Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 145-153

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__145_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ARGAND (R.). — Essai sur une manière de représenter les Quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2ᵉ édition, précédée d'une Préface par M. J. Hoüel, et suivie d'un Appendice contenant des Extraits des *Annales de Gergonne,* relatif à la question des imaginaires. — Paris, Gauthier-Villars, libraire-éditeur; 1874. Prix : 5 francs.

L'Ouvrage que nous rééditons aujourd'hui est du petit nombre de ceux qui marquent une époque dans l'histoire de la science. C'est dans cet Opuscule que l'on trouve le premier germe de la vraie théorie des quantités dites *imaginaires*. Cette théorie, dont on fait généralement honneur au génie de Gauss, n'a été indiquée par ce grand géomètre que vingt-cinq ans après l'impression du travail d'Argand (1), et, dans l'intervalle, elle avait été plusieurs fois réinventée, tant en France qu'en Angleterre. Nous ne pouvons invoquer, à ce sujet, de témoignage plus probant que celui d'un géomètre allemand, dont la science déplore la perte récente.

« Le premier, dit M. Hankel (2), qui ait enseigné la représentation des nombres imaginaires $A + Bi$ au moyen des points d'un plan et qui ait donné les règles de l'addition et de la multiplication géométrique de ces nombres, c'est Argand, qui établit sa théorie dans une brochure imprimée à Paris, en 1806, sous le titre de : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Toutefois cet écrit ne parvint à la connaissance du public qu'à la suite d'une Note insérée par J.-F. Français dans les *Annales de Gergonne,* tome IV, 1813-1814, page 61, et à l'occasion de laquelle Argand fit paraître deux articles dans le même Recueil (3). Dans ces articles, la théorie est traitée d'une manière si complète, que l'on n'a trouvé, depuis, rien de nouveau à y ajouter; et, à moins que l'on ne vienne à découvrir quelque autre travail plus ancien, c'est Argand que l'on doit re-

(1) *Anzeige zur « Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda »,* 1831. (Gauss, *Werke*, t. II, p. 174.)

(2) *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* (Leipzig, 1867, p. 82.)

(3) T. IV, p. 133, et t. V, p. 197.

garder comme le véritable fondateur de la théorie des quantités complexes dans le plan.

»... On sait que Gauss, en 1831 (1), a développé la même idée; mais, quelque grand que soit son mérite comme introducteur de cette idée dans la science, il n'en est pas moins impossible de lui en attribuer la priorité. »

Comme on le voit par ce résumé fidèle de l'historique de cette question, l'Ouvrage d'Argand était resté à peu près complétement ignoré, n'ayant pas été mis dans le commerce (2), et n'ayant été distribué qu'à un petit nombre de personnes. Sept ans plus tard, Français, officier d'artillerie à Metz, envoya au rédacteur des *Annales* (3) un aperçu d'une théorie dont il avait trouvé l'idée première dans une lettre adressée à son frère par Legendre, qui la tenait lui-même d'un autre auteur dont il ne donnait pas le nom. Cet article tomba sous les yeux d'Argand, qui adressa aussitôt à Gergonne une Note (4) par laquelle il se faisait connaître comme l'auteur du travail cité dans la lettre de Legendre, et où il donnait en même temps un résumé assez complet de sa brochure de 1806.

Cette double publication donna lieu dans les *Annales* à une discussion à laquelle prirent part Français, Gergonne et Servois, et qui se termina par un remarquable article, dans lequel Argand expose d'une manière plus satisfaisante divers points de sa théorie, notamment sa démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques, démonstration la plus simple que l'on ait donnée jusqu'ici, et que Cauchy n'a fait que reproduire plus tard sous une forme purement analytique, mais moins saisissante. Ces divers articles formant un complément naturel de la brochure d'Argand, et se trouvant dans un Recueil devenu extrêmement rare, nous les avons réunis dans un *Appendice* à la fin du volume.

Malgré la publicité que l'insertion dans un journal scientifique aussi répandu aurait dû leur procurer, les idées d'Argand passèrent tout à fait inaperçues, et la preuve en est que, vingt-deux ans

(1) *OEuvres*, t. II, p. 174.

(2) Voir *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, etc., p. 77.

(3) *Voir* p. 63.

(4) *Voir* p. 76.

après l'impression de l'*Essai*, quatorze ans après celle des articles des *Annales*, elles furent réinventées à la fois, par Warren, en Angleterre, et par Mourey, en France, sans qu'aucun de ces deux auteurs semble avoir eu connaissance des travaux du premier inventeur. Ils ne parvinrent pas eux-mêmes à fixer l'attention des géomètres, bien que les recherches de Mourey eussent été résumées dans les *Leçons d'Algèbre* de Lefébure de Fourcy, et que Warren eût publié dans les *Philosophical Transactions* deux articles faisant suite à son premier Ouvrage. C'est seulement après que Gauss eut parlé que l'on commença, en Allemagne, à prendre ces idées en considération. Elles devinrent bientôt familières aux géomètres anglais, et furent le point de départ de la théorie des quaternions d'Hamilton, tandis que, en Italie, M. Bellavitis les retrouvait de son côté, et fondait sur leur développement sa méthode des équipollences. En France, on continua à refaire le travail d'Argand, sans y rien ajouter d'essentiel, jusqu'au jour où Cauchy adopta cette théorie, et l'exposa dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (¹), avec des indications historiques complètes, et en rendant pleine justice au mérite d'Argand.

Le livre du modeste savant genevois contient le germe de plusieurs suites de recherches, dont les unes ont éclairé d'un jour inattendu les mystères qui régnaient depuis si longtemps sur la véritable nature des quantités négatives et des quantités imaginaires, et ont introduit une grande lumière dans la théorie des fonctions, en la rendant susceptible d'une représentation sensible aux yeux; les autres, moins importantes jusqu'ici, mais auxquelles l'avenir réserve peut-être un grand rôle, ont eu pour résultat la création de nouvelles méthodes de Géométrie analytique, parmi lesquelles il suffira de citer celles de Möbius, de Bellavitis, de Hamilton, de Grassmann.

Longtemps les analystes, dans l'impossibilité d'écarter la présence continuelle des quantités négatives ou imaginaires dans les résultats du calcul, et de se passer des services essentiels que l'usage de ces symboles pouvait leur rendre, se résignèrent à les employer, sans se rendre un compte exact de leur nature, en les considérant

(¹) T. IV, p. 157.

comme des signes d'opérations qui n'avaient aucun sens par eux-mêmes, mais qui, soumis à certaines règles, conduisaient par une voie courte et sûre, mais obscure et mystérieuse, aux résultats que l'on n'aurait pu atteindre, par le seul emploi des quantités proprement dites, sans se condamner à de longs et pénibles détours, et sans multiplier à l'infini le nombre des cas particuliers à discuter.

On finit par s'apercevoir [1] que l'impossibilité des quantités négatives n'est qu'apparente, en général, et qu'elle tient à ce que l'on a voulu introduire une généralisation de l'idée de quantité, sans modifier en même temps les définitions des opérations analytiques qui s'y rapportent.

On aurait pu, en remontant aux éléments de l'Arithmétique, rencontrer un cas tout à fait analogue, où personne n'a pourtant songé à trouver de difficultés. L'opération de la division ne peut, le plus souvent, s'effectuer exactement, tant que l'on n'a que des nombres entiers à sa disposition. Si l'on introduit le partage de l'unité en fractions égales, la division devient possible dans tous les cas, et le résultat se présente sous la forme d'une expression *complexe,* contenant deux nombres, dont l'un indique une multiplication, l'autre une division. De là naît une nouvelle classe de quantités, les fractions, sur lesquelles on effectue des opérations portant les mêmes noms que les opérations relatives aux nombres entiers et qu'elles comprennent comme cas particuliers. Mais on a toujours eu soin de modifier en conséquence les définitions de la multiplication et de la division, pour les rendre applicables aux nouvelles quantités.

C'est en agissant d'une manière analogue pour l'addition et la soustraction que l'on peut se faire une idée nette des quantités négatives. Tant qu'il n'est question que de la détermination d'une *grandeur,* la soustraction $a - b$ devient impossible et absurde, si b est plus grand que a. Mais si, au lieu d'une série de grandeurs, croissant dans un sens unique et déterminé à partir de zéro, on est en présence d'une série d'objets, se continuant indéfiniment dans deux sens opposés, et si l'on appelle *addition* l'opération qui consiste à marcher d'une certaine quantité dans un sens convenu,

---

[1] Voir *Essai,* etc., p. 4.

soustraction l'opération inverse qui consiste à marcher dans le sens opposé, les opérations ainsi définies seront toujours exécutables, et leurs résultats seront aussi réels que ceux de l'addition arithmétique.

Pour représenter simplement ces résultats, on est conduit à incorporer, dans le symbole qui désigne une quantité, le signe indiquant dans quel sens cette quantité doit être portée. Telle est la vraie signification des quantités négatives.

On peut encore pousser plus loin cette extension de l'idée de la quantité et des définitions des opérations relatives à cette quantité. Mais, pour la clarté de l'exposition, il devient ici presque indispensable d'employer pour la représentation des objets la notation géométrique, la plus complète et la plus lumineuse de toutes, dans les limites où elle est applicable. Supposons que les objets à déterminer soient soumis à une double cause de variation, et dépendent de deux grandeurs pouvant être représentées par les deux coordonnées de nature quelconque qui fixent chaque point d'un plan. L'opération de l'extraction de la racine carrée, par exemple, définie précédemment dans le cas où une seule coordonnée varie, n'était possible que dans le cas où la quantité soumise à cette opération appartenait à la même région que la quantité qui représente l'unité positive. Tant que $\sqrt{a}$ a dû correspondre à la construction d'une moyenne proportionnelle entre a et $+1$, $\sqrt{-b^2}$ n'a pu être que l'indication d'une opération inexécutable, et aucun point du lieu correspondant à la variation d'une seule coordonnée ne peut représenter ce résultat.

Mais il en est autrement si l'on fait varier les deux coordonnées à la fois, en ne s'astreignant plus à rester sur une ligne donnée, et si l'on modifie la définition de l'extraction de la racine carrée. Alors les quantités que l'on considère ne dépendent plus d'*une seule* grandeur, mais de *deux,* et méritent pour cette raison le nom de quantités *complexes*. Une opération exécutée sur une pareille quantité affecte à la fois les deux grandeurs dont celle-ci est formée, absolument comme les opérations exécutées sur une fraction ordinaire affectent les deux termes de la fraction. Grâce à l'introduction simultanée des nouvelles quantités et des nouvelles définitions d'opérations, $\sqrt{-b^2}$ n'indique plus une opération impossible, et le nom d'*imaginaire* ne convient plus à un tel résultat, pas plus qu'il ne convenait aux fractions et aux quantités négatives.

Telle est la conséquence fondamentale qui ressort immédiatement de la conception d'Argand. Les symboles de la forme $a + b\sqrt{-1}$, auxquels on avait réussi à ramener les résultats de toutes les opérations analytiques, n'offrent plus rien d'impossible ni d'incompréhensible; ce sont des systèmes de deux nombres a, b, qui se combinent entre eux de la même manière que les systèmes des deux coordonnées de chaque point d'un plan.

Dès lors, les beaux résultats que Cauchy devait découvrir, par des prodiges de puissance analytique, allaient se traduire par des constructions géométriques parlant aux yeux, et la discussion des formules devenait un problème simple de la Géométrie de situation, dont Riemann a plus tard complété la solution.

La théorie des quantités complexes, qui, par les découvertes de Cauchy, était devenue la base de la théorie des fonctions, venait en même temps d'acquérir un nouveau degré d'évidence, qui la mettait au-dessus de toutes les objections et de tous les doutes, auxquels jusque-là elle avait été sujette.

Tels sont les éminents services que la découverte d'Argand a rendus à l'Analyse et à la Philosophie mathématique.

Mais la Géométrie aussi a profité, comme l'Analyse, bien qu'à un moindre degré, de l'introduction des conceptions fondées sur la découverte d'un nouveau lien entre ces deux branches de la science. On trouve dans l'Ouvrage d'Argand les premiers essais d'une méthode très-générale de Géométrie analytique pour les figures planes, que M. Bellavitis a développée plus tard avec un si grand succès, et qui permet de traiter par des procédés uniformes les questions de Géométrie élémentaire et les parties les plus élevées de la théorie des courbes. Cette méthode a l'avantage d'introduire dans les calculs les points eux-mêmes, au lieu de leurs coordonnées, et de permettre ainsi de choisir, au dernier moment, le système de coordonnées qui se présente comme le plus avantageux.

Argand a été moins heureux dans les tentatives qu'il a faites pour étendre sa méthode de représentation des points à l'espace à trois dimensions. Cette question offre, en effet, des difficultés bien plus grandes que celles qu'il venait de résoudre, et c'est seulement trente ans plus tard que Hamilton est parvenu à les surmonter.

Nous aurions vivement désiré de pouvoir donner à nos lecteurs quelques renseignements sur la personne de l'auteur de cet important Opuscule. Nous nous sommes adressé, pour en obtenir, au savant le plus versé dans l'histoire scientifique de la Suisse, à M. R. Wolf, à qui l'on doit un *Recueil de Biographies* aussi remarquable par la profonde érudition que par l'attrait du récit. M. Wolf a eu l'obligeance de faire faire aussitôt des recherches à Genève, ville natale d'Argand. Malheureusement les informations qu'il a pu se procurer, par l'intermédiaire de M. le professeur Alfred Gautier, se réduisent à quelques lignes, que nous transcrivons ici :

« J'ai bien trouvé l'inscription de la naissance, le 22 juillet 1768, de Jean-Robert Argand, fils de Jacques Argand et de Ève Canac. C'est probablement l'auteur du Mémoire de Mathématiques en question. D'après ce qui m'a été dit par une personne qui connaissait sa famille, ce monsieur a été longtemps teneur de livres à Paris, et je présume que c'est là qu'il est mort. Il n'était point proche parent d'Aimé Argand (1), et peut-être n'était-il pas de la même famille. Il a eu un fils, qui a aussi habité Paris. »

Depuis, M. Wolf a appris qu'Argand avait eu aussi une fille, nommée Jeanne-Françoise-Dorothée-Marie-Élisabeth, mariée à Félix Bousquet, avec qui elle était allée s'établir à Stuttgart, où Bousquet avait obtenu un petit emploi. Si nous ajoutons à cela qu'Argand demeurait, vers 1813, à Paris, rue de Gentilly, n° 12, comme l'indique une note de sa main, inscrite sur le titre de l'exemplaire adressé par lui à Gergonne, nous aurons épuisé tout ce qu'il nous a été donné de recueillir sur la vie de cet inventeur, dont la modeste existence restera ignorée, mais dont les services scientifiques ont été, par Hamilton et par Cauchy, proclamés dignes de la reconnaissance de la postérité.

J. Hoüel.

---

(1) Ami et collaborateur des Montgolfier, inventeur de la lampe qui porte son nom (1755-1803).

WALRAS (Léon), professeur d'économie politique à l'Académie de Lausanne. — ÉLÉMENTS D'ÉCONOMIE POLITIQUE PURE, OU THÉORIE DE LA RICHESSE SOCIALE. — Lausanne, imprimerie L. Corbaz et Cie, éditeurs. Paris, Guillaumin et Cie, éditeurs. — 1874; 1 vol. in-8°, 208 p., 2 pl.

Ce Traité est divisé en trois Parties :

PREMIÈRE PARTIE. — *Éléments d'économie politique pure*, ou *Théorie de la richesse sociale*.

§ I. — Objet et divisions de l'économie politique et sociale.

§ II. — Théorie mathématique de l'échange.

§ III. — Du numéraire et de la monnaie.

§ IV. — Théorie naturelle de la production et de la consommation de la richesse.

§ V. — Conditions et conséquences du progrès économique.

§ VI. — Effets naturels et nécessaires des divers modes d'organisation économique de la société.

DEUXIÈME PARTIE. — *Éléments d'économie politique appliquée*, ou *Théorie de la production agricole, industrielle et commerciale de la richesse*.

TROISIÈME PARTIE. — *Éléments d'économie sociale*, ou *Théorie de la répartition de la richesse par la propriété et l'impôt*.

Le premier fascicule de cet Ouvrage a seul paru ; il comprend les quatre premiers paragraphes de la première Partie.

Dans le préambule, l'auteur fait une critique méthodique des diverses définitions données de l'Économie politique, et son analyse le conduit à circonscrire nettement l'objet de cette science et à en indiquer les subdivisions principales.

A l'exemple de M. Cournot (*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*), M. Walras se sert de formules algébriques pour faire la théorie de l'échange et du numéraire. Il est intéressant de suivre dans l'Ouvrage les déductions de l'auteur, et de voir avec quelle précision et quelle clarté il résout les problèmes difficiles qui se présentent dans un marché soumis à la libre concurrence. Nous pensons que plus d'un lecteur s'effarouchera de l'appareil algébrique employé dans cette question ; mais il nous semble difficile qu'on puisse s'en passer.

Un Ouvrage anglais sur le même sujet, suivant une méthode analogue, a paru en Angleterre, en 1871, sous le titre suivant : *The Theory of political Economy*, par M. W. Stanley Jevons. M. Walras a composé le sien sans connaître celui de l'économiste anglais, et il arrive à des conclusions *identiques* dans la théorie de l'échange. On peut donc dire avec lui que les deux Ouvrages se confirment et se font valoir l'un l'autre. J. Bourget.