BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 106-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__106_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PERIODICO DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO. Pubblicato per cura dei Signori A. ARMENANTE, E. BERTINI, D. BESSO, E. DE MONTEL, L. PINTO, F. RODRIGUEZ, L. DE SANCTIS. — Roma, all'Uffizio di Redazione del Periodico ([1]).

1re année; 1873-1874.

PROGRAMME, *par la Rédaction.*

BESSO (D.). — *Quelques observations sur l'enseignement du théorème de Pythagore.* (5 p.)

MONTEL (E. DE). — *Notions sur la résultante, avec quelques applications.* (10 p.)

L'auteur traite de la condition de compatibilité des trois équations

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0,$$

et il en donne l'application à la théorie de l'involution.

BESSO (D.). — *Sur quelques préjugés mathématiques.* (12 p.)

Cette Note a pour but de prémunir les commençants contre certaines erreurs assez fréquentes, contre celle, entre autres, qui con-

---

([1]) Nous nous empressons de signaler à nos lecteurs cette publication, qui témoigne chez les professeurs italiens d'une préoccupation touchant les méthodes d'enseignement et de perfectionnement des programmes, qu'on ne rencontre malheureusement pas dans tous les pays. Ce Journal paraît par fascicules mensuels de deux feuilles in-8°. Prix de l'abonnement, pour l'Italie, 8 fr.; pour la Suisse, 9 fr.; pour l'Autriche, la France et l'Allemagne, 10 fr. — Le premier numéro a paru en juin 1873. Nous analyserons seulement les articles relatifs aux Mathématiques.

siste à attribuer à toutes les opérations la propriété distributive

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$

et à en déduire à tort la proportionnalité entre des grandeurs qui dépendent entre elles suivant toute autre loi.

CREMONA (L.). — *Corrections aux « Elementi di Geometria projettiva* (1). » (2 p.)

BERTINI (E.). — *Deux mots sur l'enseignement de la Géométrie dans les lycées.* (5 p.)

JUNG (G.). — *Lettre à M. Bertini.* (4 p.)

On sait que l'administration de l'Instruction publique, en Italie, voulant réagir contre la méthode indécise qui règne dans la plupart des Traités de Géométrie écrits depuis un siècle, a imposé, comme code d'enseignement, les *Éléments d'Euclide,* dont une traduction littérale a été éditée en 1867 par les soins de MM. Betti et Brioschi. Il a été recommandé aux professeurs de se conformer scrupuleusement, sinon à la lettre, du moins à l'esprit de ce chef-d'œuvre des temps antiques. Cette mesure a provoqué la rédaction de plusieurs Traités, conçus dans l'esprit euclidien, notamment du livre de MM. Sannia et d'Ovidio, dont nous avons rendu compte (2).

Une telle décision devait naturellement rencontrer des adversaires, et les Notes de MM. Bertini et Jung ont pour but de répondre aux objections anti-euclidiennes. Suivant ces deux savants professeurs, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de suivre exactement le texte d'Euclide, au moins pour les six premiers Livres, et ils apportent à l'appui de leur opinion des raisons dont plusieurs sont parfaitement fondées, mais qui, à notre avis, prouvent seulement une chose : c'est que la plupart des Traités modernes sont en arrière de celui d'Euclide, et que, loin de suivre le progrès des branches supérieures des Mathématiques, la Géométrie élémentaire a reculé, sous le rapport de la rigueur des principes, et souvent même dans les détails d'exposition. C'était dès lors faire un pas en avant que de revenir à Euclide; mais ce pas doit-il être considéré comme suf-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 10.
(2) Voir *Bulletin*, t. I, p. 329.

fisant, et l'état présent de la science permet-il de s'en contenter? Nous ne le pensons pas.

Nous adoptons entièrement les raisons qui ont fait abandonner les méthodes dont l'Ouvrage de Legendre offre le type le plus célèbre. Pour le choix des axiomes fondamentaux, pour l'enchaînement des premières propositions, pour la rigueur dans la théorie des proportions, la supériorité appartient certainement à Euclide. On peut encore reprocher à Legendre d'avoir donné à ses démonstrations une tournure trop arithmétique, qui, tout en facilitant le passage aux applications métriques, fait trop souvent perdre de vue la figure et ses propriétés. On a, depuis, modifié la théorie de la proportionnalité, en la rendant plus conforme aux méthodes modernes (¹); mais nous concevons, sans les partager entièrement, les regrets des partisans absolus de la pureté géométrique des méthodes. Il faut voir seulement s'il est bien avantageux d'y demeurer fidèle, coûte que coûte (*a qualunque costo*), et si l'on n'a pas eu souvent raison de s'en écarter.

Notre conviction est que, au lieu de s'attacher à creuser une ligne profonde de démarcation entre deux méthodes faites pour s'éclairer mutuellement, on devrait, au contraire, tendre de toutes ses forces à les unifier, en les combinant et les comparant, en montrant, toutes les fois qu'il y a lieu, l'identité des procédés cachée sous la variété des symboles, et, lorsque les deux méthodes s'écartent réellement, en faisant comprendre les raisons de cet écart, et pesant les avantages qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre. Ce qui importe, en effet, dans l'éducation, c'est bien plus l'étude des procédés généraux que celle des vérités particulières, auxquelles on doit seulement faire jouer le rôle d'exemples. C'est par là que l'esprit peut acquérir cette aptitude à la généralisation, qui doit être le but suprême de l'enseignement secondaire.

Notons, pour terminer, que la plupart des reproches adressés à la méthode dite *arithmétique* ont la même source que la confusion en vertu de laquelle on regarde souvent l'Algèbre comme une simple extension de l'Arithmétique et non comme la science de la comparaison des grandeurs considérées en elles-mêmes, indépendamment de toute représentation numérique. Si l'on se place au point de vue

---

(¹) *Voir*, par exemple, les *Éléments de Géométrie* de MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE.

de cette conception générale de l'Algèbre et de ses opérations, la forme algébrique donnée aux démonstrations géométriques n'est autre chose que l'emploi d'une écriture plus claire que le langage ordinaire; les opérations algébriques sont des indications abrégées de constructions, et doivent toujours rappeler l'idée d'une figure. Ce rapprochement constant du symbole numérique et de sa réalisation graphique habituera réciproquement à l'emploi de la *notation géométrique,* dont l'Analyse moderne tire un si grand parti. Enfin on devra rechercher toutes les occasions d'initier de bonne heure les élèves à la notion si délicate et si essentielle de *limite,* et c'est dans le rapprochement des considérations arithmétiques et géométriques que l'on trouvera le moyen le plus efficace d'atteindre ce but.

Notre conclusion est donc qu'Euclide a composé un livre admirable qui, aujourd'hui encore, peut être consulté avec profit, mais qui est loin de répondre au niveau de la Science actuelle. Les illustres savants qui ont décidé son introduction dans les écoles étaient mieux que personne en état de composer eux-mêmes un Traité unissant à la rigueur d'Euclide la largeur de vues de la Géométrie moderne; ils auraient offert à l'intelligence des jeunes gens une gymnastique non moins profitable, en les conduisant plus loin par une route plus aisée.

De Montel (E.). — *Notions sur la résultante, avec quelques applications.* (2^e art., 10 p.)

Suite de l'involution. Équations à trois inconnues.

Valeriani (V.). — *Lettre à M. Bertini.* (18 p.)

L'auteur de cette Lettre expose les objections auxquelles lui paraît sujette l'adoption pure et simple des *Éléments d'Euclide* comme texte d'enseignement. Il considère le second Livre comme le seul qui soit sans défaut; les Livres I, III et IV auraient besoin de modifications, lesquelles pourraient d'ailleurs se faire sans altérer l'esprit général de l'Ouvrage; mais il serait d'avis de rejeter complétement l'exposition des proportions, telle qu'elle se trouve dans le Livre V. Nous aurons occasion, un peu plus loin, de revenir sur cette question.

Laudi (V.). — *Durée de l'oscillation du pendule cycloïdal et du pendule circulaire.* (5 p.)

Jung (G.). — *Notions élémentaires sur les limites.* (15 p.)

Exposition élémentaire de la théorie des limites, destinée à combler une lacune fâcheuse qui existe dans la plupart des Traités d'Algèbre. L'auteur prend, comme premier exemple, le *nombre irrationnel* $\sqrt{75}$. Il nous semble toutefois qu'un tel symbole ne peut être défini exactement que par des considérations fondées sur la théorie même des limites, de sorte que cet exemple aurait été mieux placé après qu'avant l'exposition de cette théorie. Il eût peut-être mieux valu indiquer l'exemple d'un quotient périodique, ou celui de la construction d'un carré équivalant à un rectangle de côtés égaux à 5 et à 15.

MOLLAME (V.). — *Expression du rapport entre deux états d'une grandeur (ou de deux grandeurs homogènes) au moyen d'une série.* (15 p.)

En déterminant les nombres q, m_1, m_2,... par les équations

$$A = Bq + r_1, \quad B = m_1 r_1 - r_2 = m_2 r_2 - r_3 =, \ldots,$$

on trouve, pour l'expression du rapport de A à B,

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} + \ldots,$$

avec une erreur que l'on peut évaluer.

ARZELÀ (C.). — *Exposition de quelques points d'Algèbre élémentaire.* (4 p.)

Sur la notion des quantités négatives, fondée sur la généralisation de la définition de la soustraction, considérée comme correspondant à un mouvement en sens inverse de celui qui répond à l'addition.

BESSO (D.). — *Sur la notion d'équation.* (4 p.)

BERTINI (E.). — *Le cinquième Livre d'Euclide.* (50 p.)

Malgré notre admiration profonde pour la théorie si ingénieuse d'Euclide, nous n'en considérons pas moins cette théorie comme trop difficile pour les élèves, malgré le talent qu'a déployé M. Bertini pour en faciliter l'accès. Nous savons que les auteurs des programmes scolaires ont eu pour but principal de faire de la Géométrie une gymnastique intellectuelle; mais, pour l'esprit comme pour le corps, la meilleure gymnastique est-elle toujours la plus fatigante? Et d'ailleurs est-ce un bon moyen de stimuler le zèle des jeunes gens que de leur faire suivre une voie qui n'est qu'une impasse? Nous demandons à tous les géomètres si la méthode moderne des limites, dont M. Jung a fait sentir toute l'importance dans un article que nous citions tout à l'heure, n'est pas un aussi beau sujet d'étude, à tous les points de vue, que les méthodes particulières des anciens, qui n'ont pas d'application en dehors de l'objet restreint en vue duquel elles ont été créées. La méthode des limites présente, il est vrai, ses difficultés, comme le cinquième Livre d'Euclide; mais ce sont des difficultés qui n'ont rien à faire avec la mémoire, et qui disparaissent lorsqu'on les a expliquées sur un grand nombre d'exemples. Aussi est-il convenable de commencer cette étude le plus tôt possible, et la théorie des grandeurs proportionnelles en offre une occasion on ne peut plus favorable.

Euclide ne définit point ce que c'est qu'un rapport: il définit seulement l'égalité des rapports. Il y a beaucoup de quantités, telles que les longueurs, les angles, les temps, etc., dont il est impossible de définir la nature, et dont on doit se contenter de définir l'égalité; mais, du moins, ces quantités nous sont révélées par les sens d'une manière quelconque, et nous savons de quoi l'on nous parle. Il n'en est pas de même de la notion abstraite de rapport, qui ne s'applique à aucun objet connu, et, si on ne la définit pas d'une manière quelconque, l'égalité et l'inégalité des rapports ne seront pour nous que des mots. Comment convient-il de définir le rapport?

L'idée de proportionnalité étant une des plus importantes de toutes les Mathématiques, il ne faut pas craindre de consacrer à son exposition de longs développements. On commencera par le cas simple des rapports de grandeurs commensurables, qui, grâce aux progrès qu'a faits l'Arithmétique pratique depuis Euclide, ne peut offrir de difficulté. On définira ensuite, dans le cas de l'incommensurabilité, le *rapport approché,* c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs commensurables différant respectivement des grandeurs données aussi peu que l'on voudra. Le rapport de deux grandeurs sera dit égal à celui de deux autres lorsque, à chaque détermination du rapport approché des deux premières, correspondra une détermination égale du rapport approché des deux autres.

L'exposition de cette théorie n'est pas, au fond, plus arithmétique que celle d'Euclide; elle peut se fonder, comme elle, sans que l'on sache effectuer la division des quantités concrètes en un nombre quelconque de parties égales, et elle repose essentiellement sur le principe des limites. On peut y employer, avec grand avantage, le secours des figures, dont M. Bertini a fait un très-heureux emploi dans son travail, en les diversifiant comme lui, et représentant les quantités variables, soit par des lignes, soit par des angles, des aires, etc.

M. Bertini a donné au cinquième Livre d'Euclide un complément important, en y joignant la théorie de la proportionnalité entre deux grandeurs variables, théorie qu'il a traitée par la méthode purement euclidienne. Grâce à lui, on pourra maintenant prendre plus facilement connaissance de la remarquable méthode du géomètre alexandrin, que tout professeur doit avoir étudiée au moins une fois dans sa vie. Pour les commençants, c'est autre chose; nous ne voudrions pas plus la leur imposer qu'introduire la lecture d'Archimède dans l'enseignement de l'École Polytechnique. Nous préférons *à tous les points de vue* les Mathématiques modernes, qu'il ne faut pas accuser des méfaits de ceux qui sont chargés de les enseigner.

Ziletti (V.). — *Conditions pour que deux grandeurs soient proportionnelles.* (7 p.)

L'auteur expose la méthode donnée dans le Traité de MM. Rouché et de Comberousse. J. H.

ARCHIV der Mathematik und Physik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe (¹).

T. LV; 1873.

Curtze (M.). — *Johann-August Grunert.*

Nous avons publié une traduction de cette Notice dans le *Bulletin,* t. III, p. 285.

Wangerin (A.). — *Sur un nouveau mode de représentation conforme d'un plan sur un autre.* (14 p.)

(¹) Voir *Bulletin,* t. IV, p. 278.

Lagrange a démontré, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1779 (¹), que, si les points (x, y), (t, u) de deux plans sont liés par une relation de la forme

$$x + iy = f(t + iu),$$

où $i = \sqrt{-1}$: 1° le rapport des longueurs ds, $d\sigma$ des éléments infiniment petits, pris à partir de deux points correspondants, ne dépend que de la position de ces points, et non de la direction de ces éléments; 2° deux éléments ds, ds' du premier plan font entre eux le même angle que leurs correspondants $d\sigma$, $d\sigma'$ du second plan; 3° aux parallèles aux axes coordonnés dans l'un des plans correspondent deux systèmes de courbes orthogonales dans l'autre plan.

On peut maintenant se proposer de déterminer la fonction f de telle manière qu'aux parallèles à l'axe des t dans un des plans corresponde un système donné de courbes dans l'autre plan.

Ce problème a été résolu dans plusieurs cas par Lagrange et par Gauss. M. Wangerin rappelle d'abord les solutions connues jusqu'ici. Il en expose ensuite une nouvelle, dans laquelle les courbes correspondant aux parallèles aux axes des t et des u sont, dans le plan des xy, deux systèmes de lemniscates non confocales.

WANGERIN (A.). — *Sur quelques propriétés des lemniscates (courbes de Cassini).* (3 p.)

OBERMANN (J.). — *Théorie des vibrations longitudinales des verges composées.* (13 p.)

L'auteur traite le cas général du mouvement vibratoire longitudinal d'une verge formée d'un nombre quelconque de parties homogènes de substances différentes.

HOCHHEIM (A.). — *Sur la surface gauche* $z = My^2x$. (14 p.)

Surface engendrée par une droite glissant sur une parabole dont le plan est parallèle à celui des yz, de manière à rencontrer constamment l'axe des y et à rester parallèle au plan des zx.

HOPPE (R.). — *Théorie des grandeurs infinies.* (10 p.)

Dans ce travail, déjà publié dans d'autres recueils, M. Hoppe rectifie les inexactitudes de langage ou de doctrine que l'on commet

(¹) *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 637.

si souvent en traitant des infiniment petits et des infiniment grands, et qui ont jeté auprès de certains esprits un discrédit sur la méthode infinitésimale elle-même. On trouvera une exposition rigoureuse de cette méthode dans le *Traité de Calcul différentiel* publié par M. Hoppe, en 1865 (¹).

WORPITZKY. — *Sur l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi},$$

A, B, C *étant des constantes quelconques, réelles ou complexes.* (7 p.)

SIMONY (O.). — *Solution simple du problème de représenter complétement* $\sqrt[3]{a+bi}$ *sous la forme* $x+yi$. (5 p.).

SIMONY (O.). — *Sommation de quelques séries finies et son application à la représentation des* $n^{\text{ièmes}}$ *puissances de* $\cos x$ *et de* $\sin x$ *par des sommes de fonctions semblables des multiples entiers de l'arc* x. (8 p.)

HOPPE (R.). — *Fondements cinématiques de la théorie des courbes.* (28 p.)

L'auteur remarque que la théorie des courbes dans l'espace a été jusqu'ici considérée comme plus compliquée que celle des surfaces. Le présent Mémoire est une introduction à une nouvelle exposition de cette théorie, qu'il se propose de publier plus tard, et dans laquelle cette théorie est ramenée à une simplicité comparable à celle de la Statique analytique. Ici il étudie les figures à paramètre variable, qui peuvent engendrer, par leurs intersections successives, soit un plan, soit une droite.

FRANZ (J.). — *Sur les rayons de courbure et les lignes de courbure d'une surface donnée en coordonnées planaires homogènes.* (8 p.)

WANGERIN (A.). — *Sur le problème de l'équilibre des corps élastiques de révolution.* (34 p.)

On connaît depuis longtemps les équations générales de l'équi-

(¹) *Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie, mit strenger Begründung der Infinitesimalrechnung.* Berlin; 1 vol. in-8°.

libre des corps élastiques; mais jusqu'ici le nombre des applications de ces équations à des corps déterminés est relativement peu considérable. On a traité les cas où les corps peuvent être envisagés comme n'ayant qu'une ou deux dimensions, et les cas des corps ayant la forme de parallélépipèdes, de cylindres, ou de couches comprises entre deux sphères concentriques; et l'on peut consulter à ce sujet les travaux de Clebsch, de Lamé, de Thomson, de Hoppe. Dans le présent Mémoire, l'auteur a étendu ses recherches au cas d'un corps de révolution quelconque. Il a d'abord cherché à résoudre le problème relatif à une couche comprise entre deux sphères concentriques. Cette question résolue, il a passé aux cas d'un anneau circulaire et d'un ellipsoïde de révolution, pour lesquels on connaît la solution de l'équation du potentiel. Au moyen de ces cas particuliers, il est arrivé à ce résultat plus général : « Les équations différentielles qui déterminent l'état d'équilibre élastique d'un corps de révolution quelconque d'élasticité constante peuvent s'intégrer quand on connaît la solution de l'équation du potentiel pour ce corps. » Le problème de l'équilibre élastique d'un corps de révolution est ainsi ramené à l'intégration de l'équation du potentiel.

Günther (S.). — *Considérations mathématiques sur un passage de Pline.* (16 p., 1 pl.)

Pline raconte, au Livre XXXVI de son *Historia naturalis,* que Curion bâtit à ses frais un théâtre dont la disposition ingénieuse est décrite en ces termes : « Il fit construire deux théâtres en bois, très-spacieux et juxtaposés, chacun en équilibre et tournant sur un pivot: avant midi, pour le spectacle des jeux, ils étaient adossés, afin que le bruit de l'une des deux scènes ne gênât pas l'autre; l'après-midi, tournant tout à coup, ils se trouvaient face à face, les fonds se séparaient, les angles se réunissaient, et il se formait un amphithéâtre pour des gladiateurs.... » (1).

Le comte de Caylus est le premier qui ait essayé d'expliquer cette construction, sans y réussir entièrement. Après lui est venu le célèbre architecte Weinbrenner, qui a trouvé que le théâtre devait être formé de deux moitiés d'ellipse. M. Günther reprend la question, et la discute complétement, tant par l'Analyse que par des considérations de Géométrie élémentaire.

(1) *Histoire naturelle;* traduction de Littre.

Günther (S.). — *Sur quelques problèmes de Géométrie supérieure.* (12 p.)

L'auteur traite d'abord le problème des corrections qu'il faut apporter aux erreurs d'observation provenant de l'ellipticité des tourillons d'un instrument astronomique. Il s'occupe ensuite des problèmes qui sont des généralisations du premier, relatives aux espaces à trois et à n dimensions.

Affolter (Fr.-G.). — *Sur la théorie de la conchoïde.* Première Partie. (14 p., 1 pl.)

Étude géométrique de cette courbe.

Hochheim (A.). — *Sur les nombres figurés.* (4 p.)

Simony (O.). — *Décomposition de l'intégrale*

$$U = \int \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(a + bx + cx^2)^\beta}},$$

en intégrales elliptiques des trois espèces, en supposant que α, β *soient des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, et* a, b, c *des quantités différentes de zéro.* (18 p.)

Mendthal. — *Démonstration géométrique de la construction de Steiner pour la solution du problème de Malfatti.* (4 p.)

Wangerin (A.). — *Représentation géométrique des racines de l'équation* $u^2 + v^2 = 0$.

Hoppe (R.). — *Application du théorème d'Euler sur les polyèdres.*

Ligowski. — *Le calcul du nombre* π : *contribution au calcul approximatif des intégrales définies.*

Ziegler (A.). — *Le « triangle extérieur », nouveau procédé pour l'étude de la Trigonométrie sphérique.* (4 p.)

Meissel (E.). — *Sur la diffusion dans l'espace des gaz complétement élastiques et de température constante.* (16 p.)

Meissel (E.). — *Sur l'écoulement de l'eau hors des vases dans deux cas particuliers, après l'établissement d'un état permanent.*

Gegenbauer (L.). — *Études sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* (6 p.)

L'auteur cherche les conditions qui doivent être remplies : 1° pour que le produit de deux intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire du second ordre soit une fonction donnée de la variable ; 2° pour que le quotient de deux intégrales particulières soit une fonction donnée de la variable ; 3° pour que deux intégrales particulières y_1, y_2 satisfassent à l'équation $\frac{y_1}{y_2^p} = C$.

Gegenbauer (L.). — *Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires.* (26 p.)

L'auteur démontre les trois théorèmes suivants :

1. Si toutes les intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients variables,

$$(1) \qquad X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_0 y = 0$$

sont des puissances d'une même fonction de la variable indépendante x, elles sont toutes de la forme

$$y = e^{C\int \sqrt[n]{\frac{X_0}{X_n}}\,dx}.$$

2. Si les rapports deux à deux des intégrales particulières de l'équation (1) sont des puissances de x, les intégrales particulières sont de la forme

$$y = x^p e^{-\int \frac{dx}{n x X_n}\left[x X_{n-1} + \left(p_1 + \ldots + p_n - \frac{n^2-n}{2}\right) X_n\right]}.$$

3. Si les mêmes rapports sont des puissances de e^x, les intégrales particulières sont de la forme

$$y = e^{px - \int \frac{dx}{n X_n}[X_{n-1} + (p_1 + \ldots + p_n) X_n]}.$$

Gegenbauer (L.). — *Note sur les séries hypergéométriques.* (6 p.)

Hain (E.). — *Sur les diviseurs d'un nombre.* (3 p.)

Fischer (F.-W.). — *Note sur les équations qui peuvent se ramener à des équations réciproques.* (8 p.)

Dostor (G.). — *Théorie générale des surfaces de révolution du second degré.* (17 p. ; fr.)

Hoza (F.). — *Construction des lignes d'intensité dans le cas d'une illumination centrale.* (12 p., 3 pl.)

Hain (E.). — *Théorèmes sur le triangle.* (4 p.)

Eggers (H.). — *Sur l'involution.* (21 p.)
Précédé de *Remarques préliminaires,* par F. August. (4 p.)

Hoppe (R.). — *Sur le problème d'un système de surfaces triplement orthogonal.* (30 p.)

Si u, v, w sont les coordonnées rectangles du point d'intersection de trois surfaces

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.},$$

dont les normales en ce point doivent être perpendiculaires deux à deux, les conditions d'orthogonalité seront exprimées par l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

et par deux autres analogues, et le problème consiste dans l'intégration du système de ces trois équations.

La solution générale du problème devrait contenir trois fonctions arbitraires de deux variables chacune. Le présent Mémoire contient seulement des solutions renfermant un plus grand nombre de fonctions d'une variable chacune (le plus souvent d'une des variables u, v, w elles-mêmes). Toutefois ces solutions particulières ne laissent pas d'être complètes dans l'étendue d'un certain domaine, défini par un caractère distinctif, et les résultats obtenus fournissent des classes déterminées de surfaces.

Günther (S.). — *Contributions à la théorie des fonctions continues.* (13 p.)

Worpitzky. — *Sur les principes fondamentaux de la Géométrie.* (17 p.)

L'auteur se propose de contribuer par ce travail à la délimitation définitive des axiomes et des théorèmes de la Géométrie, sujet qui a donné lieu à tant de controverses dans ces dernières années. Parmi les résultats auxquels il est parvenu, il mentionne les deux suivants : Par une meilleure définition de l'angle, il a démontré sans difficulté l'existence d'une surface qui contient tout entière une droite quelconque ayant avec elle deux points communs. Ensuite il espère avoir fait faire un pas à la célèbre question des parallèles, en remplaçant l'axiome XI d'Euclide par un autre, qui lui semble plus évident, et qui consiste à admettre qu'*il n'existe aucun triangle dans lequel chacun des angles puisse être supposé moindre qu'un angle donné aussi petit que l'on voudra.* On sait, en effet, que l'existence d'un pareil triangle serait la conséquence rigoureuse de la fausseté de l'axiome XI. M. Worpitzky a certainement étudié avec soin tous les travaux publiés jusqu'ici sur la question. Aussi, tout en faisant des réserves sur quelques-unes de ses vues, nous recommandons vivement son article à l'attention de nos lecteurs.

Meutzner. — *Théorèmes sur le quadrilatère.* (4 p.)

Hoppe (R.). — *Démonstration du théorème de Crofton, sur le calcul direct des aires.* (3 p.)

Ce théorème avait été établi par M. Crofton [1], au moyen de considérations neuves et originales, qui faisaient désirer une vérification par les voies ordinaires du Calcul intégral. M. Serret y est parvenu dans un article inséré aux *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI [2], mais par une voie indirecte. Dans la présente Note, M. Hoppe démontre le théorème en suivant la marche de l'inventeur, et substituant seulement aux principes sur lesquels celui-ci s'appuie les procédés ordinaires du calcul des quadratures.

Björling (C.-F.-E.). — *Sur les relations qui doivent exister entre les coefficients d'un polynôme* $F(x)$, *pour qu'il contienne un facteur de la forme* $x^n - a^n$. (12 p.; fr.)

Hoza (F.). — *Proposition de Géométrie.* (6 p.)

Westphal (M.). — *Flexion qu'un ressort courbé suivant une courbe plane quelconque, et déformé par deux forces égales et opposées, éprouve dans le sens de l'action des forces.* (2 p.)

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994.

[2] Voir *Bulletin*, t. I, p. 28.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI. — In-4° [1].

T. VI; 1873.

BERTELLI (le P.). — *Remarques historiques sur les recherches concernant les petits mouvements spontanés des pendules, faites depuis le* XVII^e^ *siècle jusqu'à nos jours.* (44 p.)

Les premières expériences sur ces mouvements ont été faites, au rapport de Gassendi, par un gentilhomme dauphinois, nommé Alexandre de Calignon Peirins, qui voulut constater si la cause qui produit les marées n'agit pas d'une manière analogue sur le fil à plomb. Il observa un mouvement elliptique, ayant une période de vingt-quatre heures.

Ces expériences, faites en 1643, furent reprises par J.-B. Morin, qui crut y trouver une preuve contre la rotation de la Terre. Le P. Mersenne essaya vainement de constater lui-même ces mouvements, et Caramuel de Lobkowitz, évêque de Vigevano, déclara fausses les observations de Calignon.

Mairan [2] après avoir résumé cette discussion, regarda comme inadmissibles les objections faites aux expériences de Calignon, et engagea les physiciens à les répéter. A cet effet, Lecat établit dans la cathédrale de Rouen un pendule de 127 pieds de longueur, dont il observa les déplacements pendant une année, et sa conclusion fut que ces mouvements n'avaient rien de régulier.

Le P. Bertelli mentionne encore les expériences faites vers la même époque par le baron de Grante, par Bouguer, par Toaldo, etc.; puis il arrive aux travaux modernes, parmi lesquels il cite en première ligne les études faites, dans le voisinage de la mer, par M. Ant. d'Abbadie. Outre certains mouvements périodiques, en relation avec les marées, on remarque d'autres déplacements irréguliers, qui paraissent être les effets affaiblis de tremblements de terre lointains.

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur quelques annotations de Galileo Galilei à un Ouvrage de* Jean-Baptiste MORIN. (16 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 252.

(2) *Histoire de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1742.

Sur un exemplaire, conservé à la Bibliothèque Nationale de Florence, d'un livre de Morin intitulé : « *Famosi et antiqui problematis de Telluris motu vel quiete hactenus optata solutio. MDCXXXI* », se trouvent des notes manuscrites, tracées, comme tout porte à le croire, de la main de Galilée, et qui ont pour objet de réfuter les objections de l'auteur contre le mouvement de la Terre. M. le prince Boncompagni donne une reproduction complète de ces Notes.

VIMERCATI (G.). — *Sur la première idée des chaudières tubulaires.* (4 p.)

BOUCHON-BRANDELY (G.). — *Quelques remarques sur deux articles du* Bullettino [1], *intitulés :* « Storia delle matematiche presso gli Arabi, dal Dr Ermanno HANKEL » *et* « Vite di matematici arabi, etc., con Note di STEINSCHNEIDER ». (4 p.; fr.)

BIADEGO (G.). — *Sur dix lettres inédites de* Joseph-Louis LAGRANGE. (20 p.)

LAGRANGE. — *Dix lettres inédites de* Joseph-Louis LAGRANGE, *écrites au mathématicien véronais* Antonio-Maria LORGNA. (11 p.; fr.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur dix lettres de* Joseph-Louis LAGRANGE, *écrites en langue italienne.* (12 p.)

GENOCCHI (B.). — *Réclamation en faveur de* Félix CHIÒ. (6 p.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé :* « *Sur une traduction latine de l'*Optique *de Ptolémée,* etc. ». (*Bullettino di Bibliografia,* etc., t. IV, p. 470) [2]. (12 p.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Notice sur des Tables logarithmiques hollandaises.* (36 p.; fr.)

La découverte de Neper, publiée pour la première fois à Édimbourg, en 1614, a été introduite en Hollande par les efforts réunis du libraire mathématicien Adriaan Vlack [3] et de l'arpenteur Ézé-

(1) Voir *Bulletin,* t. VI, p. 254 et 255.

(2) Voir *Bulletin,* t. IV, p. 246.

(3) Dans les éditions imprimées par lui, son nom est écrit Vlacq. C'est à tort que l'on écrit souvent Ulacq.

chiel de Decker, qui firent paraître, en 1626, à Gouda, un volume in-4° intitulé *Nieuwe Telkonst,* contenant la traduction hollandaise de quelques Traités de Neper (*Rhabdologia, Arithmetica localis,* etc.), des Tables d'intérêts, et la réimpression de la *Dixme* de Simon Stevin. Ce volume devait être suivi d'un autre, qui aurait compris les autres Traités de Neper, avec les Tables logarithmiques de Briggs. En attendant la publication de ce volume, qui resta à l'état de projet, de Decker fit imprimer, sous le même titre *Nieuwe Telkonst,* un volume in-8° contenant les Tables des logarithmes de 10 000 premiers nombres à 10 décimales, d'après Briggs, avec les Tables des logarithmes trigonométriques à 7 décimales, d'après Edm. Gunter.

A la place de la seconde partie du *Nieuwe Telkonst,* Vlack donna au public son grand Ouvrage (¹), où l'on trouve, pour la première fois, les logarithmes de 100 000 premiers nombres, calculés avec 10 décimales, et qui peut être considéré comme la source où sont venus puiser tous les auteurs des recueils logarithmiques qui ont paru dans la suite.

On sait aussi que c'est à Vlack que nous devons les plus anciennes Tables de logarithmes trigonométriques qui aient été calculées avec 10 décimales, de 10 en 10 secondes. Cet Ouvrage, publié en 1633 sous le titre de *Trigonometria artificialis,* a eu pour fâcheux résultat d'éterniser l'usage, si incommode et si illogique, de la division sexagésimale du cercle.

Dans la même année 1633, l'infatigable Vlack dirigeait l'impression d'un Ouvrage posthume de Briggs : la *Trigonometria Britannica,* dernière production du prodigieux calculateur anglais, et qui forme encore de nos jours le recueil de Tables trigonométriques le plus remarquable par son étendue et son exactitude. Ce Livre est généralement connu comme l'œuvre de H. Gellibrand, et M. Bierens de Haan partage sur ce point l'opinion accréditée. La vérité est, cependant, que Gellibrand est l'auteur de la *seconde partie de l'Introduction* qui précède les Tables, composition assez médiocre d'ailleurs. Quant aux Tables elles-mêmes, voici ce que Gellibrand lui-même en dit dans sa préface : « *Cum ante annos plus*

(¹) *Arithmetica logarithmica.* Gouda, in-fol.; 1628.

minus triginta, canonem hunc sinuum, ad quindecim loca, per æquationes algebraicas et differentias, ipsis sinubus proportionales, a primis fundamentis accurate extructum ABSOLVISSET (Briggius), etc. » Il résulte clairement de ces paroles que les Tables sont l'œuvre de Briggs, et que le nom de Gellibrand a été substitué à celui de l'inventeur, uniquement à cause d'une mauvaise disposition typographique du titre du Livre, qui met en vue le nom de l'éditeur plus que celui de l'auteur.

Briggs, d'après les suggestions de Viète, avait commencé à rompre avec la division sexagésimale du cercle. Seulement, comme il avait continué à prendre pour unité le degré et non le quadrant, son système eut le sort habituel des demi-mesures, et n'obtint que très-peu d'adhérents. La même chose est arrivée à la fin du siècle dernier, lorsque, au lieu de présenter la division décimale du quadrant sous son véritable jour comme la division *naturelle* qui s'impose à ce seul titre, on lui a donné l'aspect d'une division artificielle comme l'ancienne, ce qui a retardé d'un siècle son adoption.

Vlack a publié aussi des Tables abrégées, dont nous signalerons à M. Bierens de Haan une édition française, portant la date de la Haye, MDCLI.

L'article est terminé par de précieux renseignements bibliographiques sur les Tables logarithmiques du XVII[e] et du XVIII[e] siècle.

SÉDILLOT (L.-M.). — *Sur l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon.* (10 p.; fr.)

MANSION (P.). — *Les Mathématiques en Belgique en* 1872. (36 p.; fr.)

Cet article fait suite au *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique* (1772–1872) publié par notre collaborateur M. de Tilly.

Il est divisé en Chapitres, dont le premier résume les travaux d'Analyse, dus à MM. Catalan, Gilbert et Mansion. Le Chapitre II est consacré à la Géométrie, et rend compte des publications de MM. Saltel, Folie et Catalan. Dans le Chapitre III, intitulé *Mécanique,* M. Mansion analyse les Mémoires de M. Belpaire sur la Thermodynamique, de M. de Tilly sur la Mécanique appliquée, et de M. Folie sur le calcul de la densité de la Terre.

Günther (S.). — *Le développement historique de la théorie des polygones étoilés dans l'antiquité et au moyen âge.* (Traduit de l'allemand par A. Sparagna.) (28 p.)

Les Grecs n'ont eu aucune notion des polyèdres étoilés. Les polygones réguliers étoilés semblent avoir été considérés pour la première fois par les Pythagoriciens, qui avaient adopté le pentagone étoilé (πεντάγραμμον, πένταλφα) comme signe de ralliement, si nous nous en rapportons toutefois au dire de Lucien et du scoliaste d'Aristophane, et à l'anecdote racontée par Jamblique; mais alors on est forcé d'admettre que Pythagore connaissait la division d'une droite en moyenne et extrême (*sectio aurea*). Il a fallu pour cela qu'il en fît lui-même la découverte, cette construction étant fort au-dessus des connaissances géométriques des Égyptiens, ses maîtres. M. Günther considère toutefois cette découverte de Pythagore comme douteuse, quoiqu'elle soit étroitement liée à la construction du dodécaèdre régulier, que l'École pythagoricienne introduit dans son système d'harmonies célestes; il suppose que l'on se sera contenté d'abord d'une construction mécanique approchée. Les diagonales du pentagone régulier convexe, formant le pentagramme, ont suffi pour donner l'idée de cette figure; mais il n'était alors nullement question d'une théorie générale des polygones étoilés. On retrouve encore le pentagramme dans un passage de l'*Ars geometrica*, attribué à Boèce. Au moyen âge, on considérait cette figure comme douée de propriétés magiques.

Le premier qui ait donné une vraie théorie des polygones étoilés est l'anglais Adelhard, de Bath [1], dont les ouvrages sont restés manuscrits. M. Günther en transcrit un passage important, d'après un codex de la Bibliothèque de Nuremberg.

Boncompagni (B.). — *Sur un passage de la Géométrie de Boèce relatif au pentagone étoilé.* (16 p.)

Mansion (P.). — « *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, par M. Hermite, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences.* Première partie. [2]. » (48 p.; fr.)

---

(1) Chasles, *Aperçu historique*, p. 509.
(2) Voir *Bulletin*, t. V, p. 49.

Menabrea (L.-F.). — *Dernière Lettre à M. le prince Boncompagni sur les péripéties de la série de Lagrange, en réponse au professeur A. Genocchi.* (23 p.)

Friedlein (G.). — *Sur le géomètre Hypsiclès.* (37 p.; lat.)

On attribue généralement à Hypsiclès deux Livres, placés, dans la plupart des éditions d'Euclide, à la suite des treize Livres des *Éléments*, et désignés par les numéros XIV et XV. M. Friedlein n'admet pas que ces deux Livres puissent appartenir au même auteur, si même on peut donner le nom de Livre au dernier des deux, lequel est une réunion de trois groupes de propositions, qui ne se rattachent entre eux par aucun lien. Le premier groupe traite de l'inscription des polyèdres réguliers les uns dans les autres; le second, du nombre des côtés et des angles de ces polyèdres; le troisième contient les recherches d'Isidore, dont l'auteur se dit le disciple, sur les inclinaisons mutuelles des faces des mêmes solides. Le premier groupe paraît écrit d'une autre main que les deux autres, et par un auteur moins habile. En cela, les vues de M. Friedlein concordent avec celles que Peyrard indique au commencement de la Préface du tome III de son édition d'Euclide. Ce passage de Peyrard n'ayant pas attiré toute l'attention qu'il mérite, M. Friedlein reprend l'étude des deux Livres. Il reproduit, avec la traduction latine du premier, le texte grec, corrigé d'après diverses éditions et d'après un manuscrit de la Bibliothèque de Munich, inconnu à Peyrard. Pour le second, il donne seulement la traduction latine. Il conclut de son examen que le premier de ces deux opuscules peut à bon droit être attribué à Hypsiclès, qui vivait dans le IIe siècle avant J.-C.; quant au second, il lui semble devoir être rejeté jusqu'au IVe ou au Ve siècle après J.-C., et cette composition, œuvre de deux auteurs différents, n'a aucune valeur réelle.

Genocchi (A.). — *Courte réplique à M. le comte L.-F. Menabrea.* (3 p.)

D. C. — *Sur un Mémoire du professeur D. Chelini D. S. P., intitulé : « Interprétation géométrique de formules essentielles aux sciences de l'étendue, du mouvement et des forces.* (6 p.) »

Cette Note contient la reproduction en fac-simile d'une lettre de Poinsot au P. Chelini, relativement aux premiers travaux de celui-ci. Nous reviendrons sur cet important Mémoire.

BONCOMPAGNI (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé : « Sur dix Lettres en langues italienne de* Joseph-Louis LAGRANGE ».

BONCOMPAGNI (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé : « Sur un passage de la Géométrie de Boèce relatif au pentagone étoilé* ». (1 p.)

— Le *Bullettino* donne tous les deux mois un Catalogue très-détaillé des principaux Ouvrages publiés sur les Sciences mathématiques et physiques, et des articles contenus dans les Recueils scientifiques les plus importants. Ce précieux complément de la publication de M. le prince Boncompagni occupe 189 pages du présent volume. J. H.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. Tweede Reeks (1).

T. IV; 1869.

BAEHR (G.-F.-W.). — *Sur le mouvement dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse.* (11 p.)

Les expériences de tir horizontal, faites à Woolwich par le professeur Bastforth (2), ont donné pour résultat, entre le temps t et l'espace s, une relation de la forme

$$t = as + bs^2,$$

et par suite, pour l'accélération, une valeur

$$f = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{2b}{(a+2bs)^3} = -2bv^3,$$

proportionnelle au cube de la vitesse v. Cette loi s'accorde d'une manière satisfaisante, dans le cas des grandes vitesses, avec les expériences faites à l'École d'artillerie de Metz. M. Baehr établit,

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 186.

(2) *Philosophical Transactions*, p. 417; 1868.

d'après cette hypothèse, une formule qui permet de calculer directement le coefficient de résistance $2b$, étant données la direction et la grandeur de la vitesse initiale, avec la projection horizontale de l'arc. L'application de cette formule à divers cas a donné des résultats concordants.

Bosscha (J.) jr. — *Sur la dilatation vraie du mercure, d'après les expériences de Regnault.* (31 p.)

Bosscha (J.) jr. — *Sur la dilatation apparente du mercure et la marche du thermomètre à mercure, comparée avec celle du thermomètre à air, d'après les expériences de Regnault.* (22 p.)

Oudemans (J.-A.-C.). — *Rapport sur l'observation de l'éclipse de Soleil du* 18 *août* 1868, *dans quatre stations de l'Archipel des Indes.* (30 p.; 3 pl.)

Van Diesen (G.).— *Calcul de la quantité d'eau qui peut couler dans les hautes eaux, à travers les sections actuelles du Bas-Rhin et du Lek.* (35 p.)

Baehr (G.-F.-W.). — *Remarque sur une relation entre les racines et les coefficients de l'équation générale du second degré.* (2 p.)

V_n étant la différence entre les n^{iemes} puissances des racines de l'équation $x^2+px+q=0$, on a la relation

$$V_n = -pV_{n-1} - qV_{n-2},$$

d'où l'on tire l'expression générale de V_n.

Stieltjes (T.-J.).—*Sur des expériences d'Hydraulique.* (21 p.)

Oudemans (J.-A.-C.). — *Hypothèse sur la couronne lumineuse dans les éclipses totales de Soleil.* (4 p.)

Bergsma (P.-A.). — *Sur la variation diurne de l'inclinaison magnétique à Batavia.* (8 p.)

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Quelques remarques concernant la machine électrique de Holtz.* (6 p.)

T. V; 1870-1871.

Bergsma (P.-A.). — *Sur la marée lunaire atmosphérique à Batavia.* (10 p.)

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur les mesures naturelles.* (36 p.)

Bierens de Haan (D.). — *Contributions à la théorie des intégrales définies.* Nos X et XI. (27 p.)

Ces deux articles traitent de la différentiation et de l'intégration d'une intégrale définie double, par rapport à une constante qui entre sous le signe d'intégration.

Van Geer (P.). — *Sur le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.* (32 p.)

L'auteur applique les fonctions elliptiques au développement des formules, d'après la méthode de Jacobi.

Stamkart (F.-J.). — *Exposé d'un procédé pour la détermination du poids spécifique d'un fluide dans un espace fermé ou dans un vase de verre.* (6 p.)

Grinwis (C.-H.-C.). — *Contribution à la théorie du potentiel électrodynamique.* (22 p.)

Comparaison des résultats déduits des théories d'Ampère et de Weber, avec ceux auxquels conduit la nouvelle théorie de B. Neumann.

Baehr (G.-F.-W.). — *Sur le mouvement de l'œil.* (38 p., 1 pl.; fr.)

Bosscha (J.) jr. — *Sur la détermination des températures dans les recherches de Regnault sur la tension de la vapeur d'eau.* (12 p.)

T. VI; 1872.

Donders (F.-C.). — *La projection des phénomènes visuels suivant les lignes de distinction.* (53 p.)

Kaiser (F.). — *Rapport sur quelques mesures prises pour l'observation du passage de Vénus sur le disque du Soleil, le 8 décembre 1874.* (19 p.)

Bierens de Haan (D.). — *La méthode d'Euler pour l'intégra-*

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 279.

tion de quelques équations différentielles linéaires, démontrée à l'aide de l'équation intégrante [1]. (18 p.)

GRINWIS (C.-H.-C.). — *Sur l'énergie d'une charge électrique.* (7 p.)

VAN DER WILLIGEN (V.-S.-M.). — *Résultats du calcul relatif à une combinaison de mica, de E. Reusch, pour la lumière polarisée et les rayons parallèles.* (25 p.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Sur les quadratures par approximation.* (14 p.)

L'auteur déduit de la formule de Taylor la formule connue qui donne la valeur d'une intégrale définie au moyen d'une somme et d'une série complémentaire, avec l'expression du reste de cette série.

HARTING (P.). — *Le physomètre, nouvel instrument pour la détermination des volumes variables de l'air et d'autres corps.* (37 p.; 1 pl.)

BAEHR (G.-F.-W.). — *Sur les racines des équations*

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega = 0, \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega = 0.$$

(9 p.; fr.)

OUDEMANS (A.-C.) jr. — *Sur l'influence de milieux liquides optiquement inactifs sur le pouvoir rotatoire spécifique de substances optiquement actives.* (31 p.)

T. VII; 1872.

BAEHR (G.-F.-W.). — *Sur l'équation de continuité du mouvement des fluides.* (3 p.; fr.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Contributions à la théorie des intégrales définies.* N^os XII et XIII. (20 p.)

1° Détermination de quelques intégrales contenant les facteurs e^{qx^p}, $\cos(qx^p)$; 2° sur l'intégrale $\int_a^b \log\Gamma(x)\,dx$.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 283.

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur les phénomènes de polarisation chromatique pour quelques cristaux dans la lumière convergente.* (60 p.)

Grinwis (C.-H.-C.). — *Sur la théorie des résonnateurs.* (16 p.)

M. Helmholtz a publié en 1859 (1) un travail théorique sur les tuyaux sonores ouverts, dont l'ouverture est petite par rapport à la surface de la cavité. Ce travail a été suivi, en 1870, d'un Mémoire de M. Strutt (2), dont le but principal est d'étudier l'influence des diverses formes de l'ouverture sur la hauteur du son, afin de pouvoir comparer sous ce rapport les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience.

M. Strutt esquisse brièvement une méthode nouvelle pour la détermination de la hauteur du son, qui, dans un cas particulier, le conduit à retrouver les résultats de Helmholtz. Cette méthode repose sur une transformation périodique de la force vive des mouvements sonores en énergie potentielle, et semble devoir rendre d'utiles services dans la théorie du son.

Toutefois M. Grinwis s'est aperçu que le développement de cette méthode conduit à des inexactitudes, et que les raisonnements de l'inventeur laissent à désirer sous le rapport de la simplicité et de la clarté. Il a donc repris cette théorie, en la rattachant à celle de Helmholtz, et y introduisant la rigueur nécessaire. Son objet est de déterminer la hauteur du son d'une cavité sonore, dans le cas d'une ouverture circulaire suffisamment petite. De plus, il traite la question de l'intensité du son, tant absolue que relative, sous la double action de l'intensité de l'ébranlement initial et de l'influence de la forme de la cavité pour renforcer le son.

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur l'inadmissibilité de l'hypothèse que la réfraction de la lumière est modifiée par le mouvement de la source lumineuse et du prisme.* (79 p.)

Stieltjes (T.-J.). — *Sur la manière de calculer la charge d'eau dans les polders.* (12 p.)

(1) *Theorie der Luftschwingungen in Rohren mit offenen Enden* (Borchardt's *Journal*, Bd. 57, S. 1-72).

(2) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 228.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (¹).

BORCHARDT (C.-W.). — *Recherches sur l'élasticité des corps solides isotropes soumis à l'action de la chaleur.* (49 p.)

Déterminer les déformations en un point quelconque d'un corps solide isotrope, dont l'équilibre de température est troublé par un échauffement inégal de ses éléments, tel est le problème traité dans le présent Mémoire.

Les équations différentielles de ces déformations ont été données par M. Fr. Neumann et par Duhamel; mais la détermination exacte des déformations n'a été faite jusqu'à présent que pour les cas très-particuliers des corps de forme sphérique ou circulaire, l'accroissement de la température étant une fonction du rayon seulement. En outre, la solution du problème n'a été obtenue sous forme finie que pour le cas des corps de dimensions infinies (²); dans le cas des formes sphériques ou circulaires limitées, elle conduit à des séries doublement (³) ou simplement (⁴) infinies.

M. Borchardt démontre que, pour les cas des formes sphériques ou circulaires, l'intégration des équations différentielles peut être effectuée sous forme finie.

N'ayant égard qu'aux seules forces élastiques et considérant le potentiel extérieur (qui satisfait à l'équation différentielle de Laplace) et le potentiel intérieur (qui satisfait à l'équation différentielle de Poisson), l'intégration se fait uniquement à l'aide de ces potentiels qui forment les fonctions arbitraires de la solution. La considération de la chaleur conduit à un troisième potentiel intérieur, qui peut être déterminé par la considération des conditions aux limites, en s'appuyant sur le principe connu, que dans l'intérieur d'un espace continu une fonction potentielle uniforme et finie, qui s'évanouit pour les limites de cet espace, est identiquement nulle.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 40.

(²) W. THOMSON, *Cambridge and Dublin Math. Journal*, p. 87, 1878. — THOMSON and TAIT, *Natural Philosophy*, t. II, p. 570.

(³) LAMÉ, *Journal de Liouville*, 1854, et *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

(⁴) W. THOMSON, *Philosophical Transactions*, vol. CLIII, 1863.

Ce troisième potentiel est ensuite éliminé par des transformations particulières.

Les formules qui donnent les expressions des déformations R, φ, ψ d'un élément, estimées dans le sens de coordonnées polaires ρ, ϑ, η de cet élément, sont :

1° Pour le cas d'un disque circulaire d'épaisseur infiniment petite et de rayon égal à l'unité,

$$\begin{aligned}&2(1+2\theta)e^{\rho}\left(R+\varphi\sqrt{-1}\right)\\&=\frac{\partial P}{\partial\rho}+\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\sqrt{-1}-(1-e^{2\rho})\left[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial\rho^2}+\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\vartheta}+\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{d\rho\, d\vartheta}\right)\sqrt{-1}\right]\\&\quad-\frac{3+5\theta}{1+3\theta}e^{2\rho}\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\vartheta}\sqrt{-1}\right)-\mathfrak{g}c-\frac{1+\theta}{1+3\theta}\mathfrak{g}ce^{2\rho}.\end{aligned}$$

2° Pour le cas d'une sphère de rayon 1,

$$e^{\rho}R=e^{2\rho}X+\frac{\partial N}{\partial r},\quad e^{\rho}\varphi=\frac{\partial N}{\partial\vartheta},\quad e^{\rho}\sin\vartheta.\psi=\frac{\partial N}{\partial\eta},$$

P, $\mathfrak{P}$, X, N, $\mathfrak{g}$, c étant des fonctions déterminées des coordonnées de la température et de la constante d'élasticité.

Pour vérifier l'exactitude de ces formules, M. Borchardt les applique au cas où la température n'est qu'une fonction du rayon seulement et retrouve les résultats obtenus par Neumann [1] et par Duhamel [2].

Helmholtz (H.). — *Parallèle entre les lois des forces électrodynamiques d'Ampère et de Neumann.* (17 p.)

Kronecker (L.). — *Sur les séries de Sturm et leurs relations mutuelles.* (38 p.)

Auwers. — *Sur une prétendue variation du diamètre solaire.* (59 p.)

L'idée de la variation du diamètre solaire, émise par Lindenau en 1808, a été récemment reprise par le P. Secchi, qui, d'après les observations faites à l'Observatoire de Rome pendant une partie

(1) *Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre* 1841.

(2) *Mémoire présenté à l'Académie de Paris*, 1838.

des années 1871 et 1872, a conclu que cette variation est réelle et dépendante de l'intensité des protubérances et des taches (¹). Le maximum du diamètre solaire, $32' 3'',74$, a été observé entre zéro et $+$ 6 degrés de latitude héliographique et le minimum $32' 2'',18$ entre $\pm$ 21 degrés et $\pm$ 23 degrés de même latitude.

Le maximum du diamètre correspondrait au minimum d'intensité des protubérances.

Après une discussion approfondie des résultats d'observations du diamètre solaire faites pendant le même temps que les observations de Rome (de juillet 1871 à juillet 1872) aux Observatoires de Greenwich, de Neuchâtel, d'Oxford, de Washington, de Paris, de Königsberg et de Bruxelles, M. Auwers conclut que les déductions faites par le P. Secchi sont peu rigoureuses, ou au moins prématurées.

Auwers. — *Supplément aux recherches sur la variation du mouvement propre de Procyon.* (48 p.)

A l'occasion de la découverte faite par M. Struve, le 19 mars 1873, d'un point lumineux situé à proximité de Procyon, et dont la position semble coïncider avec celle d'un compagnon de cet astre, théoriquement supposé par Bessel, M. Auwers reprend le calcul des éléments de l'orbite de Procyon (²).

Helmholtz (H.). — *Un théorème relatif au mouvement géométriquement semblable des fluides avec application au problème de la direction des ballons.* (14 p.)

Borchardt (C.-W.). — *Sur les déformations des corps élastiques isotropes sous l'action des forces mécaniques appliquées à leur surface.* (19 p.)

Par une méthode analogue à celle qu'il a employée dans son précédent Mémoire (³), l'auteur donne les expressions finies des déformations éprouvées par les éléments d'un disque circulaire, soumis à l'action des forces mécaniques appliquées à son bord, et d'une sphère soumise à l'action des forces appliquées à sa surface.

(¹) *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*, novembre 1872.

(²) Une première détermination de ces éléments a été faite par l'auteur en 1861, dans son Ouvrage intitulé : *Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen.*

(³) *Voir* plus haut, p. 130.

Ces déformations (R, φ, ψ), dirigées dans le sens des coordonnées polaires ρ, ϑ, η croissantes, sont données par les formules suivantes :

1° Pour le cas d'un disque circulaire, de rayon égal à l'unité, dont le bord est sollicité par des forces dont les composantes prises dans le sens de déformation sont $2\,\mathrm{KP}(\vartheta)$, $2\,\mathrm{K}\Phi(\vartheta)$, K étant la constante d'élasticité,

$$
\begin{aligned}
&2\pi e^{\rho}(\mathrm{R} + \varphi\sqrt{-1}) \\
&= \frac{1+\theta}{1+3\theta}\int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \mathrm{P}_1 - \int_0^{2\pi} d\vartheta_1(\mathrm{P}_1 - \sqrt{-1}\,\Phi_1)e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\log\left(1 - e^{\rho-\sqrt{-1}(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\right) \\
&\quad - \frac{3+5\theta}{1+3\theta}e^{2\rho}\int_0^{2\pi} d\vartheta_1(\mathrm{P}_1 + \sqrt{-1}\,\Phi_1)\left[e^{-\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\log\left(1 - e^{\rho+(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\right) + 1\right] \\
&\quad + (1 - e^{2\rho})\int_0^{2\pi} d\vartheta_1(\mathrm{P}_1 - \sqrt{-1}\,\Phi_1)\frac{e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}}{1 - e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}}.
\end{aligned}
$$

2° Pour le cas d'une sphère de rayon $= 1$, dont la surface est soumise à l'action de forces dont les composantes prises dans le sens des déformations sont $2\,\mathrm{KP}$, $2\,\mathrm{K}\Phi$, $2\,\mathrm{K}\Psi$,

$$
\begin{aligned}
e^{\rho}\mathrm{R} &= e^{2\rho}\mathrm{X} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \rho}, \\
e^{\rho}\varphi &= -\frac{e^{\rho}}{\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \vartheta}, \\
e^{\rho}\varphi &= e^{\rho}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta},
\end{aligned}
$$

dans lesquelles X, Y, N sont des fonctions déterminées des coordonnées et des forces extérieures.

SOHNCKE (L.). — *Les systèmes plans réguliers de points d'une extension illimitée.* (6 p.)

Extrait lu par M. Borchardt d'un travail de M. Sohncke, relatif au problème d'un arrangement de points, tel que la distribution des points situés autour d'un point du système considéré comme centre soit identique, quel que soit le point considéré. (Problème du groupement des molécules dans les cristaux).

Helmholtz (H.). — *Sur les limites de l'effet utile des microscopes.* (1 p.)

Riess. — *Sur le jeu des machines à électrophore et sur la double influence.* (10 p.) A. P.

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. In-4° (1).

T. XXVI; 1872-1873.

Secchi (le P.). — *Les étoiles filantes du 27 novembre 1872.* (13 p.)

Secchi (le P.). — *Taches solaires.* (7 p.)

Azzarelli (M.). — *Formules générales pour déterminer les côtés des triangles rectangles primitifs.* (11 p.)

On appelle ainsi les triangles rectangles dont les côtés sont donnés par des nombres entiers n'admettant pas de facteur commun.

Mainardi (G.). — *Réflexions sur divers sujets* (suite). (14 p.)

Le savant professeur réclame, avec preuves à l'appui, la priorité de plusieurs propositions, publiées par lui depuis longtemps, et que d'autres auteurs ont, depuis, retrouvées de leur côté, sans avoir eu connaissance de ses travaux. Ses observations portent sur les articles suivants :

Recherches relatives à la théorie des surfaces, par lesquelles il a complété le célèbre travail de Gauss, et dont les résultats ont été reproduits par Bour en 1862.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. M. Darboux a publié, dans le t. VII des *Annales de l'École Normale,* un Mémoire sur ce sujet, que M. Mainardi aurait traité quatorze ans auparavant, en partant de la même remarque fondamentale.

Polygones et polyèdres. En 1832, M. Mainardi a démontré que le carré de l'aire d'un polygone et le carré du volume d'un polyèdre sont des fonctions entières des droites qui joignent les sommets ;

---

(1) Voir *Bulletin,* t. V, p. 15.

que le cosinus de l'angle des plans de deux triangles est une fonction des distances mutuelles des sommets, etc.; propositions qui ont été attribuées à des auteurs de publications plus récentes.

Lieu géométrique relatif à l'addition des intégrales elliptiques de seconde espèce. Propriété analogue à celle que M. Hermite a exposée pour les intégrales de première espèce ([1]).

Théorème de Géométrie. (Volume d'un cylindre tronqué).

Relations entre six points d'une conique, etc.

Sur les points racines des équations algébriques complexes.

Théorème sur le triangle et le tétraèdre, comprenant ceux de Pythagore et de de Gua.

Polygones maxima inscrits et polygones minima circonscrits à l'ellipse, et polyèdres analogues pour l'ellipsoïde. (*Annali di Sc. mat. e fis.*, t. I, 1850, p. 348.)

Sur la théorie générale des courbes. M. Mainardi a donné, en 1827 (*Mem. della Soc. Ital. delle Sc.*), plusieurs résultats, obtenus seize ans plus tard par M. de Saint-Venant. (*Journ. de l'Éc. Pol.*, XXX^e cah.)

Sur les courbes planes. Théorie des développées imparfaites, etc.

Secchi (le P.). — *Sur la distribution des protubérances autour du disque solaire, et sur leur relation avec les taches.* 8^e, 9^e et 10^e Communication. (25-11-34 p.)

Provenzali (le P.). — *Sur quelques variations lentes de l'intensité magnétique.* (9 p.)

Provenzali (le P.). — *Sur la théorie des isolateurs armés.* 2 articles. (10-7 p.)

Azzarelli (M.). — *Résolution de quelques problèmes géométriques proposés par Kramp* (suite). (53 p.) ([2]).

Provenzali (le P.). — *Sur l'intensité de la lumière solaire.* 3^e article. (6 p.)

Azzarelli (M.). — *Solution de quelques problèmes d'Hydrostatique.* (30 p., 1 pl.)

Voici quelques-unes des questions traitées dans ce Mémoire :

Étant donnée la ligne d'intrados d'un pont et la hauteur du ni-

---

([1]) Voir *Bulletin*, t II, p. 21.

([2]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 16.

veau d'une masse fluide au-dessus des impostes, calculer la pression exercée contre la voûte cylindrique du pont. — Application aux cas où la ligne d'intrados est un demi-cercle, une demi-ellipse, une cycloïde; où les impostes ne sont pas sur une même horizontale; où la voûte est conique, etc.

De la stabilité de l'équilibre d'un cylindre homogène, dont l'axe, mobile dans un plan autour d'un point fixe, est en partie immergé dans un fluide homogène pesant; des lois de son mouvement dans l'hypothèse où il oscille autour du point fixe.

MAINARDI (G.). — *Réflexions sur divers sujets* (suite). (14 p.)

Sur les surfaces géométriques; extension aux surfaces d'un théorème sur les courbes découvertes par Maclaurin.

Analogie entre les équations algébriques et les équations différentielles linéaires. M. Mainardi réclame comme sienne l'expression simple des coefficients d'une équation différentielle linéaire au moyen des intégrales particulières, expression qu'il a donnée en 1850 dans les *Annales de Tortolini.*

Une intégrale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Sur l'équation fondamentale de la Balistique.

Relations entre les racines d'une forme binaire cubique et celles de ses premiers covariants.

Arithmétique élémentaire; à propos d'un article de M. Bourget « sur la racine carrée des nombres approchés » [1].

Trigonométrie : démonstration de la formule qui donne $\sin(a+b)$. Formule de Trigonométrie sphérique.

DENZA (le P.). — *Sur la dépendance possible entre les éclipses de Soleil et le magnétisme terrestre.* (29 p., 4 pl.)

BERTELLI (le P.). — *Sur l'aurore boréale du* 4 *février* 1872. (29 p.)

DENZA (le P.). — *Observations de la déclinaison magnétique faites à Aoste, Moncalieri et Florence à l'occasion de l'éclipse de Soleil du* 23 *mai* 1873. (22 p., 2 pl.)

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870. Voir *Bulletin*, t. II, p. 81.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe [1].

T. LX (fin); octobre-décembre 1869.

HAIDINGER (W. von). — *Remarques sur l'arc-en-ciel.* (18 p.)

OPPOLZER (Th. v.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète* (64) « *Angelina* ». (66 p.)

L'auteur calcule les éléments de l'orbite au moyen des observations faites pendant quatre apparitions. Il en conclut les éphémérides des apparitions de 1870 et 1871, et termine son Mémoire par une Table des perturbations spéciales produites par Jupiter et Saturne, du 9 mars 1861 au 20 janvier 1874.

DITSCHEINER (L.). — *Sur la différence de marche et le rapport d'intensité des rayons polarisés renvoyés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence dans la réflexion sur des réseaux de verre.* (19 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur le paradoxe de Dirichlet, concernant les séries infinies.* (14 p.)

Il s'agit du changement qu'éprouve, par suite du changement d'ordre des termes, la somme d'une série dont la convergence n'est pas indépendante des signes des termes. L'auteur donne une expression de la variation de cette somme pour la série

$$\frac{1}{z+1}+\ldots+\frac{1}{z+m}-\frac{1}{z+m+1}-\ldots-\frac{1}{z+m+n}+\frac{1}{z+m+n+1}$$
$$+\ldots+\frac{1}{z+2m+n}-\ldots,$$

lorsqu'on y intervertit l'ordre des termes, de manière que la série présente alternativement mm' termes positifs et nn' termes négatifs.

UNFERDINGER (Fr.).—*Valeurs des dérivées d'ordre quelconque des fonctions* $e^{ax}\cos(\alpha+\beta x)$, $e^{ax}\sin(\alpha+\beta x)$, $x^a\cos[b\log(\alpha+\beta x)]$, $x^a\sin[b\log(\alpha+\beta x)]$, ... (26 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 208.

Dans une Note qui termine ce Mémoire, l'auteur donne une nouvelle démonstration de l'expression de Waring, pour les sommes de puissances des racines d'une équation algébrique.

Unferdinger (Fr.). — *Cubature des segments et des couches dans les surfaces du second ordre.* (37 p.)

L'auteur calcule, pour les diverses espèces de surfaces du second degré, des volumes compris entre des plans non perpendiculaires aux axes principaux.

Lang (V. von). — *Sur la vitesse de la lumière dans le quartz.* (28 p.)

Ditscheiner (L.). — *Sur la dispersion des axes optiques dans les cristaux rhomboédriques.* (10 p.)

Winckler (A.). — *Sur quelques formules et méthodes relatives à la théorie des intégrales définies.* (61 p.)

L'auteur établit d'abord, d'une manière élémentaire, des relations au moyen desquelles on peut trouver facilement les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies. Il démontre ensuite rigoureusement cette proposition connue, utile dans beaucoup de cas, que l'intégrale définie du produit $\varphi(x)\,\chi(x)$ d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ par une fonction $\chi(x)$ variant toujours dans le même sens entre les limites d'intégration peut se ramener à l'intégrale de $\varphi(x)$, prise à partir d'une moyenne, encore inconnue, entre les deux limites de l'intégration. Cette moyenne peut se déterminer exactement dans certaines hypothèses. Enfin, à l'aide du théorème sur l'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double à limites constantes, et en faisant usage du *facteur de discontinuité*, ainsi que d'une formule qui donne le reste des n premiers termes de la série de Maclaurin, sous forme d'une intégrale n-uple, on obtient les valeurs de plusieurs quadratures en partie discontinues.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur la détermination de l'orbite d'une comète.* 2e Mémoire. (27 p.)

Dans un Mémoire sur le même sujet, publié en 1868 (1), l'auteur avait donné une solution du problème de la détermination d'une

(1) *Sitzungsberichte*, Bd. LVII.

orbite parabolique au moyen de trois observations, dans laquelle il s'était attaché surtout à rendre minimum l'influence des erreurs d'observation sur la détermination des éléments. Cette méthode présentait l'avantage de n'être pas sujette au cas d'exception connu, qui rend souvent impraticable l'application de la méthode d'Olbers. Seulement les calculs exigés par la nouvelle méthode étaient beaucoup plus longs que ceux qu'entraîne la méthode d'Olbers, à l'exception, toutefois, des cas défavorables de celle-ci. Depuis, M. von Oppolzer est parvenu à réduire d'une façon notable le travail du calcul de ses formules, de sorte que leur emploi devient avantageux dans les cas à moitié défavorables du procédé d'Olbers. Le Mémoire commence par la recherche des limites entre lesquelles la méthode d'Olbers est applicable.

T. LXI, fasc. 1; janvier 1870.

Waszmuth (A.). — *Sur un nouveau procédé pour déterminer le coefficient de réduction d'une boussole des tangentes.* (7 p.)

Hann (J.). — *La diminution de chaleur pour une altitude croissante, à la surface de la Terre, et sa période annuelle.* (17 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les faisceaux de courbes.* (7 p.)

Neumann (Cl.). — *Observations sur les vibrations des cordes sous l'action de l'archet.* (16 p., 12 pl.)

« Duhamel [1] a, le premier, essayé de fonder une théorie du mouvement des cordes sous l'influence de l'archet, en croyant pouvoir réduire cette influence à une résistance de frottement. Cette théorie ne peut être admise comme exacte, surtout quand on considère les résultats étranges auxquels Duhamel est arrivé, et parmi lesquels on peut citer celui-ci, qu'un frottement prolongé doit, selon lui, amener la corde au repos, ce qui serait une conséquence naturelle de l'hypothèse du frottement.

» Plus récemment, Helmholtz [2] a étudié de nouveau le mouvement des cordes soumises à l'action de l'archet. Il s'est moins préoccupé toutefois de fonder une théorie que de déterminer expé-

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. IX; 1839.

[2] *Lehre von den Tonenempfindungen.* Braunschweig, p. 137; 1863.

rimentalement le mouvement réel de la corde. Les observations faites par ce physicien ne suffisent pas, à elles seules, pour faire connaître le mouvement des cordes. Ce mouvement se déduit d'un très-petit nombre d'observations, à l'aide d'une théorie partant de l'hypothèse idéale d'une corde infiniment mince et parfaitement flexible. Beaucoup de points, d'ailleurs, ont été signalés par Helmholtz comme problématiques.

» Il est permis, dans ces circonstances, de ne pas regarder les recherches, tant expérimentales que théoriques, comme terminées. Le but du présent travail est d'abord de déterminer complétement, par la voie de l'observation, le mouvement des cordes. Les résultats obtenus sont le plus souvent en accord très-suffisant avec les propositions de Helmholtz. Les écarts se rencontrent là où l'on devait les attendre, lorsqu'on abandonne les hypothèses idéales. Un grand nombre des questions regardées comme problématiques par Helmholtz ont pu être décidées avec une certitude complète. »

UNFERDINGER (Fr.). — *Transformation et détermination de l'intégrale triple* $\int\int\int \mathrm{F}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}, \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\, dy\, dz$. (15 p.)

Si l'on pose

$$\rho^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \quad \alpha x+\beta y+\gamma z = \rho p, \quad x^2+y^2+z^2 = p^2+r^2,$$
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\beta(\alpha y-\beta x)+\gamma(\alpha z-\gamma x)}{\rho(\gamma y-\beta z)},$$

l'intégrale proposée prend la forme

$$\int\int\int \mathrm{F}(p^2+r^2, \rho p)\, dp\, r\, dr\, d\theta.$$

Application à diverses cubatures.