BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 197-238

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__197_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXIX, 2e semestre 1874.

N° 1. Séance du 6 juillet 1874.

JANSSEN (J.). — *Présentation d'un spécimen de photographies d'un passage artificiel de Vénus, obtenu avec le* revolver photographique.

LAUSSEDAT. — *Sur l'appareil photographique adopté par la Commission du passage de Vénus. Réclamation de priorité.*

SPOTTISWOODE (W.). — *Sur les surfaces osculatrices.*

L'auteur se propose de chercher les conditions pour qu'il soit possible de faire passer par plusieurs points de l'espace une surface quadrique qui soit ou tangente, ou osculatrice en ces points à une surface donnée d'ordre quelconque.

CATALAN (E.). — *Note sur les surfaces homofocales.*

Voici le problème que M. Catalan s'est proposé de résoudre :

1° reconnaître si les surfaces S, représentées par $F(x, y, z) = c$, appartiennent à un système orthogonal triple; 2° trouver, si elles existent, les surfaces Σ_1, Σ_2 qui, avec les surfaces S, constituent ce système.

Aoust. — *Réponse aux observations de M. Combescure.*

Tacchini. — *Sur la formation des taches solaires.*

N° 2. **Séance du 13 juillet 1874.**

Faye. — *Observations au sujet de la dernière Note de M. Tacchini et du récent Mémoire de M. Langley.*

Léauté. — *Sur quelques applications aux courbes du second ordre du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques.*

Il s'agit du théorème suivant : « La somme des intégrales de première espèce $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, relative aux points d'intersection de la courbe $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ avec une courbe algébrique $f(x, y) = 0$, est constante tant que cette courbe conserve le même degré. » L'auteur transforme cet énoncé en considérant la courbe du quatrième ordre comme la perspective de l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Lucas (F.). — *Note relative au viriel de M. Clausius.*

Spottiswoode (W.). — *Note relative à la théorie des surfaces osculatrices.*

M. Spottiswoode déduit plusieurs conséquences géométriques des considérations qui ont fait le sujet de sa Communication précédente.

N° 3. **Séance du 20 juillet 1874.**

Bertrand (J.). — *Note sur l'action de deux éléments de courant.*

Deux éléments de courant sont dits *de même sens* quand ils s'éloignent tous deux du pied de la perpendiculaire commune ou quand ils s'en approchent l'un et l'autre ; M. Bertrand pense qu'il n'est plus exact de dire, en adoptant ce langage, que deux éléments de même sens s'attirent, et que cette assertion est en désaccord avec la loi même d'Ampère.

N° 4. Séance du 27 juillet 1874.

Stephan. — *Découverte et observations d'une comète par M. Borrelly, à l'Observatoire de Marseille.*

N° 5. Séance du 3 août 1874.

Faye. — *Double série de dessins représentant les trombes terrestres et les taches solaires, exécutés par M. Faye.*

Secchi (le P.). — *Observations faites pendant les derniers jours de l'apparition de la comète Coggia.*

Kretz. — *Indication d'une méthode pour établir les propriétés de l'éther.*

Barthélemy. — *Note sur la stratification de la queue de la comète Coggia.*

N° 6. Séance du 10 août 1874.

Bertrand (J.). — *Sur un nouveau Mémoire de M. Helmholtz.*

Dans une Note, présentée le 10 novembre 1873, et intitulée : *Examen de la loi proposée par M. Helmholtz pour représenter l'action de deux éléments de courant,* M. Bertrand signalait une erreur commise par M. Helmholtz dans l'application de la loi qu'il propose, et montrait que les résultats obtenus par l'auteur ne s'accordent nullement avec la règle qu'il a cru devoir poser. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt,* M. Helmholtz répond aux critiques qui lui ont été faites; M. Bertrand montre, dans la Note actuelle, que ses dernières objections ne sont nullement affaiblies par les réponses de M. Helmholtz.

Baillot. — *Observations de la comète Coggia* (*comète III,* 1874), *faites à l'équatorial Secrétan-Eichens.*

Wolf (C.). — *Observations de la comète de Borrelly* (*comète IV,* 1874), *faites à l'équatorial Secrétan-Eichens.*

N° 7. Séance du 17 août 1874.

Resal (H.). — *Théorie de la transmission du mouvement par câbles.*

Après avoir montré tout l'intérêt qui s'attache à la transmission par câbles, et constaté qu'on ne possédait sur ce sujet que quelques règles pratiques dues à M. Hirn, et quelques formules de M. Reulaux, qu'il paraît assez difficile de justifier, M. Resal démontre que, lorsque le mouvement permanent est établi, la forme de chacun des brins d'un câble (abstraction faite des faibles oscillations dues à l'élasticité et à des causes d'un ordre secondaire) est une chaînette dont le paramètre est indépendant de sa vitesse. L'expression de la tension renferme un terme proportionnel au carré de la vitesse, qui n'est pas toujours négligeable. La théorie de la transmission par câbles présente de grandes difficultés; mais, en employant un choix convenable de variables, M. Resal parvient aisément à la démonstration des propriétés qui ont été énoncées plus haut.

Heis. — *Sur la comète de Coggia.*

Fouret. — *Sur certains groupes de surfaces algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques.*

La Note actuelle indique l'extension à la Géométrie de l'espace des considérations qu'il avait exposées précédemment sur les systèmes généraux de courbes.

N° 8. Séance du 24 août 1874.

Sarrau. — *Recherches sur les effets de la poudre dans les armes à feu.*

Ce Mémoire a pour objet la détermination théorique du mouvement d'un projectile dans l'intérieur d'une arme à feu; l'auteur prend pour bases de son travail les lois, aujourd'hui bien connues, qui régissent la transformation de la chaleur en travail dans les machines thermiques; il fait remarquer que cette importante modification des bases de la théorie a été introduite par M. Resal dans ses *Recherches sur le mouvement des projectiles.*

Laguerre. — *Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir, par approximations successives, les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles.*

GRUEY. — *Observations des Perséides, faites à l'Observatoire de Toulouse, les* 5, 7, 8, 9 *août* 1874.

CHAPELAS. — *Observations, faites à Paris, des étoiles filantes du mois d'août* 1874; *marche du phénomène depuis* 1837 *jusqu'à* 1874.

L'auteur représente par une courbe la marche du phénomène.

N° 9. Séance du 31 août 1874.

FAYE. — *A la Société des Spectroscopistes italiens.*

BARTHÉLEMY. — *Nouvelle Note sur la queue de la comète Coggia.*

VIRLET D'AOUST. — *Sur une nouvelle théorie de la formation des comètes et de leurs queues.*

N° 10. Séance du 7 septembre 1874.

LÉAUTÉ. — *Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques.* (Suite.)

L'auteur s'est proposé de trouver les coordonnées d'un point d'une certaine conique au moyen du sinus de l'amplitude de l'intégrale elliptique relative à ce point; il conclut de là plusieurs relations déjà connues.

N° 11. Séance du 14 septembre 1874.

ALLÉGRET. — *Sur une transformation des équations de la Mécanique.*

M. Allégret résume en ces termes l'objet de sa Note : « Jacobi a fait connaître, en 1842, dans son beau Mémoire *Sur l'élimination des nœuds dans le Problème des trois Corps,* une méthode par laquelle le mouvement de n corps qui s'attirent mutuellement peut être ramené à celui de $n-1$ corps. Ces derniers sont alors sollicités par de nouvelles forces dont les composantes, suivant trois axes fixes rectangulaires, sont égales aux dérivées partielles d'une même fonction, et le principe des aires, de même que celui des forces vives, subsiste dans le mouvement fictif considéré. Le but de cette Note est de montrer qu'on peut effectuer une telle transformation au moyen de formules très-simples, qui ne laissent lieu à aucune indétermination, et dont l'application à la Mécanique céleste présente la plus grande facilité. »

N° 12. Séance du 21 septembre 1874.

Fouret. — *Propriétés des implexes de surfaces, définis par deux caractéristiques.*

M. Fouret énonce un certain nombre de propriétés relatives aux systèmes de surfaces qu'il a définis dans une Note précédente et qu'il nomme *implexes de surfaces*.

N° 13. Séance du 28 septembre 1874.

N° 14. Séance du 5 octobre 1874.

Resal (H.). — *Recherches sur les conditions de résistance des chaudières cylindriques.*

En partant des hypothèses admises dans la théorie de la résistance des matériaux, M. Resal se trouve conduit aux résultats suivants : pour des rayons donnés du corps cylindrique et des fonds, l'angle au centre de la section méridienne de chaque fond et le rayon de la surface canal qui se raccorde avec le cylindre ont des valeurs complétement déterminées; la compensation est impossible lorsque le rapport des rayons du fond et du corps cylindrique dépasse 1,40.

Ricq. — *Sur un enregistreur à indications continues, pour la détermination de la loi de variation des pressions produites par les gaz de la poudre.*

Jordan (C.). — *Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions.*

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, M. Jordan définit une courbe par les équations

$$x_1 = f_1(s),\quad x_2 = f_2(s), \ldots,\quad x_n = f_n(s),$$

où s est une variable indépendante. Il est difficile de résumer en un petit nombre de lignes les résultats obtenus par M. Jordan; mais on peut pressentir que les notions intuitives de l'espace à trois dimensions doivent conduire à des relations invariantes remarquables concernant des fonctions d'un nombre quelconque de variables : il peut donc y avoir dans cette idée une source féconde de beaux résultats algébriques.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe ([1]).

T. LXI (fin); février-juin 1870.

WEYR (Em.). — *Sur les faisceaux de courbes.* (7 p.)

Ce Mémoire contient, entre autres, une démonstration de ce théorème : que, dans un faisceau de courbes du n^{ieme} ordre, il y a, au plus, $3(n-1)^2$ points doubles, démonstration différente de celles que l'on présente ordinairement. En outre, l'auteur y démontre d'autres théorèmes, les uns nouveaux, les autres déjà connus. Il prend pour base de ses considérations les courbes du $(n-1)^{\text{ieme}}$ ordre, que l'on obtient comme lieux des points de contact des tangentes, menées des points du plan aux courbes du faisceau (plan).

STERN. — *Contributions à la théorie du bruit* (non musical), *comme symptôme, au point de vue des besoins spéciaux de la diagnostique médicale.* (51 p.)

LITTROW (K. v.). — *Supplément au Mémoire intitulé : « Dénombrement des étoiles boréales du Catalogue de Bonn, d'après leurs grandeurs. »* (4 p.)

LANG (V. v.). — *Sur une nouvelle méthode pour l'étude de la diffusion des gaz.* (11 p.)

PUSCHL (K.). — *Sur une attraction cosmique, que le Soleil exerce par ses rayons.* (20 p.)

Considérations sur l'équivalent mécanique d'un faisceau de rayons solaires. — Intensité des rayons solaires dans l'hypothèse de l'émission; leur action est une pression. — Intensité des rayons

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 138

solaires dans l'hypothèse ondulatoire; leur action est une attraction. — Calcul de l'intensité attractive des rayons solaires; rapport de grandeur entre l'attraction thermique et l'attraction newtonienne. L'auteur trouve que la seconde est environ 16×10^{12} fois plus grande que la première pour la Terre. — Attraction thermique du Soleil sur de très-petites masses cosmiques; diminution du temps de la révolution des comètes. — L'auteur conclut de son travail que, entre les corps cosmiques assez petits, l'attraction mutuelle qu'ils exercent par leurs surfaces rayonnantes peut devenir une force prépondérante par rapport à leur gravitation mutuelle.

Stern. — *Sur la résonnance de l'air dans l'espace libre.* (23 p.)

Loschmidt (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des gaz, en l'absence de cloison poreuse.* (14 p.)

Niemtschik (R.). — *Constructions simples de l'hyperboloïde et du paraboloïde gauches, ainsi que de leurs sections planes et de leurs ombres portées.* (12 p., 1 pl.)

Dans ce long travail, l'auteur expose diverses constructions de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique, ainsi que les constructions de leurs sections planes et de leurs cônes circonscrits. Il nous semble que la Science n'a pas grand profit à tirer de ces développements; à coup sûr l'auteur n'y fait pas preuve de connaissances bien parfaites sur l'état actuel de la Géométrie en général et de la théorie des surfaces du second degré en particulier.

Unferdinger (Fr.). — *Transformation et détermination de l'intégrale triple*

$$\int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\,dy\,dz.$$

(24 p.)

M. Unferdinger a traité, dans ce même volume, un cas analogue [1].

Stefan (M.-J.). — *Sur la production de vibrations longitudinales dans l'air par des vibrations transversales.* (8 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 141.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur le passage de Vénus de l'année* 1874. (85 p.)

Éphémérides des lieux du Soleil et de Vénus. — Développement de l'influence de la parallaxe sur les coordonnées relatives du Soleil et de Vénus. — Mesures à l'héliomètre (avec trois Tables). — Reproduction photographique. — Observation des différences d'ascension droite. — Observation des moments du contact, d'après la méthode de Delisle (avec quatre Tables). — Observation des moments du contact, d'après la méthode de Halley. — Angles de position de l'entrée et de la sortie.

Weyr (Em.). — *Moyen de compléter les involutions d'ordre supérieur*. (7 p.)

Partant de ce théorème, qu'un faisceau de courbes détermine sur une transversale une involution de points, l'auteur construit les points correspondant à un point d'une involution du $n^{\text{ième}}$ ordre, comme intersections de la transversale avec une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, possédant un point $(n-2)$-uple, et pouvant, par conséquent, se construire avec la règle.

Staudigl (R.). — *Construction d'une conique, lorsqu'elle est déterminée par des points et des tangentes imaginaires*. (14 p., 1 pl.)

Ordinairement on exécute ces constructions pour le cas où les éléments imaginaires sont déterminés comme points doubles d'une involution. L'auteur développe les constructions connues, en partant de l'hypothèse plus générale, que les éléments imaginaires sont donnés, non par des séries ou faisceaux involutoires, mais par des séries ou faisceaux projectifs. Cependant les figures projectives conduisent toujours à des figures involutoires, de sorte que, en dehors de cette réduction, ce travail n'offre aucun résultat essentiellement neuf.

Neumayer (G.). — *Projet de préparatifs pour le passage de Vénus en* 1874. (28 p., 1 carte.)

Oppolzer (Th. v.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète* (59) *Elpis*. (76 p.)

Weyr (Em.). — *Communications géométriques*. (2 art., 8-9 p.)

L'auteur développe, par des considérations géométriques, l'équation de corrélation des figures 1-2-formes, pour le cas où les éléments doubles coïncident avec les éléments de ramification respectifs, et il obtient la formule

$$\xi\eta^2 = k.$$

Il applique ensuite cette équation aux courbes du troisième ordre, et, outre un grand nombre de théorèmes connus, il démontre encore le suivant :

« Si un système de courbes du troisième ordre (et de quatrième classe) touche en un même point deux droites fixes, les triades de rayons, menées de ce point aux points d'inflexion de ces courbes, forment une involution cubique, dans laquelle les deux droites fixes sont des rayons triples. »

Waltenhofen (A. v.). — *Sur la puissance des électro-aimants.* (16 p., 2 pl.)

La puissance d'un électro-aimant, lorsque l'intensité du courant augmente, commence par croître plus rapidement que l'intensité du courant, comme l'ont reconnu Lenz, Jacobi, Dub; puis elle croît proportionnellement, conformément aux expériences de Dal Negro, et, à la fin, elle croît de plus en plus lentement, en s'approchant d'un maximum, comme Müller et Poggendorff l'ont observé. Une aimantation qui, sans porte-poids, correspond à la moitié environ de la saturation, produit déjà une puissance voisine du maximum.

Waltenhofen (A. v.). — *Recherches magnétiques, principalement au point de vue de l'emploi de la formule de Müller.* (26 p., 1 pl.)

La formule de Müller, d'après les explications données dans ce Mémoire, ne peut concorder avec les observations que pour les fortes aimantations. L'électromagnétisme des faisceaux et des tubes croît d'abord beaucoup plus rapidement que celui des verges pleines; mais il tend plus tard vers un maximum qui correspond au poids.

T. LXII; juillet-décembre 1870.

Winckler (A.). — *Sur les relations entre les intégrales abéliennes complètes d'espèce différente.* (76 p.)

« L'objet de ce travail est de rechercher les relations soit entre les simples sommes, soit entre les produits des intégrales abéliennes complètes d'espèce différente, par une autre voie et avec plus de généralité qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

» Pour obtenir les équations entre des fonctions *linéaires* de semblables intégrales, l'auteur emploie le procédé indiqué dans un précédent Mémoire ([1]) : « Sur les fonctions abéliennes complètes », sans toutefois supposer connus les résultats qu'il y a établis. Ici les équations ne sont pas restreintes au cas où le numérateur rationnel de la fraction sous le signe intégral ne dépasse pas un certain degré, et où le dénominateur ne contient que la racine carrée d'une fonction rationnelle; elles comprennent encore les cas où le numérateur est de degré quelconque, et où le dénominateur contient, outre le radical carré, un facteur rationnel, et enfin aussi le cas où le radical est au numérateur.

» Il serait beaucoup plus difficile de déduire ces relations du théorème d'Abel, comme on le reconnaît sans peine d'après le Mémoire de Jacobi : *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis*, qui ne traite que le plus simple des cas indiqués.

» Les équations entre les produits des intégrales en question s'obtiennent par la détermination de la valeur de certaines intégrales multiples, d'après une méthode dont le point de départ coïncide avec celui qu'a choisi M. Weierstrass pour le calcul des deux intégrales doubles servant de base à sa théorie des modules de périodicité. L'extension aux intégrales multiples se fait au moyen de l'expression à laquelle Cayley a donné le nom de *Pfaffien*, et d'une autre expression analogue, ayant avec la première des propriétés communes. Les résultats sont plus généraux que ceux que l'on connaît jusqu'ici; partant de la même source que les équations correspondantes de Weierstrass, ils fournissent, comme cas particuliers, non-seulement l'intégrale multiple connue, trouvée par Jacobi et Haedenkamp, mais encore la généralisation des formules auxquelles Lamé a été conduit par la considération des coordonnées elliptiques. Elles embrassent ainsi la plupart des relations de cette espèce connues jusqu'à ce jour, et en font connaître en même temps beaucoup de nouvelles. »

([1]) *Sitzungsberichte*, t. LVIII. Voir *Bulletin*, t. I, p. 209.

Puschl (K.). — *Sur la quantité de chaleur et la température des corps.* (26 p.)

Exner (K.). — *Sur les courbes d'intensité pendant la durée d'une sensation lumineuse.* (5 p.)

Hornstein (K.). — *Sur l'orbite de la comète de Hind, pour l'année* 1847. (17 p.)

Weyr (Ed.). — *Sur les coniques semblables.* (10 p.)

L'auteur étudie les sections coniques qui sont semblables à une section conique donnée, et qui passent par quatre points, ou qui passent par trois points en touchant une droite donnée.

Weiss (E.). — *Contributions à la connaissance des étoiles filantes.* 2e Mémoire. (68 p.)

Pfaundler (L.) et Platter (H.). — *Sur la capacité calorifique de l'eau dans le voisinage de son maximum de densité.* (14 p.)

Loschmidt (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des gaz, en l'absence de cloison poreuse.* 2e Mémoire. (11 p.)

König (J.). — *Contributions à la théorie de l'excitation électrique des nerfs.* (10 p.)

Wretschko (A.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des mélanges gazeux (lorsque, aux deux gaz soumis à la diffusion, on mêle des proportions égales en volume d'un troisième gaz).* (15 p.)

Waltenhofen (A. v.). — *De l'attraction exercée par une spirale magnétique sur un noyau de fer mobile.* (16 p.)

Les intensités de courant x, pour lesquelles des barreaux de fer d'égale longueur et de poids différents sont maintenus en suspension dans une spirale magnétisante verticale, sont les abscisses des points d'intersection d'une droite avec les courbes $y = F(x), y = f(x), \ldots$, y représentant les moments magnétiques que les barreaux acquerraient dans la spirale pour les intensités de courant x.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur la comète de Winnecke* (comète III, 1819). 1er Mémoire. (21 p.)

Peterin (J.). — *Sur la formation de figures électriques annulaires par le courant d'une machine à influence.* (8 p., 1 pl.)

Benigar (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des mélanges gazeux.* (12 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les développées des courbes dans l'espace.* (5 p.)

Par des considérations projectives de limites, on établit les propriétés projectives des faisceaux de normales construits en deux points d'une courbe gauche. De là découlent diverses propriétés des développées des courbes gauches.

Littrow (K. v.). — *Approches physiques des planètes de* (1) *à* (82), *pendant l'année prochaine* (1871). (5 p.)

Weiss (E.). — *Discussion des observations exécutées pendant l'éclipse totale de Soleil du* 18 *août* 1868, *et des résultats qui en découlent.* (144 p., 2 pl.)

T. LXIII; janvier-mai 1871.

Wassmuth (A.). — *Sur le travail produit par le courant électrique dans l'aimantation d'un barreau de fer.* (5 p.)

L'auteur détermine le travail développé par le courant dans la rotation des aimants moléculaires, et il trouve que le travail développé dans l'unité de volume du fer est égal au produit de la force magnétique par son moment magnétique. En substituant l'expression, donnée par Weber, de la force magnétisante, on trouve que, pour une petite force magnétisante, le travail développé est proportionnel au carré de l'intensité du courant, tandis que, pour une force très-grande, le travail croît en raison simple de cette intensité.

Stefan (J.). — *Sur l'équilibre et le mouvement, et en particulier sur la diffusion des mélanges gazeux.*

I. Équations de l'équilibre. — II. Équations du mouvement. — III. Sur la diffusion d'un mélange de deux gaz. — IV. Sur la diffusion d'un mélange de trois gaz. — V. Intégration approximative des équations de la diffusion d'un mélange de trois gaz. — VI. Sur la diffusion d'un mélange de deux gaz dans un troisième gaz simple. — VII. Influence de l'humidité sur la diffusion. — VIII. Sur la diffusion des gaz à travers les parois poreuses.

Exner (K.). — *Sur les maxima et les minima des angles sous* *lesquels les surfaces courbes sont coupées par des rayons vecteurs.* (10 p., 1 pl.)

Ce Mémoire doit être considéré comme la suite du Mémoire publié en 1868 : « Sur les maxima et les minima des angles sous lesquels des courbes sont coupées par des rayons vecteurs. » Après avoir complété le Mémoire en question, l'auteur démontre géométriquement et analytiquement ce théorème *non conversible :*

« Si une surface est coupée en un de ses points par un rayon vecteur sous un angle maximum ou minimum, l'origine des rayons vecteurs est située sur l'un des deux plans normaux principaux du point d'intersection, et, de plus, sur un cercle construit sur le rayon de courbure principal correspondant comme diamètre. »

Pfaundler (L.). — *Démonstration élémentaire de l'équation fondamentale de la théorie dynamique des gaz.* (11 p., 1 pl.)

Il s'agit de la relation

$$p = \frac{nmc^2}{3v},$$

dans laquelle n désigne le nombre, m la masse, et c la vitesse des molécules gazeuses contenues dans le volume v, et p la pression exercée par leurs chocs sur l'unité de surface.

Stefan (J.). — *De l'influence de la chaleur sur la réfraction de la lumière dans les corps solides.* (23 p.)

Schulhof (L.). — *Calcul de l'orbite de la planète* (108) *Hécube.* (19 p.)

Stern. — *Contributions à la théorie de la résonnance des corps solides, en tenant compte des vibrations simultanées de l'air.* (15 p.)

Boltzmann (L.). — *Sur l'équilibre calorifique entre des molécules gazeuses polyatomiques.* (22 p.)

I. Mouvement des atomes dans les molécules. — II. Chocs des molécules entre elles.

Seydler (A.). — *Éléments de la comète* II, 1869. (2 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre.* (12 p.)

Après avoir développé l'équation

$$A_4(\xi)_4 - A_3(\xi)_3 + A_2(\xi)_2 - A_1(\xi)_1 = 1$$

[où $(\xi)_k$ est la somme des combinaisons de $k^{\text{ième}}$ classe des quatre paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4], à laquelle doivent satisfaire quatre points ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, situés dans un même plan, l'auteur traite, en s'appuyant sur cette équation, les propriétés connues de cette courbe, relatives aux plans osculateurs, aux tangentes, aux sécantes simples et triponctuelles, etc.

DITSCHEINER (L.). — *Sur quelques nouveaux phénomènes d'interférences de Talbot.* (25 p.; 1 pl.)

DITSCHEINER (L.). — *Sur un appareil simple pour obtenir des couples de couleurs complémentaires avec le schistoscope de Brücke.* (11 p.)

DITSCHEINER (L.). — *Sur la détermination des longueurs d'onde des raies de Fraunhofer.* (6 p.)

NIEMTSCHIK (R.). — *Méthodes générales pour représenter les intersections des plans avec les surfaces coniques et cylindriques, des droites avec les sections coniques, et des coniques confocales entre elles.* (33 p.; 2 pl.)

Les méthodes exposées dans tous les Traités un peu détaillés de Géométrie descriptive pour la construction des courbes d'intersection sont développées dans ce long article, sans qu'on y trouve rien de nouveau, soit comme point de vue, soit comme résultat. On peut juger à quel point l'auteur est peu familier avec les progrès accomplis par la Géométrie dans notre siècle, par ce fait que, en 1871, il parle, à la fin de son travail, de ses droits de priorité relativement à l'emploi d'*une seule projection* au lieu de deux pour la découverte de divers théorèmes de Géométrie de situation.

LANG (V. v.). — *Sur l'écoulement des gaz.* (15 p.)

OPPOLZER (Th. v.). — *Sur l'orbite de la planète* (62) *Erato.* (35 p.)

LANG (V. v.). — *Sur la dispersion anormale des prismes aigus.* (3 p.)

LANG (V. v.). — *Sur la dioptrique d'un système de surfaces sphériques concentriques.* (7 p.)

Boltzmann (L.). — *Quelques théorèmes généraux sur l'équilibre de la chaleur.* (33 p.)

I. Dépendance entre les théorèmes relatifs aux phénomènes que présentent les molécules gazeuses polyatomiques, et le principe du dernier multiplicateur de Jacobi. — II. Équilibre de la chaleur entre un nombre fini de points matériels. — III. L'équilibre de chaleur entre des molécules gazeuses déduit, à l'aide d'une hypothèse, de l'équilibre de chaleur entre un nombre fini de points matériels.

Boltzmann (L.). — *Démonstration analytique du deuxième théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, au moyen des théorèmes sur l'équilibre de la force vive.* (21 p.)

Raabe (A.). — *Résolution des équations algébriques de degré quelconque, même à coefficients complexes, à l'aide de la représentation des quantités complexes due à Gauss.* (27 p.)

Koutny (E.). — *Description de la parabole au moyen de points donnés et de tangentes données.* (13 p.; 1 pl.)

L'auteur construit dans neuf cas la parabole comme projection centrale d'un cercle.

Unferdinger (Fr.). — *Sur la théorie des substitutions simultanées dans les intégrales doubles et triples.* (36 p.)

T. LXIV; juin-décembre 1871.

Hornstein (C.). — *Sur la dépendance entre le magnétisme terrestre et la rotation du Soleil.* (13 p.; 2 pl.)

Weiss (E.). — *Sur les variations brusques de certains éléments de réduction d'un instrument.* (28 p.)

Littrow (K. v.). — *Rapport sur la détermination, exécutée par M. le professeur E. Weiss, de la latitude et de l'azimut sur le Laaer Berg, près de Vienne.* (7 p.)

Niemtschik (R.). — *Sur la construction de l'intersection de deux surfaces courbes, en se servant de sphères et de surfaces de révolution.* (8 p.; 1 pl.)

L'auteur, professeur à l'Institut I. et R. Polytechnique de Vienne, fait voir, avec les plus grands détails, comment on peut construire les intersections des surfaces de révolution avec les ellipsoïdes et avec d'autres surfaces, prises dans des positions particulières.

SEYDLER (A.). — *Sur l'orbite de la première comète de l'année 1870.* (8 p.)

STEFAN (J.). — *Sur les lois de l'induction électrodynamique.* (32 p.)

WINCKLER (A.). — *Sur l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels du second degré.* (37 p.)

L'auteur s'occupe ici de l'équation différentielle de la forme générale

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L)\,dx \\ &+ (A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L')\,dy = 0, \end{aligned} \right.$$

qui, dans l'ordre de simplicité, vient immédiatement après l'équation à coefficients rationnels du premier degré, équation que l'on sait intégrer dans tous les cas. L'équation connue, intégrée par Jacobi ([1]), est un cas particulier de l'équation (1), dans lequel les coefficients seraient assujettis aux quatre relations

$$A = A' + 2B = C + 2B' = C' = 0.$$

M. Winckler établit que l'équation (1) admet encore une intégrale, de composition analogue à celle de l'intégrale de Jacobi, dans le cas où l'on a entre les coefficients trois relations seulement d'une certaine forme, ce qui comprend, comme cas particulier, le résultat de Jacobi.

De cette solution, on déduit encore d'autres cas particuliers, correspondant à quatre ou à cinq relations plus simples entre les coefficients : ce sont des cas d'exception, qui donnent lieu à des intégrales en partie transcendantes.

Un second résultat consiste à faire voir que, dans certaines conditions, l'équation en question est satisfaite par le produit des puissances de quatre expressions linéaires, produit qui devient encore en partie transcendant dans certains cas particuliers.

([1]) *Journal de Crelle*, t. 74.

HANN (J.). — *Études sur les vents dans l'hémisphère boréal, et leur influence climatologique.* 2^e^ Partie : *L'été.* (53 p.; 1 pl.)

OPPOLZER (Th. v.). — *Établissement des éphémérides, données dans l'*Annuaire de Berlin *pour* 1874, *pour les planètes* (58) *Concordia*, (59) *Elpis*, (62) *Erato*, (64) *Angélina*, (91) *Égine et* (113) *Amalthée.* (36 p.)

LANG (V. v.). — *Sur la théorie dynamique des gaz.* (5 p.)

Pression sur la paroi du vase. — Frottement interne. — Conductibilité pour la chaleur.

STAUDIGL (R.). — *Sur l'identité des constructions en projection perspective, oblique et orthogonale.* (5 p.; 1 pl.)

L'auteur établit ce théorème :

« Tous les problèmes de Géométrie descriptive dans lesquels n'interviennent ni mesure de longueur, ni mesure angulaire, c'est-à-dire tous les problèmes qui appartiennent à la Géométrie de situation, peuvent se résoudre absolument de la même manière, en projection, soit perspective, soit oblique, qu'en projection orthogonale (axonométrique). »

Or ce théorème n'a pas besoin d'une démonstration spéciale, puisque toutes ces espèces de projections ont pour type général la projection centrale.

FROMBECK (H.). — *Contribution à la théorie des fonctions de variables complexes.* (80 p.)

Ce Mémoire, qui fait suite au Chapitre du tome II du *Compendium der höheren Analysis* de Schlömilch, qui traite des *Fonctions d'une variable complexe* (p. 44-68), développe d'abord cette idée, que la théorie des fonctions de variables complexes gagne en clarté et en généralité, lorsqu'on étend les recherches à des fonctions d'un nombre quelconque d'expressions, complexes ou non, de plusieurs variables. Il étudie la condition de possibilité de l'équation

$$F[f(x, y, z, \ldots)] = f(\varphi, \chi, \psi, \ldots).$$

Il ajoute ensuite des compléments à plusieurs sections du travail de M. Schlömilch, principalement à celles qui traitent des intégrales le long d'un contour.

Bloek (E.). — *Communication relative aux catalogues d'aurores boréales.* (2 p.)

Herrmann (E.) — *Formule pour la tension des vapeurs saturées.* (28 p.)

I. Essais pour établir la loi pour la vapeur d'eau. — II. Hypothèse qui conduit à la forme $p = \left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$. — III. Série des tensions des vapeurs d'autres liquides.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur le calcul de l'orbite d'une comète.* 3e Mémoire. (23 p.)

Dans deux Mémoires insérés dans les tomes LVII et LX [1] des *Sitzungsberichte*, M. Oppolzer a exposé une nouvelle méthode, destinée à remplacer la méthode d'Olbers, dans les cas où celle-ci tombe en défaut; mais la méthode proposée exigeait de très-longs calculs, provenant surtout d'une certaine équation qu'il fallait résoudre par des essais répétés. L'auteur expose les moyens qu'il a trouvés depuis pour abréger ces calculs, et maintenant sa méthode, qui l'emportait déjà sur celle d'Olbers, au point de vue de l'exactitude des résultats, peut soutenir la comparaison sous le rapport de la facilité du travail.

Gegenbauer (L.). — *Évaluations d'intégrales définies.* (24 p.)

Pelz (C.). — *Sur le problème du point brillant.* (11 p.; 2 pl.)

Étant données les positions de la source lumineuse et de l'œil, les points brillants (points qui réfléchissent dans l'œil le rayon venant de la source lumineuse) sont déterminés, dans ce Mémoire, pour un cercle et pour une conique en général, si ces courbes sont considérées comme des lignes réfléchissant la lumière. L'auteur donne encore différentes constructions des courbes focales cubiques générales.

Oppolzer (Th. v.) — *Sur l'orbite de la planète* (91) *Égine.* (45 p.)

Stefan (J.). — *Sur l'induction diamagnétique.* (10 p.)

Winckler (A.). — *Sur le développement et la sommation de quelques séries.* (28 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VII, p. 139.

L'auteur traite d'abord du développement des intégrales définies sous une forme qui trouve son application dans le Calcul des probabilités, et le présente ensuite sous d'autres formes essentiellement plus générales.

La deuxième Partie de son Mémoire se rapporte à une remarquable formule de sommation donnée par Jacobi [1], laquelle peut être considérée comme un cas très-simple d'une formule appartenant aux éléments du Calcul différentiel. De cette dernière formule on tire avec facilité un grand nombre d'autres formules sommatoires non moins remarquables, les unes connues, les autres nouvelles.

Le Mémoire se termine par la sommation de séries qui n'ont pas encore été étudiées, et dont les plus simples sont de la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1} - a_2^{\lambda+n-1})\ldots(b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!}.$$

La somme de ces séries, lors même que l'on supprime des groupes de termes intermédiaires en certain nombre et dans un certain ordre, peut s'exprimer sous forme linéaire au moyen des valeurs de la fonction $f(z)$ correspondant à différents arguments.

T. LXV; janvier-mai 1872.

Seydler (A.). — *Sur l'orbite de Dioné* (106). (9 p.)

Gegenbauer (L.). — *Sur les fonctions bességliennes de seconde espèce.* (3 p.)

Stefan (J.). — *Recherches sur la conductibilité des gaz pour la chaleur.* 1er Mémoire. (25 p.)

Weiss (E.). — *Détermination de la différence de longitude Vienne — Wiener-Neustadt par des transports de chronomètres.* (23 p.)

Handl (A.). — *Note sur l'intensité absolue et sur l'absorption de la lumière.* (4 p.)

Frombeck (H.). — *Sur les intégrales de Fourier et leurs analogues.* (56 p.)

(1) *Zur combinatorischen Analysis* (*Journal de Crelle*, t. 22).

L'auteur prend pour point de départ de ses recherches l'identité d'une intégrale définie de forme indéterminée, avec ce que Cauchy nomme la *valeur principale* de cette intégrale, principe qui nous semble fort sujet à contestation.

Strzelecki (F. v.). — *Théorie des courbes de vibration.* (119 p.)

L'auteur appelle *courbes de vibration* la trajectoire que décrit un point matériel libre en vertu de plusieurs vibrations élémentaires auxquelles il est soumis simultanément. Il suppose les durées de ces vibrations élémentaires commensurables entre elles, ce que l'on peut faire en altérant la réalité aussi peu que l'on voudra.

Après avoir établi, dans une Introduction, les notations relatives aux groupes d'indices de la suite $T_1, T_2, \ldots, T_n$ des durées des vibrations élémentaires, et avoir établi les propriétés de ces groupes, l'auteur divise son Mémoire en huit paragraphes, dont voici les titres :

§ 1. Développement des équations des courbes de vibration. — § 2. Remarques générales. — § 3. Propriétés générales des courbes de vibration quelconque. — § 4. Propriétés générales de certaines courbes de vibration particulières. — § 5. Points singuliers des courbes de vibration quelconques. — § 6. Points singuliers de certaines courbes de vibration particulières. — § 7. Influence de certaines altérations des phases initiales sur la forme de la courbe de vibration. — § 8. Cas particulier. L'auteur développe comme exemple le cas où les vibrations élémentaires sont au nombre de *trois*.

Littrow (K. v.). — *Rapport sur les déterminations des différences de longitude, Berlin-Vienne-Leipzig, exécutées par MM. C. Bruhns, W. Forster et E. Weiss.* (2 p.)

Stern (S.). — *Contributions à la théorie de la résonnance des cavités remplies d'air.* (10 p.)

Stefan (J.). — *Sur la théorie dynamique de la diffusion des gaz.* (41 p.)

Gegenbauer (L.). — *Note sur les fonctions* X_n^m *et* Y_n^m. (4 p.)

Handl (A.). — *Sur la constitution des fluides.* (*Contributions à la théorie moléculaire,* II.) (12 p.)

Hornstein (C.). — *Sur l'influence de l'électricité du Soleil sur l'état barométrique.* (20 p.; 1 pl.)

Lang (V. v.). — *Sur la théorie dynamique des gaz,* II. (4 p.)

Stefan (J.). — *Sur les stratifications dans les fluides vibrants.* (4 p.)

T. LXVI; juin-décembre 1872.

Gegenbauer (L.). — *Sur la théorie de la fonction* X_n^m. (8 p.)

Stefan (J.). — *Sur les propriétés des oscillations d'un système de points.* (26 p.)

Boltzmann (L.). — *Sur la loi d'action des forces moléculaires.* (7 p.)

Gegenbauer (L.). — *Sur la théorie des fonctions besséliennes de seconde espèce.* (4 p.)

Mach (E.). — *Sur la détermination stroboscopique de la hauteur du son.* (8 p.)

Boltzmann (L.). — *Nouvelles études sur l'équilibre de chaleur entre les molécules gazeuses.* (96 p.)

Gegenbauer (L.). — *Expressions intégrales des fonctions* Y_n^m. (6 p.)

Oppolzer (Th. v.). — *Explication des éphémérides données dans l'*Annuaire de Berlin, *pour* 1875, *pour les planètes* (58) *Concordia,* (59) *Elpis,* (62) *Erato,* (64) *Angélina et* (113) *Amalthée.* (15 p.)

Gegenbauer (L.). — *Développement suivant les fonctions* X_n^{2r+1}. (7 p.)

Stefan (J.). — *Sur les expériences d'interférences faites avec la double plaque de quartz de Soleil.* (29 p.)

Introduction. — I. Formules d'intensité. — II. Raies de Talbot. — III. Expérience avec deux fentes.

Littrow (K. v.). — *Sur l'observation des plus petites phases lunaires visibles.* (22 p.)

La question de savoir à quel instant, après la nouvelle Lune, le croissant commence à devenir visible à l'œil nu, a occupé le célèbre philosophe juif Maimonide, qui y a consacré les chapitres XII-XVII de ses *Constitutiones de sanctificatione novilunii*. M. de Littrow donne la traduction allemande de ces curieux passages, avec quelques additions explicatives.

PELZ (C.). — *Sur la détermination des axes des projections centrales des surfaces du second degré.* (10 p., 1 pl.)

L'auteur développe une construction *directe* des axes principaux des projections centrales du second degré, dans laquelle il n'est pas nécessaire de déterminer préalablement deux diamètres conjugués quelconques de la projection. En outre, cette construction directe est beaucoup plus simple que la construction employée habituellement pour la détermination de deux diamètres conjugués.

T. LXVII; janvier-mai 1873.

PUSCHL (C.). — *Sur la dépendance entre l'absorption et la réfraction de la lumière.* (6 p.)

BOLTZMANN (L.). — *Détermination expérimentale de la constante de diélectricité des isolateurs.* (64 p., 1 pl.)

MACH (E.) et FISCHER (A.). — *La réflexion et la réfraction du son.* (8 p.)

Les auteurs montrent que les lois qui ont lieu pour la lumière ne sont applicables au son que lorsque les surfaces réfléchissantes et réfringentes sont très-grandes par rapport à la longueur d'onde, ou lorsque l'on a affaire à des surfaces d'ondes entièrement fermées.

DVOŘÁK (V.). — *Sur la théorie des raies de Talbot.* (12 p.)

DOMALÍP (K.). — *Sur la théorie mécanique de l'électrolyse.* (12 p.)

L'auteur calcule, d'après les actions chimiques qui ont lieu dans une chaîne de Pincus, la force électromotrice de cette chaîne. Cette valeur, obtenue théoriquement, est comparée aux valeurs trouvées par l'expérience, et conduit l'auteur à cette conclusion, que, pour la vérification expérimentale des valeurs des forces électromotrices calculées au moyen des équivalents thermiques des actions chimiques d'une chaîne, la méthode de Poggendorff, exclue par Bosscha, est précisément la mieux appropriée de toutes.

WINCKLER (A.). — *Intégration des équations linéaires du second ordre, dont les coefficients sont des fonctions linéaires de la variable indépendante.* (40 p.)

Euler a signalé, dans ses *Institutiones Calculi integralis,* les cas les plus simples dans lesquels l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p, q sont des fonctions rationnelles de x, peut être intégrée au moyen d'une intégrale définie. La voie indirecte qu'il a suivie, en se donnant d'avance l'intégrale et cherchant l'équation à laquelle elle correspond, est la plus avantageuse, parce qu'il est généralement plus facile de faire coïncider l'équation obtenue avec une équation donnée, que de trouver une intégrale définie satisfaisant à cette équation donnée et qui, par un choix convenable de ses limites, représente une fonction de x finie et complétement déterminée ; et de plus, lorsqu'on cherche l'intégrale générale de l'équation, il faut, outre l'intégrale définie déjà connue, en trouver une seconde, essentiellement différente, et satisfaisant aux mêmes conditions. En tout état de choses, il faut que le nombre des cas à distinguer soit réduit au minimum. En outre, il y a d'autres conditions à remplir, suivant l'usage que l'on veut faire de l'intégrale. Il convient, d'après cela, que les intégrales particulières soient exprimées aussi directement que possible, au moyen des quantités qui entrent dans l'équation, ce qui permet d'établir, sans avoir besoin de transformer l'équation, des formules qui conviennent à toutes les valeurs, réelles ou complexes, des coefficients. C'est à ce point de vue que M. Winckler a repris l'étude de l'équation bien connue

$$(H_0 t + H)\frac{d^2y}{dt^2} + 2(K_0 t + K)\frac{dy}{dt} + (L_0 t + L)y = 0.$$

KOLBE (J.). — *Démonstration d'un théorème sur la présence de racines complexes dans une équation algébrique.* (3 p.)

BOUÉ (A.). — *Remarques sur la théorie, reprise par M. Walfert, des aurores boréales produites par des phénomènes de réflexion et de réfraction des rayons solaires.* (11 p.)

GEGENBAUER (L.). — *Note sur quelques intégrales définies.* (3 p.)

DITSCHEINER (L.). — *Sur le rapport d'intensité et la différence de marche des rayons polarisés dans la diffraction, qui se dirigent perpendiculairement et parallèlement en plan d'incidence.* (30 p.)

OPPOLZER (Th. v.) — *Explication des éphémérides, données dans l'*Annuaire de Berlin, *pour* 1876, *des planètes* (58) *Concordia,* (59) *Elpis,* (62) *Erato,* (64) *Angélina et* (113) *Amalthée.* (31 p.)

WEYR (Em.). — *Sur les courbes planes rationnelles du quatrième ordre, dont les tangentes aux points doubles sont des tangentes d'inflexion.* (6 p.)

Le type principal de ces courbes est la lemniscate. L'auteur démontre, dans cette Note, quelques théorèmes, qui sont des généralisations de ceux qu'il a publiés sur la lemniscate ([1]).

NIEMTSCHIK (R.). — *Sur la construction des lignes du second ordre inscrites l'une à l'autre.* (16 p., 1 pl.)

STREINTZ (H.). — *Sur les variations d'élasticité et de longueur d'un fil parcouru par un courant galvanique.* (32 p., 1 pl.)

L'auteur parvient à ce résultat, que le courant électrique ne produit aucune altération dans les coefficients d'élasticité, comme Wertheim l'avait annoncé. Il trouve, au contraire, que les fils sont plus fortement dilatés par le courant électrique que par un égal échauffement provenant de l'extérieur. Pour l'acier trempé seulement, cette dilatation particulière due au courant est insensible, quoique, pour l'acier doux, dont le coefficient de dilatation est à très-peu près le même, elle soit très-notable.

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur quelques limites qui se rattachent à la valeur de* $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ *pour* $n = \infty$. (6 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Le rayon de courbure moyen et la courbure moyenne en un point donné d'une surface.* (12 p.)

([1]) Voir *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1er Cahier : « Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate. »

Dans le cas où les courbures des deux sections principales sont de même sens, le rayon de courbure moyen est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux, et la courbure moyenne à la moyenne arithmétique des courbures des sections principales.

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur les propriétés remarquables de l'expression*

$$z^n - \binom{m}{1}(z-1)^n + \binom{m}{2}(z-2)^n - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(z-m)^n,$$

et sur leurs applications. (8 p.)

MACH (E.). — *Sur les anneaux de Stefan dans le phénomène des anneaux colorés de Newton, et sur quelques phénomènes d'interférences qui s'y rattachent.* (11 p.)

Il s'agit du système d'anneaux décrits pour la première fois par M. Stefan, et qui se présentent dans les places non colorées du verre courbe de Newton, lorsqu'on les regarde en couvrant la moitié de la pupille avec un mica.

HORNSTEIN (C.). — *Sur la dépendance entre la variation diurne de l'état barométrique et la rotation du Soleil.* (32 p.)

WALTENHOFEN (A. v.). — *Sur un théorème général pour le calcul de l'action d'une spirale magnétisante.* (16 p.)

L'auteur établit le théorème suivant : « La force magnétisante d'une spirale est proportionnelle au produit de la force du courant par la somme des cosinus de tous les angles que les droites menées dans le plan d'une section axiale d'un point de chaque spire aux extrémités de l'axe du barreau aimanté forment avec cet axe. » Ce théorème est une généralisation du théorème de Haedenkamp.

E. W.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT (¹).

T. LXXVII; 1873.

LÜBECK (G.). — *Sur l'influence qu'exerce sur le mouvement d'un pendule un liquide frottant contenu dans une cavité sphérique du pendule.* (37 p.)

Dans ses expériences sur l'attraction de la Terre, Bessel attachait un cylindre creux de laiton à la verge d'un pendule, et, après l'avoir rempli du corps qu'il voulait soumettre à l'expérience, il observait la durée des oscillations de ce pendule. C'est de là qu'il conclut que la force attractive de la Terre donne la même accélération à tous les corps ; et, ayant calculé au moyen de ces observations la longueur du pendule à secondes, il obtint des valeurs qui différaient seulement de grandeurs du même ordre que les erreurs d'observation. Cependant, quand il remplit d'eau son cylindre creux, il en résulta une plus grande longueur du pendule à secondes (0,0318 lignes de Paris) ; mais lorsqu'il augmenta la verge du pendule d'une toise, et qu'il y suspendit le même cylindre d'eau, le calcul des nouvelles observations fournit la même valeur que pour les corps solides. Bessel croyait expliquer ce phénomène par les oscillations du liquide, qui ne permettent pas de calculer le moment d'inertie pour un liquide comme on le fait pour un solide. Il supposait que la force centrifuge était plus grande dans les couches supérieures que dans celles du fond, qu'elle causait un mouvement intérieur du liquide et qu'elle avait une plus grande valeur pour un pendule court que pour un long. L'auteur ne croit pas pouvoir adopter cette explication, parce qu'elle lui semble défectueuse en elle-même, et qu'elle néglige la différence essentielle qu'il y a entre un liquide et un solide. Le mouvement relatif de deux molécules voisines dépendra de la grandeur des forces qui les sollicitent, et de la résistance qu'elles opposent au déplacement ; pour le calcul du mouvement dans un liquide, il nous faut donc la connaissance de la force qui fait glisser deux couches liquides l'une contre l'autre, et c'est la théorie du frottement des liquides qui en tient compte. Mais comme

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 188.

la forme cylindrique de la masse d'eau de Bessel offre bien des difficultés au calcul, l'auteur a préféré aborder le problème pour le cas d'une sphère creuse remplie du liquide, comme le lui avait proposé M. O.-E. Meyer, dont on connaît les travaux nombreux sur le frottement intérieur des fluides. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'analyse mathématique donnée par l'auteur dans huit paragraphes ; en voici les résultats :

1. Le liquide renfermé dans la sphère creuse ne s'ébranle pas par suite du mouvement rectiligne, mais seulement par l'oscillation autour du diamètre normal au plan des oscillations du pendule. Le liquide décrit aussi des oscillations autour de ce diamètre avec des vitesses angulaires qui ne sont constantes que sur chaque couche sphérique concentrique de la sphère creuse.

2. Un mouvement éventuel initial du liquide, qui serait de l'ordre de la vitesse pendulaire, s'anéantit par le frottement intérieur, au plus tard après un certain intervalle de $\mathfrak{T}$ secondes, où $\mathfrak{T}$ se calcule d'après une formule donnée.

3. Après l'écoulement du temps $\mathfrak{T}$, ou bien dès le commencement si le liquide était en repos au commencement de l'expérience, le mouvement pendulaire est périodique en toute rigueur.

4. L'amplitude des oscillations va en diminuant suivant une progression géométrique, si le temps augmente suivant une série arithmétique.

5. La durée des oscillations est plus grande que dans le cas où le pendule contiendrait un liquide parfait au lieu d'un liquide frottant.

6. En général, la durée des oscillations sera plus grande que si l'on avait remplacé le liquide par un corps solide de masse égale. Si la longueur du pendule est très-grande, le frottement intérieur du liquide n'exerce pas d'influence sur le mouvement du pendule.

Schwarz (H.-A.). — *Sur les courbes isothermes algébriques dans le plan.* (9 p.)

Soit u une fonction réelle des coordonnées rectangles x, y, qui satisfasse à l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

Lamé appelle *isotherme* le faisceau des courbes représentées par l'équation $u = c$ quand on fait varier le paramètre c. Si u est une fonction algébrique des deux variables réelles x et y, on peut toujours ajouter à la fonction u une autre fonction vi, telle que $w = u + vi$ devienne une fonction analytique $w = f(z)$ de la variable complexe z; et cette fonction donne lieu à une représentation conforme du faisceau des courbes sur un faisceau de droites parallèles $u = c$ dans le plan de la grandeur complexe w. L'étude de cette fonction $w = f(z)$, ou plutôt de son inverse $z = \varphi(w)$, conduit M. Schwarz à ce théorème : « Le faisceau des courbes orthogonales d'un faisceau d'isothermes algébriques planes est toujours lui-même un faisceau d'isothermes algébriques. » Enfin la fonction complexe $w = f(z)$, dont la partie réelle a une valeur constante pour le contour de chaque courbe d'un faisceau, formé de courbes isothermes algébriques et situé dans le plan de la variable complexe z, est :

I. Une fonction algébrique de z;

II. Ou, si μ désigne un nombre convenablement choisi, la quantité μw, et par suite aussi μwi est le logarithme d'une fonction algébrique de z;

III. Ou μw est une intégrale elliptique de première espèce, sous la forme normale de Jacobi, à module réel, et dont la limite supérieure est une fonction algébrique de z.

Sohncke (L.). — *Les systèmes ponctuels réguliers d'étendue illimitée dans le plan.* (55 p.)

Imaginons un système de points séparés dans un plan; joignons chaque point à tous les autres par des lignes droites. Il peut arriver que ces faisceaux de droites, inégaux en général, deviennent égaux ou symétriques pour tous les points, ce qui indique un arrangement régulier des points. Un système de points d'étendue illimitée s'appelle *régulier,* si les faisceaux issus de tous ses points sont ou égaux ou symétriques. (L'égalité est supposée permettre une superposition des faisceaux sans qu'on ait besoin de les écarter du plan et de les retourner, tandis que la symétrie exige préalablement cette opération avant qu'on réussisse à les superposer.) M. Sohncke fut porté à étudier cette question en essayant d'approfondir les idées de Delafosse et de Bravais sur la structure des cristaux, et voilà pourquoi il pose et résout ce problème : « Trouver tous les systèmes ponctuels réguliers possibles d'étendue illimitée dans le plan ». Voici ses résultats :

Il n'y a que treize systèmes ponctuels réguliers qui soient essentiellement distincts. On en peut regarder dix comme étant formés de polygones égaux, réguliers ou semi-réguliers (un polygone dont tous les angles et les côtés *alternatifs* sont égaux est appelé *semi-régulier*), détachés les uns des autres et dont les sommets portent les points du système. Ces polygones sont ou des triangles réguliers (syst. I, II, III), ou des carrés (IV et V) ou des rectangles (VI, VII, VIII, X), ou des hexagones semi-réguliers (IX). Les systèmes qu'on peut considérer comme formés d'octogones ou de dodécagones réguliers et semi-réguliers se trouvent déjà compris parmi les systèmes mentionnés. Il n'existe pas de systèmes engendrés par d'autres polygones réguliers. Les systèmes dont les points résultent des sommets de polygones réguliers de même espèce (par exemple I, II, III) diffèrent par la distribution et la position de ces polygones. Les trois autres systèmes peuvent être considérés comme étant formés de bandes homogènes parallèles, infinies et équidistantes ; les points du système en occupent les lignes parallèles de démarcation. On trouve quelquefois une connexion entre des systèmes qui semblent être bien différents ; des cas spéciaux de l'un appartiennent en même temps à l'autre. Deux planches servent à éclaircir la théorie.

La connaissance des systèmes plans ouvre une voie aux systèmes de l'espace quand on empile ceux-là de certaines manières : on peut aussi étudier directement les systèmes ponctuels polyédraux ; mais la recherche complète de tous les systèmes réguliers possibles de l'espace offre plus de difficultés. Quand on l'aura finie, il faudra les classer suivant le degré de symétrie dont ils jouissent, et enfin les comparer aux systèmes des cristaux. L'auteur promet d'y revenir dans un nouveau Mémoire.

MERTENS (F.). — *Extrait d'une lettre au Rédacteur*. (3 p.)

SCHRÖTER (H.). — *Recherche des éléments coïncidants réciproques dans le plan et dans l'espace.* (38 p.)

La réciprocité générale du premier degré, c'est-à-dire la relation où se correspondent linéairement deux éléments hétérogènes tels que point et droite, ou point et plan, donne lieu au problème important de déterminer les éléments qui coïncident si l'on superpose les plans et les espaces qui portent ces éléments. L'étude de cette question, commencée en partie par Seydewitz, Pfaff et Reye, fait l'objet du Mémoire de M. Schröter. Il se sert des méthodes de la Géométrie synthétique, et n'exclut pas la considération des éléments imaginaires.

La première Partie, qui s'occupe de deux plans réciproques superposés, fait voir qu'il existe deux systèmes polaires ou bien deux sections coniques $K^{(2)}$ et $k^{(2)}$, telles que chaque tangente de $K^{(2)}$ coupe $k^{(2)}$ en deux points qui correspondent à cette tangente dans l'un et l'autre sens de la relation réciproque ; de même, les deux tangentes menées d'un point de $k^{(2)}$ à $K^{(2)}$ correspondent à ce point. Si les coniques $K^{(2)}$ et $k^{(2)}$ sont réelles, elles se touchent en deux points. De plus, il y a en général trois points et trois droites formant les sommets et les côtés d'un même triangle, qui se correspondent mutuellement. Si, par suite d'une position spéciale, les deux coniques se confondent entièrement, les deux systèmes polaires deviennent identiques, ce qui fait l'involution des systèmes.

Pour deux espaces réciproques superposés, étudiés dans la seconde Partie du Mémoire, on obtient des résultats analogues : tous les plans qui contiennent leurs points correspondants enveloppent une surface $F^{(2)}$ du second degré, et tous les points qui tombent sur leurs plans correspondants forment une autre surface $f^{(2)}$. Si deux droites correspondantes des deux espaces réciproques se rencontrent, leurs points d'intersection sont un point de $f^{(2)}$, leur plan est tangent à $F^{(2)}$. Tous les rayons passant par un point (x, y_1) arbitraire de $f^{(2)}$, et coupés par leurs rayons correspondants, appartiennent aux deux plans (X_1, Y) qui passent par ce point et lui correspondent suivant les deux systèmes ; chaque plan tangent mené du point (x, y_1) de $f^{(2)}$ à $F^{(2)}$ coupe les deux plans (X_1, Y) suivant deux rayons correspondants, et réciproquement. Les points qui correspondent à un même plan suivant les deux systèmes forment les sommets d'un tétraèdre ; les deux surfaces $F^{(2)}$ et $f^{(2)}$ se touchent aux sommets de ce tétraèdre; donc la courbe dans l'espace, intersection des deux surfaces, se réduit à un quadrilatère gauche dans l'espace. Si l'on construit deux surfaces du second ordre qui se touchent en quatre points, la correspondance n'est pas encore déterminée ; il faut encore ajouter un couple d'éléments correspondants, un plan et un point, pour fixer complétement la relation.

Les résultats de la première Partie du Mémoire ne sont pas nouveaux, ceux de la seconde n'épuisent pas la recherche.

Ce qu'il y a d'intéressant dans le Mémoire consiste plutôt dans la méthode synthétique employée par l'auteur.

Selling (Ed.). — *Sur les formes quadratiques binaires et ternaires.* (87 p.)

On sait que toutes les formes quadratiques binaires et ternaires de même invariant (discriminant) peuvent être réduites, par des transformations homogènes et linéaires de déterminant 1, à des formes nommées *réduites*. Le nombre en est fini, si les coefficients des formes sont des nombres entiers, et elles se distribuent en des classes dont chacune contient toutes les réduites équivalentes, une seule en général, dans le cas des formes définies. De plus, les formes binaires indéfinies réduites d'une classe présentent une période qui se reproduit continuellement après une suite définie de transformations; donc c'est par la répétition d'une seule transformation ou de son inverse qu'on obtient toutes les *transformations semblables* (par lesquelles une forme se transforme en soi-même).

M. Selling démontre ensuite la proposition analogue pour les formes ternaires. Cependant il y a toujours, non pas une seule transformation, mais un nombre fini de transformations dont se compose chaque transformation semblable. Le moyen dont il se sert, c'est la *réduction continuelle,* découverte par M. Hermite (t. 41 et 47 de ce *Journal*). Aux formes indéfinies f sont étroitement liées certaines formes positives $\mathfrak{f}$ par cette condition : leurs invariants ont une valeur égale, mais de signe opposé pour les formes binaires, égale et de même signe pour les formes ternaires ; leurs invariants simultanés s'évanouissent. Les coefficients variables des formes binaires positives $\mathfrak{f}$ contiennent un seul argument variable continu. Si l'on représente les valeurs de cet argument par les points d'une ligne continue, celle-ci se décompose en plusieurs parties de longueur finie, et telles que la réduction de la forme $\mathfrak{f}$ conduit à la même forme positive réduite tant que le point variable reste sur la même partie. Les coefficients de la forme ternaire $\mathfrak{f}$ contiennent deux arguments variables continus. Si l'on représente les valeurs de ces arguments par les points d'une surface, celle-ci se décompose en plusieurs champs de grandeur finie, et tels que la réduction de la forme $\mathfrak{f}$ conduit à la même forme positive réduite tant que le point variable reste sur le même champ. Les formes issues de la forme indéfinie f et engendrées par les mêmes substitutions sont aussi nommées *réduites*. Les réduites nommées *principales*, qu'a signalées M. Hermite dans ses recherches sur les formes binaires indéfinies, ne sont pas identiques aux réduites de Lagrange et de Gauss ; mais une modification des conditions de réduction pour les formes positives rétablit cette identité.

D'une manière analogue, M. Selling change aussi les conditions de réduction acceptées jusqu'à présent par tous les géomètres pour les formes ternaires positives. Les champs ne demandent que la considération des lignes de démarcation, les lignes celle des extrémités de ces lignes, les deux genres de limites celle des limites appelées *points de croisement*, qui peuvent se trouver sans aucun calcul ; tandis que, chez M. Hermite, il pourrait sembler qu'il fallût la résolution ou au moins la discussion d'une équation du quatrième degré pour passer d'un champ à un champ voisin. Une planche lithographiée donne pour six classes différentes la position de tous les divers champs ou les régions qui comprennent un certain nombre de champs. On arrive à une division de toute la surface infinie en répétant un nombre infini de fois le dessin des parties de surface suivant une règle définie.

Revenons encore aux conditions de réduction. Si la forme positive est $\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{k}xy + \mathfrak{b}y^2$, il faut qu'aucun des trois nombres $\mathfrak{g} = -\mathfrak{h} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}$ ne soit positif ; donc, si l'on pose $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{k} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, la somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = -2(\mathfrak{g} + \mathfrak{h} + \mathfrak{k})$ devient la plus petite possible. D'une manière semblable, une forme positive $\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}y^2 + \mathfrak{c}z^2 + 2\mathfrak{g}yz + 2\mathfrak{h}zx + 2\mathfrak{k}xy$ est nommée *réduite* si aucun des six nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{h} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{m} = -\mathfrak{b} - \mathfrak{k} - \mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ n'est positif ; donc, si l'on pose

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 2(\mathfrak{g} + \mathfrak{h} + \mathfrak{k}) = \mathfrak{d},$$

la somme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=-2(\mathfrak{g}+\mathfrak{h}+\mathfrak{f}+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$ devient la plus petite possible. (L'auteur a utilisé ici une idée introduite par M. Borchardt, à l'occasion de recherches bien différentes (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1865 et 1866). D'après l'interprétation connue des formes quadratiques, ces conditions de réduction expriment que, pour les formes binaires, le triangle dont les côtés ont les longueurs respectives $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$ est acutangle suivant le langage usuel, ou, si l'on fixe pour chaque ligne une direction invariable comme positive, que deux côtés quelconques du triangle forment des angles obtus ; et de même pour les formes ternaires, si l'on construit un quadrilatère gauche dans l'espace dont les côtés aient les longueurs respectives $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, $\sqrt{\mathfrak{d}}$, les angles compris entre les directions de deux côtés consécutifs seront obtus. D'où il s'ensuit que, si en outre $\mathfrak{h}.\mathfrak{m}$ n'est pas plus grand que $\mathfrak{g}.\mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{f}.\mathfrak{n}$, les quatre plans déterminés par deux côtés consécutifs forment un tétraèdre à arêtes aiguës suivant le langage usuel ; alors la forme ternaire correspondant à ce tétraèdre et adjointe à la forme ternaire remplit aussi les conditions de réduction.

Schröter (H.). — *La solution Steinérienne du problème de Malfatti.* (15 p.)

Toutes les solutions connues du problème ne semblent pas répondre à la demande énoncée par Steiner au t. 1 de ce *Journal,* de développer la construction qu'il y a donnée, à l'aide des théorèmes très-élémentaires sur le contact de cercles, etc., qui précèdent le passage où il publie sa découverte. Les procédés de la plupart des auteurs qui ont traité ce sujet ressemblent plutôt à une vérification *a posteriori* qu'à un développement original.

M. Schröter croit satisfaire pour la première fois au sens exact des paroles de Steiner.

Frobenius (G.). — *Sur le déterminant de plusieurs fonctions d'une variable.* (13 p.)

Cantor (G.). — *Sur une propriété de la totalité des nombres réels algébriques.* (5 p.)

Milinowski. — *Remarque sur le Mémoire de M. Geiser, relatif aux courbes du troisième ordre et intitulé : « Sur deux problèmes de Géométrie »,* (t. 67 de ce *Journal*). (6 p.)

Reye (Th.). — *Sur les pentagones et les hexagones polaires des systèmes polaires dans l'espace.* (20 p.)

Dans un système polaire de l'espace, on appelle *tétraèdre polaire* tout tétraèdre dont les sommets sont les pôles des faces opposées. De même, l'auteur nomme *pentagone polaire* tout pentagone dans l'espace dont les dix arêtes passent chacune par le pôle de la face opposée, et *hexagone polaire* tout hexagone dans l'espace dont les dix arêtes passent chacune par le pôle de la face opposée. D'abord on trouve certains théorèmes sur deux relations géométriques entre dix points d'une surface de second ordre, théorèmes qu'a déjà donnés M. Paul Serret dans sa *Géométrie de direction* (1869); après cela, M. Reye étudie les pentagones et les hexagones polaires qui se présentent dans ces relations, et montre la fécondité des nouvelles notions par une série de théorèmes intéressants.

Mertens (F.). — *Sur quelques lois asymptotiques de la théorie des nombres.* (50 p.)

Le Mémoire se rapporte à certaines expressions asymptotiques qui reviennent dans quelques-unes des fonctions de la théorie des nombres. Les deux premiers problèmes ont été déjà traités par Dirichlet dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin.* Cependant l'auteur a cru devoir les aborder de nouveau, parce que sa méthode lui semblait être plus directe, et que l'écart de l'expression asymptotique pouvait être fixé plus étroitement. A cet effet, il a souvent remonté aux séries données par Euler dans son *Introduction à l'analyse des infinis.* Voici les problèmes traités :

1. Soit φn le nombre de tous les nombres compris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et premiers avec n; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_1^G{}_m \varphi m$ pour de grandes valeurs de G.

2. Soit ψm le nombre des diviseurs de m qui ne sont divisibles par aucun carré (excepté 1); trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_1^G{}_m \psi m$ pour de grandes valeurs de G.

3. Trouver la somme des valeurs inverses de tous les nombres premiers qui peuvent être représentés par une forme quadratique

donnée, positive et proprement primitive, de déterminant régulier D, qui ne sont pas diviseurs de 2D et ne surpassent pas une limite donnée G.

4. Soit $H(-D)$ le nombre des classes dans lesquelles se partagent toutes les formes quadratiques positives proprement primitives de déterminant négatif $-D$; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{1}^{G}{}_{n} H(-n)$.

5. Soit, dans la théorie des nombres complexes de la forme $a+bi$, φm le nombre de tous les nombres d'un système complet de résidus suivant le module m, qui n'ont pas de facteur commun avec m; soit ΩG la totalité de tous les nombres entiers complexes (excepté zéro) dont les normes sont $\leqq G$; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{1}^{G}{}_{m} \varphi m$ étendue à tous les membres de ΩG.

6. Soit $\mathfrak{T} m$ le nombre de tous les diviseurs du nombre entier complexe $m = a + bi$; déterminer l'expression asymptotique de la somme $\sum \mathfrak{T} m$ étendue à tous les nombres du complexe ΩG, où ΩG a la même signification que dans 5.

7. Soit ψm le nombre des diviseurs du nombre entier complexe $m = a + bi$ qui ne sont divisibles par aucun carré (excepté ± 1); déterminer l'expression asymptotique de la somme $\sum \psi m$ étendue à tous les nombres ΩG.

8. Soient k, l deux nombres complexes donnés, sans diviseur commun, k en outre étant premier; déterminer l'expression asymptotique de la somme des normes inverses de tous les nombres premiers complexes impairs compris dans la forme $kt + l$ et dont les normes ne surpassent pas la limite donnée G.

Fuchs (L.). — *Sur la représentation au moyen des fonctions algébriques.* (14 p.)

Est-il possible de représenter, au moyen d'une fonction algébrique, un plan entier, à l'exception d'une ligne qui ne renferme pas une aire, sur la surface d'un cercle? L'auteur montre que de toutes les fonctions algébriques il n'y a que les fonctions rationnelles du second degré qui satisfassent aux conditions données. Cette proposition se prête à une généralisation où le cercle est remplacé par une aire simplement connexe et dont le contour est soumis à certaines conditions.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ (¹).

T. VII, 1er et 2e cahier; 1874.

Letnikof (A.-B.). — *Recherches relatives à la théorie des intégrales de la forme*

$$\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du. \tag{1}$$

(205 p.)

Cet important Mémoire est divisé en trois Chapitres :

Chapitre I. — Ce Chapitre, ayant pour titre : *Résolution des problèmes du calcul inverse des intégrales définies de la forme* (1), sert d'introduction aux deux autres.

Le calcul inverse des intégrales définies a, comme on sait, pour objet la recherche de la forme d'une fonction $f(\alpha)$ définie par une équation analogue à la suivante :

$$\int_a^x (x-\alpha)^{p-1} f(\alpha)\,d\alpha = \varphi(x).$$

La science actuelle ne possède aucune méthode générale de résolution de ce problème, important par le rôle qu'il joue dans les diverses questions de Mécanique et de Physique mathématique.

Sans aborder la question dans toute sa généralité, l'auteur se borne à traiter une classe de ces problèmes dont la solution peut servir de base à une théorie nouvelle et rigoureuse des dérivées à indice quelconque.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 314.

En prenant pour point de départ un problème connu d'Abel, qui conduit à l'équation

$$\int_a^x \frac{f'(\alpha)\,d\alpha}{(x-\alpha)^n} = \varphi(x),$$

dans laquelle $f(\alpha)$ est inconnue, l'auteur démontre que la formule trouvée par Abel et mise sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \frac{d}{dx}\int_a^r (x-\beta)^{-p}\varphi(\beta)\,d\beta$$

fournit une solution simple de plusieurs problèmes réputés très-difficiles, et entre autres de ceux qu'a traités M. Liouville à l'aide de dérivées à indice quelconque ([1]). Nous regrettons que l'étendue de cet article ne nous permette pas de reproduire ces solutions.

M. Letnikof démontre ensuite que la formule d'Abel peut être étendue aux intégrales multiples, et il établit la formule de réduction suivante :

$$\int_a^\mu (\mu-\varepsilon)^{s-1}d\varepsilon \ldots \int_a^\gamma (\gamma-\beta)^{q-1}d\beta \int_a^\beta (\beta-\alpha)^{p-1}f(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+\ldots+s)}\int_a^\mu f(\alpha)(\mu-\alpha)^{p+q+\ldots+s-1}\,d\alpha,$$

qui renferme, comme cas particuliers, les formules connues de MM. Schlömilch et Liouville.

Chapitre II. — *Nouvelles bases de la théorie des dérivées définies à indice quelconque.*

Soit $f(\alpha)$ une fonction qui pour les valeurs de α comprises entre les limites a et x est continue et finie et même infinie, mais d'ordre r inférieur à l'unité, c'est-à-dire telle que

$$\lim(\alpha-a)f(\alpha)=0, \quad \text{ou} \quad \lim(\alpha-a)^r f(\alpha) = \text{A},$$

A étant une quantité finie autre que zéro.

Dans ce cas, la fonction $f(\alpha)$ peut être intégrée entre les limites a et x, et l'intégration répétée plusieurs fois conduit à la formule

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e cahier, p. 1-69.

connue

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x)dx^n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_a^x (x-a)^{n-1} f(\alpha)d\alpha.$$

Le second membre de cette formule n'est autre chose qu'une valeur particulière de l'expression plus générale

$$(1) \qquad \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-a)^{p-1} f(\alpha)d\alpha,$$

où p est supposé quelconque. Cette expression indique une certaine opération effectuée sur $f(\alpha)$, et peut être représentée par le symbole $[D^{-p}f(x)]_a^x$ appelée *dérivée définie* de $f(x)$ à indice $-p$; de sorte que la dérivée définie à indice négatif est définie par la relation

$$[D^{-p}f(\alpha)]_a^x = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-a)^{p-1} f(\alpha)d\alpha,$$

p étant positif et différent de zéro.

L'auteur établit d'abord les diverses propriétés de ce symbole, pouvant être résumées par les relations

$$[D^{-q}D^{-p}f(x)]_a^x = [D^{-p}D^{-q}f(x)]_a^x = [D^{-p-q}f(x)]_a^x,$$
$$\frac{d^n}{dx^n}[D^{-p}f(x)]_a^x = [D^{n-p}f(x)]_a^x, \quad n-p>0,$$

et passe ensuite aux dérivées à indice positif, en prenant pour point de départ la dérivée à indice $q<1$, que l'on peut calculer par la formule

$$[D^q f(x)]_a^x = \frac{d}{dx}[D^{q-1}f(x)]_a^x = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-a)^{-q} f(\alpha)d\alpha,$$

dans laquelle $q-1$ est négatif.

Par des différentiations de proche en proche et des transformations que nous sommes obligé de passer sous silence, on arrive à la formule générale

$$[D^{p+q}f(x)]_a^x = \frac{(x-a)^{-p-1}}{\Gamma(1-q)} \int_a^x \frac{(\alpha-a)^{q+p}}{(x-\alpha)^q} [D^{p+1}(\alpha-a)^{1-q}f(\alpha)]_a^\alpha d\alpha,$$

dans laquelle p est quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, et q est une fraction plus petite que l'unité.

Cette formule donne l'expression de la dérivée définie à indice quelconque, et renferme comme cas particulier la formule de Grünwald.

En appliquant ses formules aux dérivées du produit des deux fonctions, l'auteur parvient à l'extension de la formule de Leibnitz aux dérivées du produit.

M. Letnikof examine en particulier le cas où la limite inférieure a devient infinie, et il établit les conditions auxquelles doit satisfaire $f(\alpha)$ pour que l'opération indiquée par le symbole $[D^q f(\alpha)]_\infty^x$ soit possible. Il démontre que les dérivées entre les limites ∞ et x jouissent des mêmes propriétés que la dérivée précédemment étudiée. Les deux opérations de dérivation entre les limites a et x et ∞ et x sont liées par la relation

$$[D^p y]_a^x = (-1)^p \frac{(z-a)^{p+1}}{c^p} [D^p (z-a)^{p-1} y]_\infty^z,$$

où y est une fonction de $x = \frac{1}{z}$.

Pour terminer ce Chapitre, l'auteur examine la question de l'existence de la fonction complémentaire, c'est-à-dire de la fonction $\theta(x)$, telle que l'on ait

$$[D^p \theta(x)]_a^x = 0;$$

il fait remarquer que de la définition même de la dérivée définie il résulte que ce symbole a toujours une valeur déterminée, quel que soit p; que, par conséquent, s'il existe une fonction $\theta(x)$, telle que sa dérivée $[D^p]_a^x$ soit nulle, il ne s'ensuit pas que l'on puisse ajouter $\theta(x)$ à une des valeurs de $[D^{-p} F(x)]_a^x$.

Chapitre III. — *Applications à l'intégration de quelques équations différentielles.*

M. Letnikof applique la théorie des dérivées à indice quelconque à l'intégration de l'équation

$$(a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

connue dans la science par les travaux des plus célèbres géomètres (Euler, Laplace, Gauss, Jacobi, etc.) dont elle a été l'objet.

Dans l'hypothèse que les racines a et b de $a_0 x^2 + b_0 x + c_0 = 0$

sont réelles et inégales, l'équation ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad (x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(c+hx)\frac{dy}{dx}+ky=0.$$

L'auteur démontre d'une façon générale que cette équation admet des solutions particulières :

1° Qui deviennent zéro ou l'infini, pour $x=a$, $x=b$ ou $x=\infty$;

2° Qui restent finies pour $x=a$ ou $x=b$, indiquées par Riemann.

En prenant la dérivée d'indice p, le premier membre de (A) se réduit à

$$(x-a)(x-b)[\mathrm{D}^{p+2}y]_a^x+[c-p(a+b)+(h+2p)x][\mathrm{D}^{p+1}y]_a^x,$$

c'est-à-dire qu'en posant

$$(\mathrm{B}) \qquad [\mathrm{D}^{p+1}y]_a^x=u$$

on obtient une équation linéaire du premier ordre, qui fait connaître immédiatement u, et l'on tire y de l'équation (B).

En faisant des hypothèses particulières sur les coefficients, on obtient douze solutions particulières représentées par les quatre formules suivantes :

$$\begin{aligned}
y&=[\mathrm{D}^{-p-1}\mathrm{U}_1]_e^x,\\
y&=(x-a)^{p+1-r}[\mathrm{D}^{-r}\mathrm{V}_1]_e^x,\\
y&=(x-b)^{p+1-s}[\mathrm{D}^{-s}\mathrm{V}_2]_e^x,\\
y&=(x-a)^{p+1-r}(x-b)^{p+1-s}[\mathrm{D}^{p+1-r-s}\mathrm{U}_2]_e^x,
\end{aligned}$$

dont chacune donne trois solutions, en posant $e=a, b, \infty$ (U_1, U_2, V_1, V_2 sont des fonctions des binômes $x-a$, $x-b$).

Pour le cas où les racines a et b sont égales, on obtient huit solutions particulières distinctes, représentées par les formules analogues que nous ne reproduisons pas ici.

M. Letnikof applique les formules générales ci-dessus aux divers cas particuliers de l'équation (A), dont nous indiquons les plus importantes :

1° Équation hypergéométrique

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[-\gamma+(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

pour laquelle il donne vingt-quatre solutions particulières, parmi lesquelles on retrouve les solutions obtenues par d'autres voies par Kummer [1] et Jacobi [2];

2° Équation

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0,$$

dont les solutions particulières forment les fonctions sphériques, et donnent les expressions générales de ces fonctions pour un indice quelconque;

3° Équation

$$z^2\frac{d^2F}{dz^2}+z\frac{dF}{dz}+(z^2-n^2)F=0,$$

qui conduit aux fonctions besséliennes, et donne les expressions générales de ces fonctions.

A cet aperçu, trop sommaire, du travail de M. Letnikof, nous ajouterons que la simplicité de sa méthode et la clarté de son exposition en rendent la lecture facile et attrayante, et nous regrettons que la langue peu connue dans laquelle il est écrit le rende inaccessible à la plus grande partie de nos lecteurs. La théorie de dérivées à indice quelconque, telle que la présente M. Letnikof, me paraît de nature à pouvoir presque faire partie des cours d'enseignement classique.

Imschenetsky (V.-G.). — *Méthode générale d'intégration de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre de deux fonctions de deux variables indépendantes.* (9 p.)

Preobrajensky (V.-V.) — *De l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* (48 p.)

Serdobinsky (V.-E.). — *Équations numériques dépendant des expressions du premier degré.* (20 p.)

Solutions des équations de la forme

$$ax=c+F(bx+m),$$

et leurs diverses propriétés. A. P.

---

[1] *Ueber die hypergeometrische Reihe* (*Crelle's Journal*, Bd. 15).

[2] *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometriscken Reihe* (*Crelle's Journal*, B. 51).