. On s'efforce alors de corriger les diverses positions, de façon que, sur les cartes spéciales qui sont dans une dépendance mutuelle, les trajectoires se rapprochent et circonscrivent par un polygone de plus en plus petit une position centrale qui deviendra la position définitive du point que l'on veut fixer. Afin de faire concourir à cette compensation progressive des erreurs d'observation les angles zénithaux, on marque sur les trajectoires, de distance en distance, les altitudes correspondant à l'apozénith observé, et l'on cherche à mettre d'accord le mieux possible les altitudes dont la moyenne fournira l'altitude définitive du même point. C'est de cette manière qu'ont été déterminées les trois coordonnées des 857 points que renferme la *Liste des positions*. D'après M. Radau, l'incertitude de ces positions atteint rarement 1 minute d'arc.

Après avoir indiqué rapidement les principes des méthodes mises en pratique par M. d'Abbadie, il nous reste à donner quelques détails complémentaires sur les résultats que renferme la *Géodésie d'Ethiopie*. Dans l'Introduction, on trouve une brève narration du voyage, quelques explications sur le système de transcription des noms indigènes adopté par l'auteur, l'exposé du plan général de l'Ouvrage, et l'histoire des vicissitudes qui en ont retardé la publication.

Voici ensuite, en peu de mots, le contenu des Chapitres :

Chapitre I. *Instruments*.

Chapitre II. *Calcul du temps*. — Réduction des angles horaires. — Calcul des hauteurs correspondantes, avec cinq Tables auxiliaires. — États des chronomètres, etc.

Chapitre III. *Latitudes.* — Méthode de réduction, avec deux Tables auxiliaires. — Méthode pour observer une latitude sans chronomètre. — Résumé et discussion des soixante latitudes observées.

Chapitre IV. *Longitudes par observations de la Lune.* — Méthode pour appliquer la parallaxe aux positions de la Lune (deux Tables). — Calcul de la longitude par une occultation, par les hauteurs ou par les distances lunaires. — Tableau des occultations observées. — Observations de hauteurs et de distances lunaires, avec leurs résultats.

Chapitre V. *Altitudes hypsométriques.* — Observations du baromètre et de l'hypsomètre, avec leurs résultats; tables auxiliaires. — Liste des altitudes absolues.

Chapitre VI. *Bases par le son.* — Mesure des distances par la vitesse de propagation du son. — Mesures accessoires faites au mètre, au pas, etc.

Chapitre VII. *Azimuts et apozéniths.* — Réduction des relèvements faits au théodolite. — Méthode des azimuts correspondants.

Chapitre VIII. *Tours d'horizon.* — 325 tours d'horizon, renfermant 4750 relèvements. — *Azimuts ordonnés,* réduits et classés suivant l'ordre alphabétique des stations et l'ordre naturel des signaux. — *Déclinaisons de la boussole.*

Chapitre IX. *Quelques formules de Géodésie.*

Chapitre X. *Altitudes relatives.* — Calcul des différences de niveau par les apozéniths; tables auxiliaires. — Compensation des altitudes relatives.

Chapitre XI. *Tracé des cartes.* — Projection de Mercator. — Coefficient du papier. — Latitudes dilatées. — Correction Givry. — Correction des distances relevées sur une carte réduite.

Chapitre XII. *Construction des cartes.* — Calcul des trajectoires, des triangles, d'un quadrangle. — Orientation d'un tour d'horizon par la carte. — Placements par apozéniths. — Divers moyens de commencer une carte. — Méthode de compensation.

Chapitre XIII. *Coordonnées absolues.* — Latitudes, longitudes, altitudes absolues.

Chapitre XIV. *Histoire des quatre Cartes.* — Cartes du Tigray, du Bagemdir, du Gojam, du Damot. Degré de certitude des positions.

Chapitre XV. *Résidu des relèvements.* — Azimuts sans croisement.

Chapitre XVI. *Journées de route.* — Itinéraire détaillé, avec les temps de parcours.

Chapitre XVII. *Liste des positions.* — Positions, notes critiques.

Additions. — On y trouve notamment la méthode de M. Radau pour déterminer la longitude sans chronomètre, par les hauteurs et les azimuts de la Lune.

Détails des Cartes. — Renseignements supplémentaires sur la construction et le remplissage des *onze Cartes*, où les noms des points géodésiques et les lignes de route sont imprimés en rouge.

Planches. — Profils des signaux, ou croquis des contours d'un grand nombre de signaux naturels relevés dans les tours d'horizon.

Table alphabétique des noms et des matières.

Ce court sommaire suffit pour donner une idée de l'étendue des matériaux qui ont été soumis à une discussion approfondie, de la somme de travail que représente cet Ouvrage, et du fruit qu'en retireront les voyageurs qui voudront s'appliquer sérieusement à réunir les matériaux pour la carte d'un pays encore inexploré. Ils profiteront des perfectionnements qu'ont subis les instruments d'observation depuis vingt ans : ils pourront employer l'*aba,* théodolite à prisme et à lunette horizontale de M. d'Abbadie; le polémomètre, qui sert à estimer les distances; la planchette photographique d'Auguste Chevallier, qui fournit instantanément un tour d'horizon, et une foule d'autres instruments qui permettront de multiplier et de rendre encore plus précises les données qui serviront de fondement aux cartes futures.

Nous ne dirons que peu de mots du second Ouvrage de M. d'Abbadie, qui a pour titre : *Observations relatives à la Physique du globe.* Ce sont des observations de magnétisme terrestre et de météorologie, faites au Brésil, en Égypte et en Abyssinie, de 1836 à 1849. A Olinda, M. d'Abbadie a observé, en 1837, les variations diurnes de la déclinaison de l'aiguille aimantée, l'inclinaison magnétique et la force horizontale du magnétisme terrestre. En Afrique, il n'a observé, dans diverses stations, que l'inclinaison et la force horizontale. Les observations météorologiques de tout genre ont été faites pendant une traversée de l'Atlantique, ensuite au Brésil, en Égypte, en Éthiopie, quelques-unes en Algérie, au mois de mars 1867, à l'occasion d'une éclipse de Soleil. Il y a là notamment des observations psychrométriques assez nombreuses qui prouvent la sécheresse habituelle du climat éthiopien, des observations de la température du sol à diverses profondeurs, une discussion approfondie des phénomènes du tonnerre en Éthiopie, et des remarques curieuses sur le *qobar*, sorte de brume sèche qui obscurcit l'atmosphère. Parmi les Tables que renferme l'Ouvrage, nous citerons les Tables barométriques et hypsométriques de M. Radau. En résumé, on y trouve des résultats qui ont leur importance; il faut seulement regretter que la publication de ces observations ait été si longtemps différée, ce qui en a un peu diminué l'intérêt; il est vrai que plusieurs des résultats obtenus avaient été publiés séparément depuis longtemps. En définitive, ces deux Ouvrages renferment une somme considérable de faits bien constatés, de chiffres précis et d'idées nouvelles, et, à ce titre, ils garderont une place honorable dans la littérature des Sciences d'observation.

SUTER (Dr. Heinrich). — GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. — *Erster Theil.* Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. — 2. Auflage. Zürich, Druck und Verlag von Orell Füssli & Co.; 1873 (1).

Les perfectionnements essentiels qui, depuis l'apparition des Ouvrages de Montucla et de Bossut, ont été apportés séparément aux diverses parties de l'histoire des Mathématiques, font aujourd'hui sentir l'urgence de la publication d'un Traité général, destiné à remplacer les anciens, dont le plus récent date du commencement de ce siècle. Ce besoin est d'autant plus impérieux pour les jeunes professeurs français, que l'histoire des Mathématiques a pris place, depuis quelques années, parmi les matières exigées pour le concours d'agrégation. Or nous ne voyons pas trop comment, dans l'état de choses actuel, on peut se mettre au courant de cette science, si l'on

---

(1) SUTER (H.). — *Histoire des Sciences mathématiques.* Ire Partie. Depuis les temps les plus reculés jusqu'à la fin du XVIe siècle. — 2e édition. Zürich, Orell Füssli et Cie; 1873. — 1 vol. in-8°, VI-196 p., 2 pl. Prix : 10 fr. 75.

n'a pas à sa disposition une assez nombreuse collection de monographies, publiées soit en France, soit surtout à l'étranger.

Le volume que nous annonçons ici, et qui doit former le commencement d'un travail complet sur cette matière, répond en partie à ce *desideratum*. Un livre de cette étendue, rédigé en tenant compte des recherches modernes, avec des renvois aux sources et des indications chronologiques et bibliographiques aussi nombreuses que possibles, serait assurément du plus grand secours pour les lecteurs auxquels le temps et les ressources matérielles manquent pour compulser eux-mêmes des publications spéciales et fouiller les documents originaux, et qui trouveraient ainsi réunis un tableau général des progrès de la Science et un guide pour des études plus détaillées et plus approfondies.

Malheureusement il s'en faut de beaucoup que ce programme soit complétement réalisé dans l'Ouvrage qui nous occupe. Si l'on en excepte les parties où l'auteur a pu mettre à profit la remarquable monographie de M. Bretschneider (¹), le Livre de M. Suter a été composé à un point de vue trop peu technique pour suffire aux exigences des lecteurs mathématiciens. Les sources de seconde main auxquelles l'auteur a puisé, et dont il donne lui-même la liste, sont loin de correspondre à l'état présent de la Science. Les renseignements bibliographiques sont à peu près absents, et les dates ne sont que très-rarement indiquées.

Comme on le voit par la lecture du titre, ce volume traite de l'histoire des Mathématiques, depuis les temps les plus reculés jusqu'à la renaissance des Sciences en Europe au XVIᵉ siècle. Il se divise en sept Chapitres, précédés d'une Introduction où l'auteur énumère les autorités sur lesquelles il s'appuie. Ainsi que nous l'avons dit, cette liste présente des lacunes regrettables, et l'on est surpris de n'y pas voir figurer les noms des Wœpcke, des Th.-H. Martin, des Sédillot, et de tant d'autres savants qui enrichissent de leurs découvertes le précieux *Bullettino* de M. le prince Boncompagni.

Le Chapitre Iᵉʳ contient un aperçu des commencements de la Science chez les peuples de l'Orient et chez les Égyptiens.

Le Chapitre II est consacré à l'histoire des Mathématiques chez les Grecs jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie. Cette partie,

(¹) *Die Geometrie und die Geometer vor Euclides*. Voir *Bulletin*, t. IV, p. 113.

où l'auteur a mis à profit les travaux de M. Bretschneider, nous semble la plus satisfaisante de tout le Livre. Le sujet y est traité d'une manière claire et intéressante.

Le Chapitre III traite de l'histoire de l'École d'Alexandrie, depuis sa fondation jusqu'à l'époque de Claude Ptolémée. L'auteur, dans les quatre premières pages, s'occupe d'Euclide et de ses Ouvrages. Nous ne saurions partager son avis lorsqu'il compare le mérite des *Éléments de Géométrie* de Legendre à celui des *Éléments* du géomètre alexandrin. L'Ouvrage de Legendre porte certainement l'empreinte des progrès accomplis dans les temps modernes, et l'on y reconnaît en maint endroit l'œuvre d'un profond mathématicien; mais il s'en faut de beaucoup qu'il présente l'unité de méthode, la cohésion et la solidité logique du Livre d'Euclide. Nous remarquons surtout avec surprise l'absence de toute mention du Livre des *Porismes* et des beaux travaux auxquels a donné lieu la restauration de cet Ouvrage, dont la perte était si regrettable, travaux qui ont tant ajouté à la gloire d'Euclide et à celle du grand géomètre qui les a menés à bonne fin!

Après avoir rapporté les découvertes des premiers astronomes alexandrins, l'auteur fait l'histoire de la vie et des travaux d'Archimède, qu'il signale avec raison comme le précurseur des inventeurs de l'Analyse infinitésimale, mais dont le mode d'exposition, quoi qu'en dise M. Suter, ne rappelle rien moins que le langage d'un auteur moderne.

Viennent ensuite les Notices consacrées à Apollonius, à Hipparque, et aux autres géomètres et astronomes qui ont illustré les derniers temps de la célèbre École.

Dans le Chapitre IV, l'auteur donne l'histoire de l'astronome Ptolémée et de ses commentateurs; puis il consacre quelques pages à Diophante, ce mathématicien auquel on ne connaît ni prédécesseur ni disciple parmi les Grecs, et qui ne trouva de continuateurs que chez les Arabes. Il mentionne, un peu sommairement peut-être, les écrits de Pappus, celui que l'on peut appeler « le dernier des Grecs », et après lequel cesse toute activité productrice dans la civilisation gréco-latine.

Le Chapitre V nous présente un tableau de l'histoire des Mathématiques chez les Orientaux, et particulièrement chez les Arabes. Il eût été difficile à l'auteur de traiter ce sujet au point de vue de la Science actuelle, si, comme il l'indique, il n'a pas consulté d'auteurs postérieurs au XVIII^e siècle, en laissant de côté des géomètres orientalistes du mérite de Wœpcke, dont le nom n'est pas cité une seule fois. Aussi a-t-il été facile à M. Hankel (¹) de relever dans ce Chapitre d'assez nombreuses erreurs.

Le Chapitre VI traite de l'état des Mathématiques dans l'Occident pendant le moyen âge. Après avoir mentionné Bède et Alcuin, M. Suter énumère les travaux de Gerbert (Sylvestre II), sans citer le savant Ouvrage de M. Olleris. Il attribue à Gerbert l'introduction en Europe des chiffres arabes et hindous, quoiqu'il soit bien établi que Gerbert ne connut pas l'usage du zéro, et que c'est à Léonard de Pise que revient la gloire d'avoir fait connaître à l'Occident cette invention capitale (²).

M. Suter signale le XIV^e siècle comme le plus stérile de tout le moyen âge, au point de vue scientifique. Si cependant, au lieu de s'arrêter aux données de Montucla et de Weidler, il eût pris connaissance des travaux récents publiés par M. Curtze dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* il y aurait trouvé le nom du plus grand génie mathématique du moyen âge, de Nicole Oresme, dont les découvertes se rattachent immédiatement aux grandes inventions de Viète et de Descartes. Il est vrai que cet homme si éminent attend encore de ses compatriotes mêmes la justice qui lui est due, et que, s'il est permis de l'oublier à Paris, on est presque excusable de l'ignorer à Zurich.

Dans le Chapitre VII, l'auteur passe rapidement en revue Copernic et ses disciples immédiats, puis les géomètres tels que le cardinal de Cusa, Albert Dürer, Luca di Borgo, Zamberti (qu'il nomme à tort Lamberti), Commandin. Il arrive ensuite aux algébristes italiens, au sujet desquels il aurait pu consulter l'intéressant travail de M. Gherardi, dont M. Curtze a publié, dans les *Archives de Grunert,* une traduction allemande (³). De là il passe aux travaux de Viète, de Stifel, de Rudolf, de Ramus, de Clavius; enfin il reprend l'analyse des progrès de l'Astronomie depuis Copernic

(¹) Voir *Bullettino di Bibliografia,* etc., t. V, p. 297.

(²) *Voir* FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer,* etc. Erlangen; 1869.

(³) T. LII; 1871. Voir *Bulletin,* t. III, p. 85.

jusqu'à Tycho Brahe et aux auteurs de la réforme grégorienne du calendrier.

Dans un Appendice, l'auteur jette un coup d'œil d'ensemble sur la marche générale des Sciences mathématiques depuis leur origine, et sur les travaux qui doivent suivre immédiatement l'époque à laquelle il s'est arrêté.

Malgré les critiques que nous avons été obligé de faire, nous devons néanmoins reconnaître que, parmi les Précis d'histoire générale des Mathématiques qui existent, l'Ouvrage de M. Suter est celui qui correspond le mieux aux connaissances actuellement acquises, et, à ce titre, nous ne pouvons que le recommander à l'attention de nos lecteurs. Nous espérons d'ailleurs que l'auteur trouvera bientôt, dans la publication d'une troisième édition, l'occasion de combler une bonne partie des lacunes que nous avons signalées.

J. H.

LAURENT (H.), répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, membre du Cercle des Actuaires français. — TRAITÉ DU CALCUL DES PROBABILITÉS. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. — 1 vol. in-8°, 268 p. Prix : 7 fr. 50.

Le Calcul des probabilités doit être considéré comme une création éminemment française. Parmi les fondateurs de ce Calcul, on voit, en effet, briller, au premier rang, des noms français : Pascal, Fermat, Montmort, de Moivre, d'Alembert, Condorcet, Laplace, Poisson, Bienaymé, etc.

Aucune branche des Mathématiques appliquées ne s'occupe de problèmes plus intéressants et plus immédiatement utiles pour la vie de tous les jours; aucune n'a plus contribué à détruire les préjugés et à mettre en lumière les conclusions du sens commun. C'est d'après des probabilités plus ou moins grandes que nous dirigeons tous nos actes, et la Science qui a pour but de nous guider dans l'appréciation relative de ces probabilités et de nous apprendre à tirer de l'observation les conclusions les plus rationnelles semblerait devoir occuper une place importante dans toute éducation vraiment scientifique.

Il est triste de dire que notre pays est peut-être, en Europe, celui où le Calcul des probabilités est le moins étudié, malgré les services inappréciables qu'il rend tous les jours, et ceux qu'il est appelé à rendre dans l'avenir par ses applications à la Statistique et à l'Administration.

Ce n'est pas ici le lieu de rechercher quelles sont les causes de cet abandon déplorable; mais nous n'en sommes que plus heureux d'avoir à signaler aujourd'hui l'apparition du nouveau Traité mathématique, dont nous sommes redevables à un jeune géomètre, déjà auteur de plusieurs Ouvrages devenus classiques [1].

M. Laurent, comme membre du Cercle des Actuaires français, a eu l'occasion de s'occuper spécialement des problèmes de probabilités qui se rapportent aux questions financières. Il a pu juger de l'insuffisance des Traités qui existent sur cette matière, et dont aucun ne comble la lacune qui sépare les livres tout à fait élémentaires, comme ceux de Lacroix et de Cournot, des Ouvrages de haute science de Laplace et de Poisson. Il s'est attaché à traiter les questions par des méthodes plus rigoureuses que celle des fonctions génératrices, employée par Laplace, et il a joint aux résultats connus de ses devanciers ceux qui sont dus aux travaux de Cauchy et de M. Bienaymé.

Après avoir résumé, dans son premier Chapitre, les formules de l'Analyse combinatoire et des développements en séries trigonométriques, il consacre les deux Chapitres suivants à l'exposition des principes fondamentaux du Calcul des probabilités.

Le Chapitre IV traite des méthodes dans les sciences d'observation, de la méthode des moindres carrés, avec les applications au tir des armes à feu et aux Tables de mortalité.

Le Chapitre V a pour objet les opérations des Compagnies d'assurances.

L'auteur nous avertit lui-même, dans sa Préface, qu'il ne traitera pas de l'application du Calcul des probabilités aux sciences morales, parce que, suivant lui, on ne peut appliquer le mot *probabilité* aux témoignages, lesquels ne sauraient être considérés comme des événements également probables. Il existe cependant dans les statistiques criminelles une constance de résultats tout aussi frappante que celle que l'on rencontre dans les Tables de mortalité. Dans les deux cas, les causes agissantes sont également inconnues. Or le

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 193.

Calcul des probabilités n'a pas à s'occuper nécessairement des causes, son but étant de raisonner sur les effets connus, dès que ceux-ci sont soumis à une régularité suffisante. Il semble donc que l'auteur ait cédé, dans cette occasion, à des considérations plus métaphysiques que mathématiques, en renonçant à poser les bases de la théorie, quelque imparfaites que soient, à l'heure présente, les données sur lesquelles cette théorie doit reposer.

La marche générale de la Science, à notre époque, tend à prouver que les faits psychologiques sont, comme les faits physiologiques, soumis à des influences inconnues, qui se manifestent à nous par la régularité frappante des résultats moyens; mais quelque incomplètes que soient nos connaissances sur un ordre de phénomènes, le Calcul des probabilités a toujours prise sur les faits observés, pour nous apprendre à en tirer le meilleur parti, et nous montrer la direction qu'il faut prendre pour les compléter. L'homme moral n'est pas plus un mystère pour nous que l'homme physique; le calcul est aussi bien applicable aux Tables de criminalité qu'aux Tables de mortalité, et nous ne voyons pas de différence essentielle entre la position de l'accusé en présence du juge et celle du malade en présence du médecin.

Nous regrettons aussi que les limites dans lesquelles M. Laurent a cru devoir se renfermer ne lui aient pas permis de donner plus de développement à l'application du Calcul des probabilités aux sciences d'observation et en particulier à la Méthode des moindres carrés, et de nous initier aux nouvelles recherches faites sur cette méthode, entre autres par M. Hansen. Nous espérons que, dans une nouvelle édition, l'auteur trouvera l'occasion d'élargir son cadre.

Il nous reste encore une remarque à faire au sujet de la Note II, relative au Calcul numérique dans les applications de la Méthode des moindres carrés. On sait qu'il est avantageux, dans ce cas, d'exécuter les multiplications à l'aide de la même Table qui donne les carrés, en s'appuyant sur la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

A cette formule, M. Laurent propose de substituer la suivante :

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2].$$

Il nous semble que cette dernière équation, exigeant trois lectures, est d'un usage moins expéditif que la précédente, qui n'en exige que deux, surtout quand on a à sa disposition une Table des *quarts de carrés*, comme on en trouve une à la suite des Tables de logarithmes à quatre décimales de J.-H.-T. Müller. Deux nombres étant écrits l'un sous l'autre, un calculateur exercé peut lire immédiatement, sans l'écrire, leur somme ou leur différence, ce qui ne saurait compter pour une opération. J. H.

RUBINI (R.), professore nella R. Università di Napoli. — TRATTATO D'ALGEBRA. — *Parte prima :* I primi Elementi d'Algebra. — *Parte seconda :* Complemento agli Elementi d'Algebra. — Napoli; 1872-1873. In-8°, 152-363 p. Prezzo : $2^{l},50^{c}6^{l},00$.

Les deux Volumes que nous annonçons, et dont l'un en est à sa quatrième, l'autre à sa troisième édition, font partie d'un Cours complet de Mathématiques justement estimé, et que l'auteur s'applique sans relâche à perfectionner toutes les fois que le succès de son œuvre lui fournit l'occasion d'une réimpression nouvelle.

Le Traité complet d'Algèbre doit se composer de quatre Parties, dont les deux dernières, qui doivent contenir les théories et les algorithmes de la nouvelle Algèbre et les éléments de la Théorie des nombres, sont encore sous presse.

La première Partie traite des matières habituelles d'un Précis d'Algèbre élémentaire. Dans la deuxième Partie, l'auteur expose la théorie des permutations et des combinaisons, la formule du binôme, la théorie des déterminants, les fractions continues, les quantités complexes et la résolution de l'équation binôme, la théorie générale des équations de degré supérieur, l'élimination, les séries avec diverses applications.

Nous apprenons avec plaisir que M. Rubini prépare en ce moment une nouvelle édition de ses excellents *Elementi di Calcolo infinitesimale*. J. H.

ТОТГЁНТЕРЪ (И.), профессоръ Математики въ Кембриджѣ. — *Дифференціальное вычисленіе, съ собраніемъ примѣровъ для упражненій.* — Съ англійскаго перевелъ и дополнилъ приложеніами къ геометріи пространства трехъ измѣреній В.-Г. ИМШЕНЕЦКІЙ, профессоръ теоретической механики въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ. — С.-Петербургъ, изданіе В.-П. Печаткина; 1873. Цѣна : 3 р. (¹).

Avant de publier ses savants Ouvrages d'histoire critique des Sciences mathématiques (²) et son dernier travail sur le Calcul des variations (³), M. Todhunter s'était fait connaître par une série d'excellents livres classiques sur les diverses branches des Mathématiques, formant un Cours élémentaire complet. Les deux volumes qui contiennent le Calcul différentiel et le Calcul intégral (⁴) ont eu déjà plusieurs éditions et ont été traduits dans plusieurs langues. Ces deux Traités, en effet, peuvent être regardés comme des modèles d'exposition rigoureuse des théories fondamentales; mais ce qui les rend surtout précieux, c'est le grand nombre d'exemples bien choisis qui sont développés dans le texte, ou proposés comme exercices à la fin de chaque Chapitre.

Le seul reproche que nous croyions pouvoir adresser à ces Ouvrages, c'est l'attachement trop exclusif de l'auteur à la *forme* d'exposition du Calcul infinitésimal, dite *méthode des limites*. Il est certain que l'introduction des infiniment petits, lorsqu'on ne lui donne pas le principe des limites pour fondement, ne peut conduire qu'à des conclusions dénuées de toute espèce de rigueur; mais cette méthode, dont Poisson a été l'un des derniers représen-

---

(¹) TODHUNTER (I.), professeur de Mathématiques à Cambridge. — *Calcul différentiel, avec un recueil d'exemples pour servir d'exercices.* — Traduit de l'anglais et augmenté des applications à la Géométrie de l'espace à trois dimensions, par V.-G. IMSCHENETSKY, professeur de Mécanique théorique à l'Université impériale de Kharkof. — Saint-Petersbourg, chez V.-P. Petchatkine; 1873. — 1 vol. in-12, 458-112 p. Prix : 3 roubles.

(²) *A History on the Process of the Calculus of Variations during the nineteenth Century.* Cambridge; 1861. — *A History of the mathematical Theory of Probability, from the time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge; 1865.

(³) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 273.

(⁴) *A Treatise on the Differential Calculus, with numerous Examples.* — *A Treatise on the Integral Calculus and its Applications, with numerous Examples.*

tants, est aujourd'hui abandonnée par tous les auteurs qui attachent quelque prix à l'exactitude des raisonnements.

Tous les géomètres considèrent maintenant les infiniment petits comme caractérisés, non par leur *petitesse actuelle*, mais par leur *variabilité* et par la *possibilité* de leur attribuer des valeurs aussi voisines de zéro que l'on voudra. On tire de cette définition les règles d'après lesquelles on peut altérer les infiniment petits ou les remplacer par d'autres, sans changer les limites de leurs rapports ou de leurs sommes. Grâce à l'emploi de ces règles, rien n'empêche, tout en restant dans la rigueur la plus absolue, de conserver les simplifications qu'offrait l'ancienne conception rudimentaire des infiniment petits. On peut s'en convaincre en lisant la première édition du *Cours d'Analyse* de Duhamel (1840-1841).

Cependant un certain nombre de bons auteurs, M. Todhunter entre autres, inspirés par une prudence qui nous paraît excessive, ont cru qu'il était nécessaire d'abandonner entièrement la terminologie du Calcul infinitésimal, et, tout en conservant les notations leibnitziennes, de leur enlever leur signification primitive pour en faire de purs symboles, destinés seulement à *rappeler* l'origine des quantités qu'ils représentent. De cette manière, pour les partisans exclusifs du langage de la *méthode des limites*, $\frac{dy}{dx}$ et $\int y\,dx$ sont des symboles indécomposables, dénotant la dérivée et la fonction primitive de la quantité y, et c'est ainsi que l'on voit des Traités de *Calcul différentiel*, dans lesquels il n'est pas question de la *différentielle*, et où le mot d'*infiniment petit* n'est pas prononcé. Suivant notre conviction, cette forme tout artificielle que l'on donne à l'algorithme du Calcul infinitésimal n'ajoute en rien à la rigueur et nuit considérablement à la clarté des conceptions et à la commodité dans l'usage pratique. Aussi beaucoup de géomètres, après avoir voulu, comme Lagrange, écarter des principes de l'Analyse la notion des infiniment petits, se trouvent forcés d'y revenir dans les applications, mais cette fois aux dépens de la rigueur, puisqu'ils n'ont traité jusque-là le langage infinitésimal que comme un expédient abréviatif.

Le savant traducteur russe, dont les lecteurs du *Bulletin* connaissent les excellents travaux sur les équations aux dérivées partielles, a voulu combler, autant que possible, la lacune que nous venons de signaler dans l'Ouvrage original. Pour cela, il a étendu et développé notablement le dernier Chapitre du volume anglais, celui où M. Todhunter définit, pour la première fois, les différentielles, et, dans ces suppléments, il expose la théorie des infiniment petits.

Une autre addition importante, due à M. Imschenetsky, consiste dans un *Appendice* de six Chapitres (112 pages), contenant l'application du Calcul différentiel à la Géométrie des trois dimensions, M. Todhunter s'étant contenté, comme la plupart des auteurs anglais, de traiter les questions de Géométrie plane. Le dernier Chapitre de cet Appendice est consacré à la courbure des surfaces, et se termine par la théorie de la mesure de la courbure, d'après Gauss.

Nous espérons que M. Imschenetsky continuera son œuvre si utile, et qu'il dotera bientôt son pays d'une traduction du *Calcul intégral* de M. Todhunter, ainsi que du *Traité des équations différentielles* de Boole, qui en est le complément obligé. Nous savons d'avance que ces Ouvrages ne peuvent que gagner entre les mains d'un traducteur tel que l'éminent professeur de Kharkof.

J. H.

NICOLAI COPERNICI THORVNENSIS DE REVOLVTIONIBVS ORBIVM CÆLESTIVM LIBRI VI. Ex auctoris autographo excudi curauit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit GEORGII IOACHIMI RHETICI DE LIBRIS REVOLVTIONVM NARRATIO PRIMA. — Thoruni, sumptibus Societatis Copernicanæ. MDCCCLXXIII. (Berolini, apud Weidmannos) (1).

Le 19 février de cette année, quatrième centenaire de la naissance de Nicolas Copernic, la Société copernicienne des Sciences et Arts de Thorn a pensé qu'elle ne pouvait offrir un plus beau présent commémoratif à la ville natale du grand homme qu'en donnant au monde savant, sous une forme digne de l'Ouvrage, une nouvelle édition de son Livre immortel, du *monumentum ære perennius* qu'il s'est élevé à lui-même. Tandis que l'auteur de ces lignes était chargé par la Société de collationner le manuscrit original avec la

(1) 1 vol. grand in-4°, xxx-496 p. Prix : 40 francs.

première édition, quelques-uns de ses collègues s'occupaient de la comparaison des quatre éditions publiées jusqu'ici. Prenant pour base les matériaux critiques ainsi rassemblés, j'entrepris, avec le secours de mon collègue Boethke, la constitution du texte. M. le professeur Hoüel m'ayant demandé, pour le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* un compte rendu de notre édition, je m'empresse de répondre à son appel dans la Note suivante.

Notre édition se distingue de toutes les précédentes principalement en ceci, qu'elle a été faite sur le manuscrit original de Copernic. Par un enchaînement remarquable de circonstances, ce manuscrit s'est conservé jusqu'à ce jour ; il a heureusement échappé au pillage et aux dévastations que commirent les Espagnols au commencement de la guerre de Trente ans, en Moravie, après la bataille de la montagne Blanche, et il se trouve depuis lors en la possession de la maison des comtes de Nostitz, à Prague. L'inspection de ces précieuses pages m'a fourni l'occasion d'étudier à cette source même l'histoire de la composition successive du manuscrit. C'est, en effet, l'exemplaire de travail de l'auteur, dans lequel, pendant près de quarante années qu'il a employées à la création de son œuvre, il a consigné les changements et les corrections qui lui ont paru nécessaires. D'après la forme modifiée de son écriture depuis sa jeunesse jusqu'à son âge mûr, d'après la différence de l'encre et du papier employés, on peut conclure assez sûrement l'époque de la rédaction des divers Chapitres. On peut ainsi prouver, par exemple, que Copernic a soumis trois fois son Ouvrage à un remaniement intégral, et que les huit Livres de la rédaction primitive ont été successivement réduits à sept, puis à six. Dans les *Prolégomènes,* je me suis largement étendu sur ce point. J'ai montré aussi qu'aucune des quatre éditions publiées jusqu'ici n'a été et n'a pu être faite sur notre manuscrit original ; que l'édition *princeps* (Nuremberg, 1543) a été probablement imprimée d'après une copie, faite sans doute par l'élève et l'intime ami de Copernic, Joachim Rheticus, et dans laquelle on s'est permis toute sorte de changements arbitraires.

Notre édition présente le texte du manuscrit original, tant qu'il n'a pas été nécessaire d'avoir égard à des erreurs d'écriture manifestes, et encore, en pareil cas, la leçon du manuscrit a-t-elle été indiquée en note au bas du texte. Elle contient les éléments critiques, en indiquant toutes les variantes de l'édition. De plus, en reproduisant au bas du texte tous les passages raturés qui pouvaient être de quelque importance pour l'histoire du texte ou pour toute autre cause, elle met le lecteur à même de se faire une idée du manuscrit sans l'avoir sous les yeux, et de se livrer lui-même aux intéressantes recherches dont j'ai parlé plus haut.

Une édition fondée simplement sur la comparaison des quatre éditions existantes (Nuremberg, 1543; Bâle, 1566; Amsterdam, 1616; Varsovie, 1854) aurait déjà suffi pour mettre en évidence un grand nombre d'erreurs dans cette dernière; mais, avec l'aide du manuscrit, j'ai eu souvent le bonheur de pouvoir remonter à la source de ces erreurs. La comparaison dont je viens de parler a donné de plus ce résultat remarquable, que la première édition est la plus correcte, et la dernière, celle de Varsovie, la plus incorrecte de toutes. Il y manque souvent des lignes entières, d'autres sont imprimées en double; on y rencontre les fautes d'impression les plus étranges, dues en partie à une fausse interprétation des abréviations. Cela est d'autant plus surprenant, que les éditeurs de Varsovie ont eu le manuscrit original à leur disposition. Il est vrai que, en lisant l'appréciation qu'ils en font dans leur édition, on serait tenté de croire qu'ils ont eu un tout autre manuscrit que moi sous les yeux; mais c'est ce que d'autres circonstances ne permettent pas d'admettre. J'insiste un peu longuement sur ce point, parce que, aussitôt après l'annonce de notre édition, un critique varsovien a sagement proclamé, dans le *Magazin für Litteratur des Auslandes,* qu'une nouvelle édition était inutile, par la raison que celle de Varsovie répondait à toutes les exigences. Je puis, au contraire, déclarer encore une fois publiquement que l'édition des *Revolutiones* publiée à Varsovie ne peut être d'aucune utilité pour l'étude du Livre à quiconque ne comprend pas le polonais, et, quant à la traduction polonaise, le premier astronome polonais actuellement vivant affirme, dans une Lettre que j'ai eu l'occasion de voir, qu'elle est encore plus mauvaise que le texte latin.

Parmi les découvertes les plus importantes auxquelles a donné lieu l'examen du manuscrit, on peut compter celle du passage où Copernic admet la possibilité d'un mouvement elliptique dans le ciel (p. 116 de notre édition). Bien qu'il ne soit question dans ce passage que du mouvement de libration de la Lune, la chose a cependant une grande portée, parce que Copernic s'est servi d'un mouvement semblable à la libration de la Lune, selon ses propres expressions, pour expliquer les mouvements des planètes, et parce que l'addition de ces mots : *Sed de his alias,* montre qu'il s'était longtemps occupé de l'ellipse, et que peut-être, comme le fait observer le critique des *Gottingische gelehrte Anzeigen,* il aurait fait le grand pas que Kepler a fait après lui, s'il n'avait pas été, avec tous ses contemporains, trop prévenu en faveur de l'excellence du mouvement circulaire. Du reste, Copernic fait encore, dans un autre endroit (lib. V, cap. IV, p. 326 de notre édition), des allusions à l'ellipse, que Kepler lui-même avait déjà relevées [1].

On a joint, comme Appendice à l'Ouvrage de Copernic, l'écrit par lequel ce Livre fut annoncé, pour la première fois, au monde savant, la *Narratio prima* de Georges Joachim, qui avait pris de son pays natal le nom de Rheticus. De cet écrit découlent d'importants renseignements sur la vie de Copernic, et, comme il a été rédigé sous les yeux mêmes de ce dernier, à Frauenburg, nous croyons qu'il se trouve ici à sa vraie place. De plus, j'ai ajouté à l'édition une liste sommaire des observations propres de Copernic, indiquées dans l'Ouvrage, ainsi qu'un *Index nominum.* Le projet d'un *Index rerum,* auquel j'avais songé, a dû être abandonné, faute du temps nécessaire.

Si l'Ouvrage a pu, au point de vue matériel, paraître d'une manière digne de sa destination comme souvenir de fête séculaire, nous le devons à la généreuse libéralité du Gouvernement royal, qui a mis à notre disposition des ressources que n'aurait pu fournir une Société d'hommes privés.

Faisons encore remarquer, en terminant, que l'on peut aussi se procurer, auprès de la Société Copernicienne des Sciences et Arts de Thorn, un portrait photographique de Copernic, et neuf *fac-simile* photographiés sur le manuscrit original, parmi lesquels se trouve le passage mentionné plus haut, où Copernic parle de l'ellipse.

Thorn, le 22 septembre 1873.

MAXIMILIEN CURTZE.

(1) *De motibus stellæ Martis,* lib. I, cap. V.